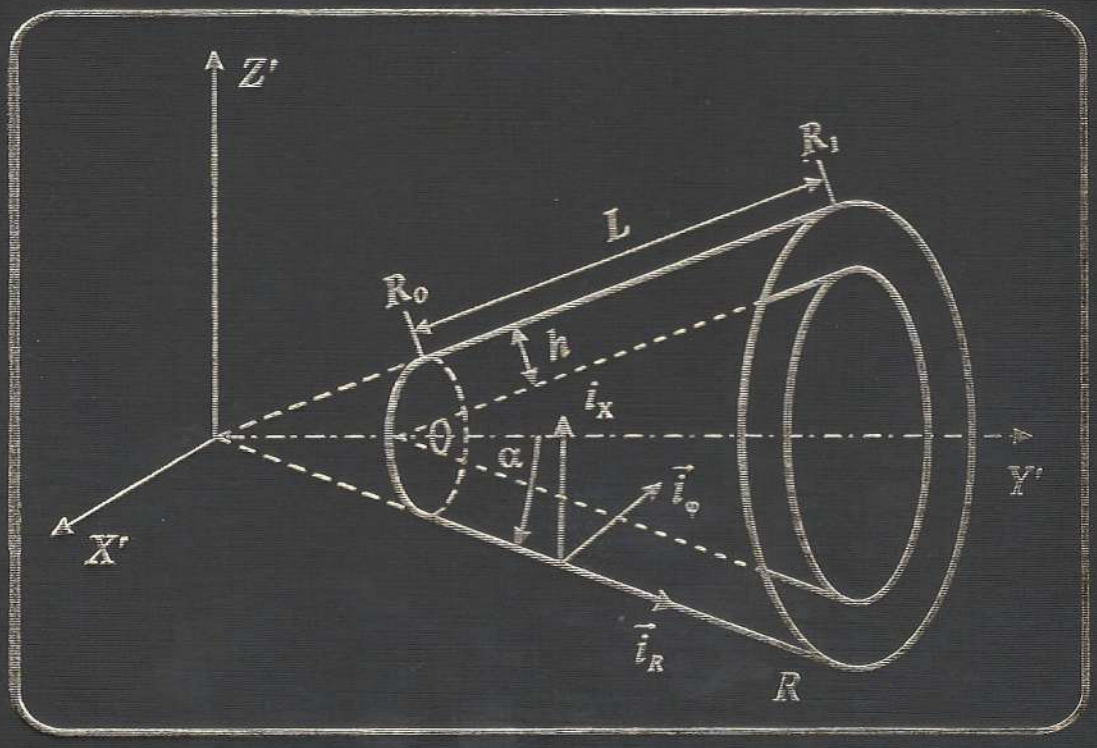
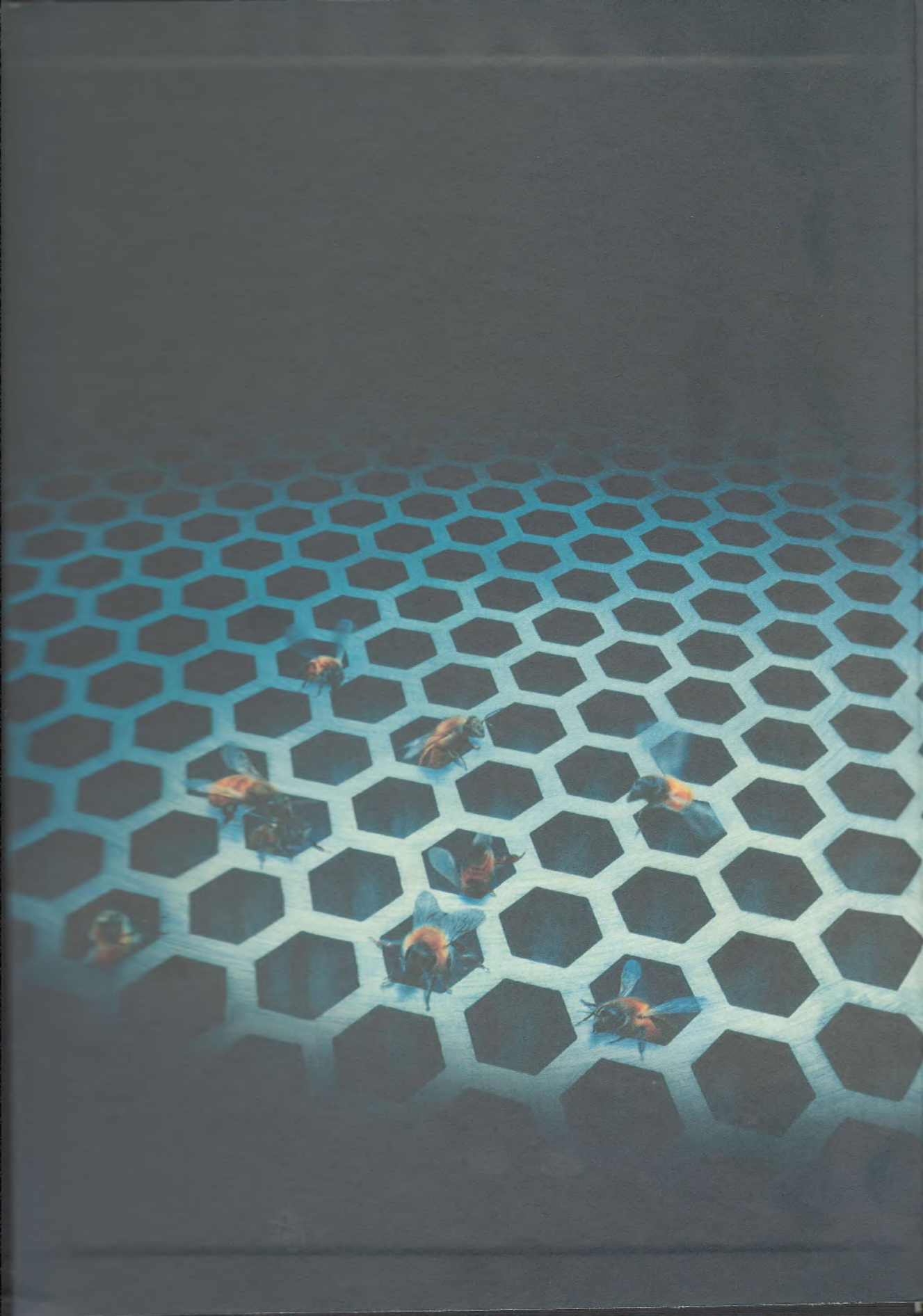
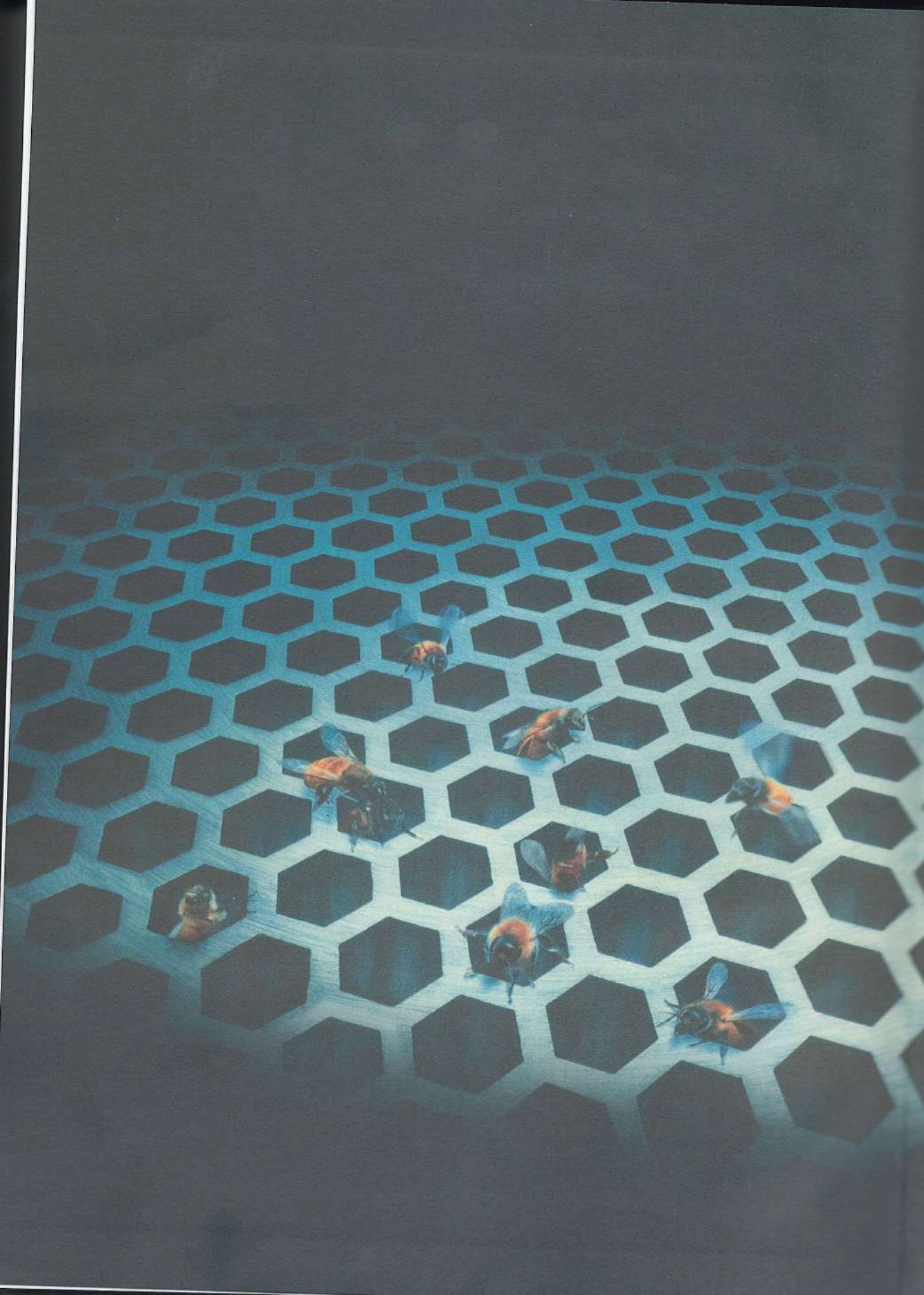
Л.М. Ульев

ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

Том 1







В гидромеханике есть многое,
что может очаровать нас.
Очевидно, нужна хорошо
иллюстрированная книга,
чтобы воздать должное
этому предмету

Д. Перегрин



УЛЬЕВ Леонид Михайлович, канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры «Интегрированные технологии, процессы и аппараты» Национального технического университета «ХПИ». В 1977 году закончил Харьковсковский государственный университет по специальности «Экспериментальная ядерная физика», в 1991 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности «Процессы и аппараты химической технологии», в 1994 г. получил сертификат Университета Манчестерского института науки и технологии по специальности «Интеграция процессов».

Ульев Л.М. является автором 161-го печатного научного труда, в число которых входит монография, посвященная развитию и применению пинч-анализа на промышленных предприятиях, использующих химико-технологические методы производства и переработки продукции, и учебное пособие, освещающее современное состояние и перспективы альтернативной энергетики и энергосбережения.

Основные научные интересы лежат в областях:

- *неизотермических реологических течений (разработан и опубликован оригинальный численный метод решения задач неизотермического течения высоковязких жидкостей);*
- *математического моделирования и интенсификации процессов гидродинамики и теплообмена в аппаратах химической технологии;*
- *интеграции процессов;*
- *энергосбережения.*

Принимал участие в работе над международными проектами в рамках программ ЕС и Объединенного Королевства - INTAS, INCO - COPERNICUS, REAP, SYNERGY, TEMPUS, TEMPUS-TACIS и других проектах шестой рамочной программы ЕС. Работал в качестве эксперта в проектах ЕБРР в Украине.

E-mail: ulm@kpi.kharkov.ua

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

Л. М. Ульев

ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

Монография

В двух томах

Под редакцией проф. Л.Л. Товажнянского

Том 1

Харьков 2006

ББК 22.253.3
У51
УДК 532.5; 678.027

Рецензенти: *В. С. Фокін*, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПІ",
М. Л. Угрюмов, д-р техн. наук, проф., НАКУ "ХАІ"

Друкується за рішенням вченої ради НТУ "ХПІ",
протокол № 8 від 30.06.2006 р.

У монографії вперше у світовій практиці систематично розглянуті задачі ламінарних плинів у співвісних конічних каналах. Наведені аналітичні рішення задач дифузорного та конфузорного плинів у співвісних конічних каналах як в умовах повзучого плину при зневажено малих числах Рейнольдса, так і з обліком характерної для ламінарних плинів у каналах із змінною площиною поверхні поперечного перерізу. Розглянуто задачі розвитку ламінарного плину в співвісних конічних дифузорах та визначені вхідні виправлення тиску.

Книги розраховані на широке коло наукових та інженерно-технічних працівників, що займаються розробкою й створенням гідравлічних пристроїв, насамперед полімерного встаткування. Задачі, розглянуті в книгах монографії, мають також і академічний інтерес, вони можуть бути корисні аспірантам і студентам, що вивчають механіку рідини й дисципліни хімічної технології.

Ульєв Л. М.

У51 Ламінарні течії в соосних конічних каналах: Монографія: В 2-х т.; Під ред. Л. Л. Товажнянського. – Т. 1. – Харків: НТУ "ХПІ", 2006. – 660 с. – Рос. мовою.

ISBN 966-593-423-6 (повне зібрання)
ISBN 966-593-424-4 (том 1)

В монографии впервые в мировой практике систематически рассмотрены задачи ламинарных течений в соосных конических каналах. Приведены аналитические решения задач диффузорного и конфузорного течений в соосных конических каналах как в условиях ползущего течения при пренебрежимо малых числах Рейнольдса, так и с учетом характерной инерционной силы для ламинарных течений в каналах с переменной площадью поверхности поперечного сечения. Рассмотрены задачи развития ламинарного течения в соосных конических диффузорах и определены входовые поправки давления.

Книги рассчитаны на широкий круг научных и инженерно-технических работников занимающихся разработкой и созданием гидравлических устройств и прежде всего полимерного оборудования. Задачи, рассмотренные в книгах монографии, имеют также и академический интерес, и они могут быть полезны аспирантам и студентам, изучающим механику жидкости и дисциплины химической технологии.

Іл. 280. Бібліогр. назв.: 132

ББК 22.253.3

ISBN 966-593-423-6 (повне зібрання)
ISBN 966-593-424-4 (том 1)

© Л. М. Ульєв, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

...но автор любит чрезвычайно быть обстоятельным во всем с той стороны, несмотря на то, что сам человек русский, хочет быть аккуратен, как немец.

Н.В. Гоголь

Contents 25

Предисловие 38

Основные условные обозначения 42

Список принятых обозначений 42

Для идентификаторов начинающихся с латинских букв 42

Для идентификаторов начинающихся с греческих букв 49

Безразмерные критерии 57

Введение 61

Глава 1. Техническая и математическая формулировка задач ламинарного течения в соосных конических каналах 69

1.1. Характерные области практического использования соосных конических каналов 69

1.2. Классификация соосных конических каналов 72

1.3. Система гидродинамических уравнений, описывающих ламинарные течения в соосных конических диффузорах с общей вершиной границ 77

1.4. Система гидродинамических уравнений, описывающих ламинарные течения в соосных конических конфузорах с общей вершиной границ 81
1.5. Система гидродинамических уравнений, описывающих ламинарные течения в соосных конических диффузорах с постоянной шириной канала 82
1.6. Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины 93

Глава 2. Медленное течение в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ 96

2.1. Краткий обзор ранних работ 96
2.2. Математическая формулировка проблемы 97
2.3. Аналитическое решение задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ 100
2.4. Анализ полученного решения 109
2.4.1. Анализ и визуальное представление распределения скорости ползущего течения в кольцевом коническом диффузоре 110
2.4.2 Распределение безразмерного давления и его градиента при ползущем течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ 117
2.4.3. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с общей вершиной границ при ползущем течении 128

Глава 3. Ползущее течение в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ 132

3.1. Краткий обзор ранних работ 132

3.2. Математическая формулировка задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ 133
3.3. Аналитическое решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ 136
3.4. Анализ полученного решения 140

Глава 4. Ползущее течение в соосном коническом диффузоре постоянной ширины 145

4.1. Краткая историческая справка о ранних работах 145
4.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины 146
4.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины 149
4.4. Анализ решения задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины ... 154
4.5. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора постоянной ширины при ползущем течении 158
4.6. Сравнение результатов, полученных для расчета параметров течения в соосных конических каналах постоянной ширины с существующими методами расчета течения в таких каналах 159
4.7. Некоторые особенности распределения безразмерного давления при ползущем течении в соосных конических диффузорах 167

Глава 5. Ползущее течение в соосном коническом конфузоре постоянной ширины 172

5.1. Краткая историческая справка о ранних работах 172

5.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины 172
5.3. Аналитическое решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины 175
5.4. Анализ решения задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины.... 180

Глава 6. Ползущее течение в соосном коническом диффузоре переменной ширины 182

6.1. Краткий обзор ранних работ..... 182
6.2. Формулировка задачи ползущего диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с переменной шириной 183
6.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины .. 186
6.4. Решение задачи ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах, образованных коническими поверхностями с общей вершиной в биконическом приближении..... 195
6.5. Анализ ползущего диффузорного течения в соосных конических диффузорах с границами без общей вершины..... 198
6.6. Анализ приближенных выражений для расчета распределения безразмерного давления в соосном коническом диффузоре переменной ширины..... 218
6.7. Анализ решения задачи ползущего диффузорного течения в соосных конических диффузорах с границами, имеющими общую вершину 227
6.8. Сравнение распределений скоростей, полученных при решении задачи ползущего течения в соосных конических диффузорах, образованных конусами с общей вершиной в сферических и биконических координатах..... 230

6.9. Сравнение безразмерных давлений при медленном ламинарном течении в соосных коническом диффузоре, образованном коническими поверхностями с общей вершиной, полученных в сферических и биконических координатах 236

6.10. Особенности напорно-расходной характеристики, полученной в биконических координатах для ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины 246

6.11. Ползущее диффузорное течение в соосных конических кналах с границами, раскрывающимися навстречу друг другу 250

6.12. Сравнение результатов, полученных для расчета течения в соосных конических диффузорах переменной ширины с существующими методами расчета 257

Глава 7. Ползущее течение в соосном коническом конфузоре переменной ширины 262

7.1. Краткий обзор ранних работ 262

7.2. Формулировка задачи ползущего конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с переменной шириной вдоль течения 263

7.3. Решение задачи ползущего конфузорного течения жидкости в соосном коническом канале переменной ширины 265

7.4. Анализ ползущего конфузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины с границами без общей вершины 271

7.5. Приближенное решение задачи ползущего конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной 278

7.6. Анализ ползущего конфузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной границ в биконической системе координат 282

Глава 8. Анализ ламинарного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ при частичном учете инерционных свойств 289

8.1. Краткое замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических каналах с учетом инерционных свойств 289

8.2. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ и частичном учетом инерционных свойств 290

8.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и частичным учетом инерционных свойств в сферической системе координат 292

8.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ 296

8.5. Условия, при котором можно пренебречь инерционными свойствами диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ... 309

8.6. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ 312

8.7. Особенности распределения перепада давления при ламинарном течении в бесконечно длинном соосном коническом диффузоре с общей вершиной... 314

8.8. Математическая формулировка и решение задачи ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей

вершиной границ и частичным учетом инерционных свойств 321

8.9. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной его границ 328

8.10. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь инерционными свойствами ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале при вычислении перепада давления 335

8.11. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь трением при вычислении перепада давления в ламинарном конфузорном течении жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ 339

8.12. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических диффузорах с общей вершиной его границ, рассчитанной с учетом инерционных свойств 341

8.13. Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосных конических конфузорах с общей вершиной границ, рассчитанная с учетом инерционных свойств 347

Глава 9. Анализ ламинарного течения ньютоновской жидкости в соосных конических каналах постоянной ширины при частичном учете инерционных свойств 352

9.1. Замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических каналах постоянной ширины и учетом инерционных свойств 352

9.2. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидко-

сти в соосном коническом канале постоянной ширины и с частичным учетом инерционных свойств ... 353
9.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом диффузоре постоянной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат ... 355
9.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины ... 360
9.5. Условия, при котором можно пренебречь инерционными свойствами диффузорного ламинарного течения при расчете перепада давления в соосном коническом канале постоянной ширины ... 378
9.6. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины ... 380
9.7. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических диффузорах постоянной ширины, рассчитанной с учетом инерционных свойств ... 383
9.8. Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины и частичным учетом инерционных свойств ... 390
9.9. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат ... 393
9.10. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины ... 398
9.11 Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь инерционными свойствами ла-

минарного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины при вычислении перепада давления 404

9.12. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь трением при вычислении перепада давления в ламинарном конфузорном течении жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины 408

9.13. Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосных конических конфузорах постоянной ширины, рассчитанная с учетом инерционных свойств 411

9.14. Мощность необходимая для обеспечения заданного расхода жидкости в соосных конических каналах постоянной ширины 413

Глава 10. Анализ ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосных конических каналах переменной ширины при частичном учете инерционных свойств 415

10.1. Замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических каналах переменной ширины и учетом инерционных свойств 415

10.2. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале переменой ширины и с частичным учетом инерционных свойств 416

10.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом диффузоре переменной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат 420

10.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления

при диффузором ламинарном течении в соосном коническом канале переменной ширины 426

10.5. Особенности распределения безразмерного давления на бесконечно большом расстоянии от входа в канал при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль течения 454

10.6. Условия, при которых можно пренебречь инерционными свойствами диффузорного ламинарного течения в соосном коническом канале переменной ширины 462

10.7. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре переменной ширины 471

10.8. Некоторые случаи "безинерционных" течений в соосных конических диффузорах 475

10.9. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических диффузорах переменной ширины, рассчитанной с учетом инерционных свойств 480

Глава 11. Анализ ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат 483

11.1. Решение задачи ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ в биконических координатах 483

11.2. Сравнение решений, полученных в биконической и сферической системах координат 485

11.3. Определение условий, при которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления 494
11.4. Условия пренебрежения диссипативной составляющей безразмерного давления 495
11.5. Условия пренебрежения динамической составляющей безразмерного давления при его вычислении в случае диффузорного течения в соосном коническом канале, образованном границами с общей вершиной 498
11.6. Анализ ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале, образованном поверхностями с общей вершиной, с учетом инерционных свойств в биконических координатах 500
11.7 Расходно-напорная характеристика ламиарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ, полученная в биконических координатах..... 520

Глава 12.Анализ ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосных конических каналах переменной ширины при частичном учете инерционных свойств 524

12.1. Замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических конфузорах переменной ширины и учетом инерционных свойств 524
12.2. Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале переменой ширины и с частичным учетом инерционных свойств 525
12.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом конфузоре переменной шири-

ны при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат 529

12.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при конфузорном ламинарном течении в соосном коническом канале переменной ширины 536

12.5. Условия, при которых можно пренебречь инерционными свойствами конфузорного ламинарного течения в соосном коническом канале переменной ширины 570

12.6. Диапазон чисел Рейнольдса в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом конфузоре переменной ширины... 577

12.7. Некоторые случаи "безинерционных" течений в соосных конических конфузорах 581

12.8. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических конфузорах переменной ширины, рассчитанной с учетом инерционных свойств 583

Глава 13.Анализ ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат 590

13.1. Решение задачи ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ в биконических координатах 590

13.2. Сравнение решений, полученных в биконической и сферической системах координат 592

13.3. Определение условий, при которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления 594

13.4. Условия пренебрежения динамической составляющей безразмерного давления в соосном коническом конфузоре с общей вершиной в биконическом приближении 595
13.5. Условия пренебрежения диссипативной составляющей безразмерного давления при его вычислении в случае конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном границами с общей вершиной 598
13.6. Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосных конических конфузорах с общей вершиной его границ, полученная в биконических координатах 600

Глава 14. Аппроксимация диффузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины с помощью течения в секториальных каналах постоянной ширины 602

14.1. Введение. Геометрическая возможность аппроксимации 602
14.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в секториальном диффузоре постоянной ширины 604
14.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения жидкости в секториальном канале постоянной ширины 608
14.4. Анализ решения задачи ползущего течения в секториальном диффузоре постоянной ширины 614
14.5. Постановка и решение задачи ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины с учетом характерной инерционной силы 620
14.6. Анализ влияния характерной инерционной силы на параметры диффузорного ламинарного течения в секториальном канале постоянной ширины 623

14.7. Диапазоны изменения чисел Рейнольдса в которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления 636
14.8. Расходно-напорная характеристика секториальных каналов с плоскими параллельными границами 640

Список литературы 651

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ТОМА МОНОГРАФИИ

Глава 15.Ползущее диффузорное течение в секториальных каналах переменной ширины..... 713

15.1. Введение. Геометрия секториального диффузора переменной ширины..... 713
15.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в секториальном диффузоре переменной ширины 716
15.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения жидкости в секториальном канале переменной ширины 719
15.4. Анализ решения задачи ползущего течения в секториальном диффузоре переменной ширины 724
15.4.1.Оценка приближений 724
15.4.2.Особенностей ползущего диффузорного течения в секториальном канале переменной ширины..... 728

15.5. Расходно-напорная характеристика ползущего течения в секториальных диффузорах переменной ширины 750

Глава 16. Анализ ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в секториальных каналах переменной ширины при частичном учете инерционных свойств 751

16.1. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в секториальном канале переменой ширины и с частичным учетом инерционных свойств 751
16.2. Решение задачи ламинарного течения жидкости в секториальном диффузоре переменной ширины при частичном учете инерционных свойств 753
16.3. Анализ диффузорного ламинарного течения в секториальном канале переменной ширины с частичным учетом инерционных свойств 758
16.4. Определение диапазона чисел Re, в котором можно пренебречь характерной инерционной силой при диффузорном течении в секториальном канале переменной ширины 766
16.5. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в секториальном диффузоре переменной ширины 777
16.6. Некоторые случаи "безинерционных" течений в секториальных диффузорах 781
16.7. Зависимость перепада безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре от его угловых параметров 794
16.8. Напорно-расходная характеристика секториального диффузора с переменной вдоль течения шириной 806

Глава 17.Ламинарное конфузорное течение в секториальных каналах постоянной ширины .. 819

17.1 Краткое введение 819

17.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в секториальном конфузоре постоянной ширины 820

17.3. Решение задачи ползущего конфузорного течения жидкости в секториальном канале постоянной ширины 822

17.4. Анализ решения задачи ползущего течения в секториальном конфузоре постоянной ширины..... 825

17.5. Расходно-напорная характеристика ползущеего течения в секториальном конфузоре постоянной ширины 830

17.6. Постановка и решение задачи ламинарного конфузорного течения в секториальном канале постоянной ширины с учетом характерной инерционной силы 830

17.7. Анализ влияния характерной инерционной силы на параметры конфузорного ламинарного течения в секториальном канале постоянной ширины 834

17.8. Диапазоны изменения чисел Рейнольдса в которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления..... 842

17.9. Расходно-напорная характеристика секториального конфузора постоянной ширины, полученная с учетом инерционных свойств течения..... 847

Глава 18.Ламинарные конфузорные течения в секториальных каналах переменной ширины . 850

18.1. Введение. Геометрия секториального конфузора переменной ширины..... 850

18.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в секториальном конфузоре переменной ширины 853
18.3. Решение задачи ползущего конфузорного течения жидкости в секториальном канале переменной ширины 857
18.4. Аппроксимация ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах, образованных границами с общей вершиной течением в секториальном конфузоре..... 862
18.5. Анализ решения задачи ползущего течения в секториальном конфузоре переменной ширины 864
18.6. Расходно-напорная характеристика секториального конфузора переменной вдоль канала ширины при медленных течениях 876
18.7. Частичный учет инерционной силы, возникающей при ламинарном конфузорном течении в секториальном канале переменной вдоль течения ширины. 877
18.8. Решение задачи ламинарного течения в секториальном конфузоре переменной ширины с учетом характерной инерционной силы..... 879
18.9. Особенности распределения безразмерного давления в секториальном конфузоре при ламинарном течении с умеренными числами Рейнольдса..... 883
18.10. Расходно-напорная характеристика секториального конфузора с переменной вдоль течения шириной канала при ламинарном течении..... 895
18.11. Определение диапазона чисел Рейнольдса, при которых можно пренебречь влияние динамической составляющей давления при ламинарном конфузорном течении в секториальном канале переменной ширины 901

18.12. Определение диапазона изменения чисел Рейнольдса, при которых можно пренебречь влиянием сил трения, на изменение давления при ламинарном конфузорном течении в секториальном канале переменной ширины 906

Глава 19. Развитие ламинарного диффузорного течения в секториальных каналах постоянной ширины 910

19.1. Введение 910
19.2. Математическая постановка задачи развития ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины 914
19.3. Решение задачи развития ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины. Операционный метод 917
19.4. Анализ стационарного неустановившегося диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины 925
19.5. Приближенные выражения для расчета длины начального гидродинамического участка при развитии ламинарного диффузорного течения в секториальных каналах постоянной ширины 966
19.6. Оценка перепада давления на начальном гидродинамическом участке 976

Глава 20. Анализ ламинарного диффузорного течения на начальном гидродинамическом участке в соосноых конических и аппроксимирующих их секториальных каналах методами разделения переменных 997

20.1. Краткое введение 997

20.2. Математическая постановка и решение задачи ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины с помощью метода разложения по собственным функциям..... 998
20.3. Сравнение решений задачи развития ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины полученным методом разложения по собственным функциям со строгим решением, полученным в главе 19 1012
20.4. Формулировка и решение задачи развития течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины с частичным учетом кривизны границ 1040
20.5. Анализ ламинарного течения в пределах начального гидродинамического участка в соосном коническом диффузоре..... 1052
20.6. Формулировка задачи развития ламинарного течения в секториальном диффузоре при неоднородном начальном распределении скорости..... 1084
20.7. Решение задачи развития ламинарного течения в секториальном диффузоре при неоднородном начальном распределении скорости 1089
20.8. Исследование характера ламинарного течения в секториальном диффузоре с неоднородным профилем скорости на входе 1095

Глава 21.Влияние кривизны границ на ламинарное установившееся течение жидкости в соосных конических каналах 1135

21.1. Краткая библиографическая справка..... 1135
21.2. Влияние кривизны границ на ползущее течение в соосном коническом диффузоре постоянной ширины 1136

21.2.1.Математическая формулировка задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре с учетом кривизны его границ 1136

21.2.2.Решение задачи диффузорного ползущего течения в соосном коническом канале с учетом кривизны его границ..... 1138

21.2.3.Анализ влияния кривизны границ соосного конического диффузора на ползущее течение. 1151

21.3. **Влияние кривизны границ на ползущее течение в соосном коническом конфузоре** 1190

21.3.1.Математическая постановка и решение задачи ползущего течения жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины 1190

21.3.2. Анализ влияния кривизны границ соосного конического конфузора на ползущее течение 1202

21.4. **Особенности ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с учетом кривизны границ и характерной инерционной силой**..... 1223

21.4.1.Математическая постановка и решение задачи ламинарного диффузорного течения с учетом характерной инерционной силы в соосном коническом канале 1224

21.4.2.Анализ влияния кривизны границ соосного конического диффузора на распределение безразмерного давления при ламинарном течении с необходимостью учета характерной инерционной..... 1232

21.5. **Особенности ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с учетом кривизны границ и характерной инерционной силы** 1254

21.5.1.Математическая постановка и решение задачи ламинарного конфузорного течения с учетом характерной инерционной силы и кривизны границ соосного конического канала 1255

21.5.2.Анализ влияния кривизны границ соосного конического конфузора на распределение безразмерного давления при ламинарном течении жидкости с существенными числами Рейнольдса 1267

21.6. **Влияние кривизны границ на ползущее течение в соосном коническом диффузоре с переменной шириной вдоль канала** 1279

21.6.1.Математическая постановка и решение задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины с учетом влияния кривизны границ канала 1280

21.6.2.Анализ влияния кривизны границ соосного конического диффузора переменной ширины на ползущее течение и сравнение параметров этого течения с параметрами решения, полученного для ползущего течения с частичным учётом влияния кривизны границ и без такого влияния 1291

21.6.3.Анализ влияния кривизны границ соосного конического диффузора, образованного коническими поверхностями, раскрытыми навстречу друг другу, на параметры ползущего течения 1335

21.6.4.Ползущее диффузорное течение в соосном коническом канале, образованном внешней конической и внутренней цилиндрической поверхностями 1363

21.7. **Сравнение результатов решения задачи ползущего течения с учетом влияния кривизны гра-**

ниц на профиль скорости в соосном коническом диффузоре переменной ширины с другими решениями, учитывающими влияние кривизны границ на поперечное распределение скорости..... 1372

Заключение..... 1384

Приложение..... 1389

Список литературы..... 1400

Именной указатель основного текста..... 1416

Именной указатель для эпиграфов..... 1418

CONTENTS

You are welcome

English

Foreword 38
Base conventional signs 42
List of accepted signs 42
Identifiers beginning with Roman letters 42
Identifiers beginning with Greek letters 49
Dimensionless criterions 57

Introduction 61

Chapter 1. Technical and mathematical enunciation of laminar flow in coaxial conic channels 69

1.1. Base fields for technical use of coaxial conic channels 69
1.2. Classification of coaxial conic channels 72
1.3. Hydrodynamic equations set for laminar flow in coaxial conic diffusers with common vertex 77
1.4. Hydrodynamic equations set for laminar flow in coaxial conic confusers with common vertex 81
1.5. Hydrodynamic equations set for laminar flow in coaxial conic diffusers with constant width 82
1.6. Hydrodynamic equations set for laminar flow in coaxial conic confusers with constant width 93

Chapter 2. Slow flow in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 96

2.1. Brief revue of early papers 96
2.2. Mathematical enunciation of problem 97
2.3. Analytical solution of the slow flow problem in coaxial conic diffusers with common vertex of boundaries 100
2.4. Discussion of received solution 109
2.4.1. Discussion and visualization of the velocity distribution for slow flow in coaxial conic diffusers with common vertex 110
2.4.2. Undimensional pressure and its gradient distributions for slow laminar flow in a conic diffuser with common vertex of boundaries 117
2.4.3. Pressure-drop characteristic for coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries with creeping flow 128

Chapter 3. Creeping flow in coaxial conic confuser with common vertex of boundaries ... 132

3.1. Brief revue of early papers ... 132
3.2. Mathematical enunciation of problem for creeping flow in coaxial conic confuser with common vertex of boundaries ... 133
3.3. Analytical solution of the slow flow problem in coaxial conic confusers with common vertex of boundaries ... 136
3.4. Discussion of received solution ... 140

Chapter 4. Creeping flow in coaxial conic diffuser with the constant width ... 145

4.1. Brief historic reference about early papers ... 145
4.2. Mathematical problem definition for creeping flow in the coaxial conic diffuser with the constant width ... 146
4.3. Solution for creeping flow problem in the coaxial conic diffuser with the constant width ... 149
4.4. Analysis of the solution for creeping flow problem in the coaxial conic diffuser with the constant width ... 154
4.5. Pressure-drop characteristic for coaxial conic diffuser of the constant width with creeping flow ... 158
4.6. Comparison of the received results for calculation of parameters for creeping flow with the existing methods of calculation for flow parameters in such channels ... 159
4.7. Same undimensional pressure distribution peculiarities for creeping flow in the coaxial conic diffusers ... 167

Chapter 5. Creeping flow in coaxial conic confuser with the constant width ... 172

5.1. Brief historic reference about early papers ... 172
5.2. Mathematical problem definition for creeping flow in the coaxial conic confuser with the constant width ... 172
5.3. Analytical solution for creeping flow problem in the coaxial conic confuser with the constant width ... 175
5.4. Analysis of the solution for creeping flow problem in the coaxial conic confuser with the constant width ... 180

Chapter 6. Creeping flow in coaxial conic diffuser with the variable width ... 182

6.1. Brief revue of early papers ... 182
6.2. Problem definition for creeping diffuser flow of Newtonian liquid in the coaxial conic channel with the variable width ... 183
6.3. Solution of the creeping flow problem in the coaxial conic diffuser with the variable width ... 186

6.4. Solution of the creeping flow problem in the coaxial conic channels formed with the help of conic surfaces with common vertex of boundaries in biconical approximation 195
6.5. Analysis of the creeping flow in the coaxial conic diffuser with boundaries having no common vertex 198
6.6. Analysis of the approximation expression for calculation of dimensionless pressure distribution in the coaxial conic diffuser with the variable width 218
6.7. Analysis of the solution for creeping flow problem in the coaxial conic diffusers with common vertex of boundaries 227
6.8. The comparison of velocity distributions received with solutions of the creeping flow problem in the coaxial conic diffusers formed with the cones with common vertex in spatial spherical coordinates and in biconical coordinates 230
6.9. The comparison of dimensionless pressures with the creeping flow in the coaxial conic diffusers formed with the cones with common vertex in spatial spherical coordinates and in biconical coordinates 236
6.10. The features of pressure drop flowrate characteristic received in biconical coordinates for diffuser creeping flow in the coaxial conic channels with the variable width 245
6.11. Creeping diffuser flow in the coaxial conic channels with boundaries opening toward each other 250
6.12. The comparison of results received for calculation of the creeping flow in the coaxial conic diffuser of the variable width with existing methods of calculations 257

Chapter 7. Creeping flow in coaxial conic confuser with the variable width 262

7.1. Brief revue of early papers 262
7.2. Problem definition for creeping confuser flow of Newtonian liquid in the coaxial conic channel with the variable width along the flow 263
7.3. Solution of the creeping flow problem in the coaxial conic confuser with the variable width 265
7.4. Analysis of the creeping flow in the coaxial conic confuser with boundaries having no common vertex 271
7.5. Approximation solution of the creeping confuser flow problem in the coaxial conic diffuser formed with the cone surfaces with common vertex 278
7.6. Analysis of the creeping flow in the coaxial conic diffuser with boundaries having no common vertex in biconical coordinates 282

Chapter 8. Analysis of laminar flow for Newtonian liquid in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries

and with partial taking into account the inertial properties 289

8.1. Brief account about early papers devoted to analysis of laminar flow in coaxial conic diffuser with partial taking into account the inertial properties 289

8.2. Mathematical enunciation of problem for laminar diffuser flow of Newtonian liquid in coaxial conic channels with common vertex of boundaries and with partial taking into account the inertial properties 290

8.3. Solution of problem for laminar diffuser flow of liquid in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries and with partial taking into account the inertial properties in spatial spherical coordinates 292

8.4. Peculiarities of influence of inertial properties of flow at the dimensionless pressure distribution with the diffuser flow in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 296

8.5. Conditions for which it is possible to neglect the inertial properties of diffuser flow with pressure drop calculation in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 309

8.6. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect dissipation properties with pressure drop calculation in laminar flow liquid in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 312

8.7. Peculiarities in the dimensionless pressure distribution with laminar flow in unlimited length coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 314

8.8. Mathematical enunciation of problem for laminar confuser flow of Newtonian liquid in coaxial conic channel with common vertex of boundaries and with partial taking into account the inertial properties 321

8.9. Peculiarities of influence of inertial properties flow at the dimensionless pressure distribution with the confuser flow in coaxial conic channels with common vertex of boundaries 328

8.10. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect inertial properties with pressure drop calculation in laminar flow liquid in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 335

8.11. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect friction with pressure drop calculation in laminar flow liquid in coaxial conic confuser with common vertex of boundaries 339

8.12. Peculiarities of the pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries calculated with taking into account of the inertial properties 341

8.13. Pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic confuser with common vertex of boundaries calculated with taking into account the inertial properties 347

Chapter 9. Analysis of laminar flow for Newtonian liquid in coaxial conic channels of constant width with partial taking into account the inertial properties 352

9.1. Observation of early paper devoted to analysis of laminar flow in coaxial conic channels of constant width with partial taking into account the inertial properties 352
9.2. Mathematical enunciation of problem for laminar diffuser flow of Newtonian liquid in coaxial conic channels of constant width with partial taking into account of the inertial properties 353
9.3. Solution of problem for laminar liquid flow in coaxial conic diffuser of constant width with partial taking into account the inertial properties in biconical coordinates 355
9.4. Peculiarities of influence of inertial properties of flow at the dimensionless pressure distribution with the diffuser flow in coaxial conic diffuser of constant width 360
9.5. Conditions for which it is possible to neglect the inertial properties of diffuser laminar flow with pressure drop calculation in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries 378
9.6. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect dissipation properties with pressure drop calculation in laminar flow liquid in coaxial conic diffuser of constant width 380
9.7. Peculiarities of the pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic diffusers of constant width calculated with partial taking into account of the inertial properties 383
9.8. Mathematical enunciation of problem for laminar confuser flow of Newtonian liquid in coaxial conic channels of constant width with partial taking into account the inertial properties 390
9.9. Solution of problem for laminar liquid flow in coaxial conic confuser of constant width with partial taking into account the inertial properties in biconical coordinates 393
9.10. Peculiarities of influence of inertial properties of flow at the dimensionless pressure distribution with the confuser flow in coaxial conic chnnel of constant width 398
9.11. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect inertial properties of laminar confuser flow liquid with pressure drop calculation in coaxial conic channel of constant width 404
9.12. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect friction with pressure drop calculation for laminar confuser flow liquid in coaxial conic channel of constant width 408
9.13. The pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic confusers of constant width calculated with partial taking into account of the inertial properties 411

9.14. Capacity which is necessary for supplying liquid flowrate in the coaxial conic channels with the constant width 413

Chapter10. Analysis of laminar diffuser flow for Newtonian liquid in coaxial conic channels of variable width with partial taking into account of the inertial properties 415

10.1. Observation of early paper devoted to analysis of laminar flow in coaxial conic channels of variable width with partial taking into account of the inertial properties 415
10.2. Mathematical enunciation of problem for laminar diffuser flow of Newtonian liquid in coaxial conic channels of variable width with partial taking into account of the inertial properties 416
10.3. Solution of problem for laminar liquid flow in coaxial conic diffuser of variable width with partial taking into account of the inertial properties in biconical coordinates 420
10.4. Peculiarities of influence of inertial properties of flow at the dimensionless pressure distribution with the diffuser flow in coaxial conic diffuser of variable width 426
10.5. Features in the dimensionless pressure distribution with laminar flow in unlimited length coaxial conic diffuser with the variable width along the flow 454
10.6. Conditions for which it is possible to neglect the inertial properties of diffuser laminar flow in the coaxial conic channel with variable width 462
10.7. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect dissipation properties of laminar diffuser flow liquid with pressure drop calculation in coaxial conic channel of variable width 471
10.8. Some cases of without inertia flows in the coaxial conic diffusers 475
10.9. Peculiarities of the pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic diffusers of variable width calculated with partial taking into account of the inertial properties 480

Chapter 11. Analysis of laminar flow in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries and with partial taking into account of the inertial properties in the biconical coordinates 483

11.1. Solution of problem for laminar diffuser flow of liquid in coaxial conic channel with common vertex of boundaries and with partial taking into account of the inertial properties in biconical coordinates 483
11.2. The comparison solutions received in spatial spherical coordinates and in biconical coordinates 485
11.3. Determination of conditions with which it is possible to neglect one from dimensionless pressure components 494

11.4. The conditions for neglecting of dissipation component of dimensionless pressure ... 495
11.5. The conditions for neglecting of dynamic component of dimensionless pressure with its calculation in case of diffuser flow in the coaxial conic channel formed boundaries with common vertex ... 498
11.6. Analysis of the laminar diffuser flow of Newtonian liquid in the coaxial conic channel formed boundaries with common vertex and boundaries and with partial taking into account of the inertial properties in biconical coordinates ... 500
11.7. The pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic diffuser with common vertex of boundaries and with partial taking into account of the inertial properties in biconical coordinates ... 520

Chapter 12. Analysis of laminar confuser flow for Newtonian liquid in coaxial conic channels of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 524

12.1. Observation of early papers devoted to analysis of laminar flow in coaxial conic confusers of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 524
12.2. Mathematical enunciation of problem for laminar confuser flow of Newtonian liquid in coaxial conic channels of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 525
12.3. Solution of problem for laminar liquid flow in coaxial conic confuser of variable width with partial taking into account of the inertial properties in biconical coordinates ... 529
12.4. Peculiarities of influence of inertial properties of flow at the dimensionless pressure distribution with the diffuser flow in coaxial conic confuser of variable width ... 536
12.5. Conditions for which it is possible to neglect the inertial properties of confuser laminar flow in the coaxial conic channel with variable width ... 570
12.6. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect dissipation properties of laminar confuser flow liquid with pressure drop calculation in coaxial conic channel of variable width ... 577
12.7. Some cases of without inertia flows in the coaxial conic confusers ... 581
12.8. Peculiarities of the pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic confusers of variable width calculated with partial taking into account of the inertial properties ... 583

Chapter 13. Analysis of laminar flow in coaxial conic confusers with common vertex of boundaries and with partial

taking into account of the inertial properties in the biconical coordinates 590

13.1. Solution of problem for laminar confuser flow of liquid in coaxial conic channel with common vertex of boundaries and in biconical coordinates 590
13.2. The comparison solutions received in spatial spherical coordinates and in biconical coordinates 592
13.3. Determination of conditions with which it is possible to neglect one from dimensionless pressure components 594
13.4. The conditions for neglecting of dynamic component of dimensionless pressure in the coaxial conic confuser formed boundaries with common vertex in biconical coordinates 595
13.5. The conditions for neglecting of dissipation component of dimensionless pressure with it calculation in case of confuser flow in the coaxial conic channel formed boundaries with common vertex 598
13.6. The pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in coaxial conic confuser with common vertex of boundaries and with partial taking into account of the inertial properties in biconical coordinates 600

Chapter 14. Approximation of diffuser flow in coaxial conic channels with constant width with the help of the flow in sectorial channels of constant width 602

14.1. Introduction. Geometrical possibility for approximation 602
14.2. Mathematical problem definition for creeping flow in a sectorial diffuser with the constant width 604
14.3. Solution for creeping diffuser flow problem in the sectorial channel with the constant width 608
14.4. Analysis of the solution for creeping flow problem in the sectorial diffuser with the constant width 614
14.5. Enunciation of problem for laminar diffuser flow in the sectorial channel of constant width with partial taking into account of the specific inertial force 620
14.6. Analysis of the specific inertial force influence at the parameters of diffuser laminar flow in the sectorial channel with the constant width 623
14.7. Ranges of Reynolds numbers for which it is possible to neglect one from dimensionless pressure components 636
14.8. The pressure drop-flowrate characteristic for sectorial channels with flat parallel boundaries 640

References 651

CONTENTS OF THE SECOND VOLUME

Chapter 15. Creeping diffuser flow in sectorial channels of variable width ... 713

15.1. Introduction. The geometry of variable width sectorial channels ... 713
15.2. Mathematical formulation of creeping flow problem in sectorial diffuser of variable width ... 716
15.3. Solution for problem of the creeping diffuser liquid flow in sectorial channel of variable width ... 719
15.4. Analysis of problem solution for creeping diffuser liquid flow in sectorial channel of variable width ... 724
15.4.1. Estimation of approximation ... 724
15.4.2. Features of the creeping diffuser liquid flow in sectorial channel of variable width ... 728
15.5. The pressure drop-flowrate characteristic for creeping flow in sectorial diffuser of variable width ... 750

Chapter 16. Analysis of laminar diffuser flow for Newtonian liquid in sectorial channels of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 751

16.1. Mathematical formulation of problem for laminar diffuser flow of Newtonian liquid in sectorial channel of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 751
16.2. Solution of problem for laminar liquid flow in sectorial diffuser of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 753
16.3. Analysis of the laminar diffuser liquid flow in the sectorial channel of variable width with partial taking into account of the inertial properties ... 758
16.4. Definition of ranges of Re numbers in which it is possible to neglect specific inertia force for diffuser flow in the sectorial channel of variable width ... 766
16.5. Range of Reynolds numbers for which it is possible to neglect dissipation properties of laminar diffuserr flow liquid with pressure drop calculation in sectorial channel of variable width ... 777
16.6. Some cases of without inertia flows in the sectorial diffusers ... 781
16.7. Dimensionless pressure dependence for laminar flowing sectorial diffuser from its angle parameters ... 794
16.8. The pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in sectorial diffuser of variable width and with partial taking into account of the inertial properties ... 806

Chapter 17. Laminar confuser flow in sectorial channels with constant width 819

17.1. Brief introduction 819
17.2. Mathematical problem definition for creeping flow in a sectorial confuser with the constant width 820
17.3. Solution for creeping confuser flow problem in the sectorial channel with the constant width 822
17.4. Analysis of the solution for creeping flow problem in the sectorial confuser with the constant width 825
17.5. The pressure drop-flowrate characteristic for creeping flow in sectorial confuser of constant width 830
17.6. Formulation of problem for laminar confuser flow in sectorial channel of constant width with partial taking into account of the inertial properties 830
17.7. Analysis of the specific inertial force influence at the parameters of confuser laminar flow in the sectorial channel with the constant width 834
17.8. Ranges of Reynolds numbers for which it is possible to neglect one from dimensionless pressure components 842
17.9. The pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in sectorial confuser of constant width and with partial taking into account of the inertial properties 847

Chapter 18. Laminar confuser flow in sectorial channels with variable width 850

18.1. Introduction. The sectorial confuser geometry of variable width 850
18.2. Mathematical problem definition for creeping flow in a sectorial confuser with the constant width 853
18.3. Solution for problem of the creeping confuser liquid flow in sectorial channel of variable width 857
18.4. Approximation of the laminar confuser flow in the coaxial conic channels formed with boundaries with common vertex by the flow in sectorial confuser 862
18.5. Analysis of the solution for creeping flow problem in the sectorial confuser with the constant width 864
18.6. The pressure drop-flowrate characteristic for creeping flow in sectorial confuser of variable width 876
18.7. Partial taking into account of the inertial force appeared with the laminar confuser flow in the sectorial channel with the constant width 877
18.8. Solution of problem for laminar liquid flow in sectorial confuser of variable width with partial taking into account of the specific inertial force 879
18.9. The features non-dimension pressure distribution in the sectorial confuser with the laminar flow for moderate Reynolds numbers 883

18.10. The pressure drop-flowrate characteristic for laminar flow in sectorial confuser of variable width 895
18.11. Definition of ranges of Reynolds numbers in which it is possible to neglect the influence of pressure dynamic component for confuser flow in the sectorial channel of variable width 901
18.12. Definition of ranges of Reynolds numbers in which it is possible to neglect the friction force influence at the pressure for confuser flow in the sectorial channel of variable width 906

Chapter 19. Laminar diffuser flow development in the sectorial channels with constant width 910

19.1. Introduction 910
19.2. Mathematical formulation of problem of development for the laminar diffuser flow in sectorial channel of constant width 914
19.3. Solution of problem of development for the laminar diffuser flow in sectorial channel of constant width. Operational method 917
19.4. Analysis of stationary spatially transition diffuser flow in sectorial channel of constant width 925
19.5. Approximation expressions for calculation of entrance hydrodynamic region with development of the laminar diffuser flow in sectorial channel of constant width 966
19.6. Pressure drop estimation at the entrance hydrodynamic region 976

Chapter 20. Analysis of the laminar diffuser flow at the entrance hydrodynamic region in coaxial conic and its approximating sectorial channel with the help of separation of variables method 997

20.1. Lemma 997
20.2. Mathematical formulation and solution of the laminar diffuser flow in the sectorial channel with constant width with the help of decomposition technique per eigenfunction 998
20.3. The comparison of solutions for problem of laminar diffuser flow development in the sectorial channel with constant width received with the help of the decomposition technique per eigenfunction with the exact solution received in the chapter 19 1012
20.4. Formulation and solution of problem of laminar diffuser flow development in the coaxial conic diffuser with the constant width and with taking into account of boundaries curvature 1040
20.5. Analysis of the laminar flow within the entrance hydrodynamic region in the coaxial conic diffuser 1052
20.6. Formulation of problem of laminar diffuser flow development in the coaxial conic diffuser with not uniform initial velocity distribution 1084

20.7. Solution of problem of laminar diffuser flow development in the coaxial conic diffuser with not uniform initial velocity distribution 1089
20.8. Investigation of character for the laminar flow with the non uniform initial velocity distribution 1095

Chapter21. The boundary curvatures influence at the steady state fluid flow in the coaxial conic channels 1135

21.1. Brief bibliographic reference 1135
21.2. Influence of the boundary curvatures at the creeping flow in the coaxial conic diffuser with the constant width 1136
21.2.1. Mathematical formulation creeping flow task in the coaxial conic diffuser with the taking into account of its boundary curvatures 1136
21.2.2. Solution of task for the diffuser creeping flow in the coaxial conic channel with the taking into account of its boundary curvatures 1138
21.2.3. Analysis of the boundary curvatures influence of coaxial conic diffuser at the creeping flow 1151
21.3. Influence of the boundary curvatures at the creeping flow in the coaxial conic confuser 1190
21.3.1. Mathematical formulation and solution creeping flow task in the coaxial conic confuser with the constant width 1190
21.3.2. Analysis of the boundary curvatures influence of coaxial conic confuser at the creeping flow 1202
21.4. Peculiarities of the diffuser laminar flow in the coaxial conic channel with the constant width and with the taking into account of its boundary curvatures and specific inertial force 1223
21.4.1. Mathematical formulation and solution of laminar diffuser flow task in the in the coaxial conic channel with the taking into account specific inertial force 1224
21.4.2. Analysis of the boundary curvatures influence of coaxial conic diffuser at the dimensionless pressure distribution with the laminar flow in case of need of taking into account both specific inertial force and curvature of the channel boundaries 1232
21.5. Peculiarities of the confuser laminar flow in the coaxial conic channel with the constant width and with the tacking into account its boundary curvatures and specific inertial force 1254
21.5.1. Mathematical formulation and solution laminar confuser flow task in the coaxial conic channel with the taking into account specific inertial force 1255
21.5.2. Analysis of the boundary curvatures influence of coaxial conic confuser at the dimensionless pressure distribution with the laminar flow with essential Reynolds numbers 1267

21.6. Influence of the boundary curvatures at the creeping flow in the coaxial conic diffuser with the variable width along the channel 1279
21.6.1. Mathematical formulation and solution creeping diffuser flow task in the coaxial conic channel with the variable width and with taking into account its boundary curvatures 1280
21.6.2. Analysis of the boundary curvatures influence of coaxial conic diffuser with the variable width and comparison of parameters for this flow with parameters of solution received for creeping flow with partial taking into account of the channel boundaries and with parameters solution received for creeping flow without such taking into account 1291
21.6.3. Analysis of the boundary curvatures influence of coaxial conic diffuser formed with the boundaries opened toward each other at the parameters of creeping 1335
21.6.4. The creeping diffuser flow in the coaxial conic channel formed with external conic and internal cylindrical surfaces 1363
21.7. The comparison of creeping flow problem solution results received with the help of taking into account boundary curvatures influence at the velocity profile in the coaxial conic diffuser with the variable width with another solution taking into account the influence boundary curvatures at the cross velocity distribution 1372

Conclusion 1384

Supplement 1389

References 1400

Name index for base text 1416

Name index for epigraph 1418

ПРЕДИСЛОВИЕ

И сказал он себе поэтому: нехорошо, если все те великие диковины, что он сам видел, или о которых слышал правду, не будут записаны для того, чтобы другие люди, не видевшие и не слышавшие этого, могли поучиться из этой книги.

Марко Поло

Накопив более чем пятнадцатилетний опыт работы с ламинарными течениями и конвективным теплообменом в соосных конических каналах, автор решил опубликовать некоторые из своих результатов и идей в форме отдельной монографии. В настоящей книге читателю представлен исключительно гидродинамический аспект ламинарных течений ньютоновской жидкости в соосных конических и секториальных каналах. Автор считает такую публикацию целесообразной прежде всего потому, что к моменту написания рукописи в мире не существовало ни одной монографии, посвященной рассматриваемым вопросам.

Все основные результаты, изложенные в двухтомнике, получены лично его автором и большинство из них опубликованы в научно-технической периодике, о чем свидетельствует обширная библиография. В то же время значительная часть материала книг будет обнародована впервые. При использовании результатов других авторов в тексте книги обязательно дается ссылка на источник данных, который приведен в списке литературы

Многие исследователи, занимавшиеся изучением гидродинамических задач, замечали, что после завершения решения частной проблемы объем информации, с которым необходимо было ознакомиться, заведомо превышает объем необходимый для решения стоявших перед ними проблем. А объем информации, полученной во время работы над проблемой, также значительно превосходит как качественно, так и количественно ту информацию, которая была

необходима или ожидаема для дальнейших научных исследований или технических приложений.

Как правило, однажды выполнив ряд исследований по механике жидкости, исследователь еще не раз возвратится к проблемам этой области знаний в течение своей творческой жизни. И в итоге он осознает, что с течением, и именно с течением непрерывной среды, связана огромная часть всей культуры человечества. Возможно в этом заключается прелесть гидродинамики, которая не отпускает исследователя и время от времени заставляет его возвращаться к задачам, которыми он был очарован ранее.

Поэтому автору данной монографии трудно было удержаться от краткого исторического экскурса во введении, впрочем, настолько краткого, что это даже не исторический экскурс, а эмоциональное введение в дальнейшее изложение.

Автор убежден, что без эмоционального переживания явление творчества, и в частности процесс исследования, невозможен. Поэтому в монографии появились эпиграфы, с помощью которых автор попытался придать эмоциональную окраску излагаемому материалу.

Во введении автор представил взгляд на взаимосвязь гидродинамики с мировоззрением и процессами в развитии цивилизации.

Далее в главе 1 проводится геометрическая классификация соосных конических каналов и приведены гидродинамические уравнения, на основании которых будут в следующих главах решены задачи ламинарных течений в классифицированных каналах.

Дальнейший материал монографии может быть сгруппирован различными способами: по геометрической классификации каналов, по методам физического или геометрического приближения. Явно группирование материала в монографии не проводится, но порядок его изложения вполне соответствует вышеперечисленным признакам.

В главах со второй по восемнадцатую включительно рассматриваются стабилизированные диффузорные и конфузорные ламинарные течения в соосных конических каналах с различной степе-

нью учета влияния кривизны границ каналов на распределение скорости жидкости. Здесь получены выражения для вычисления перепада давления и эпюр скоростей во всех рассмотренных случаях течений.

В главах 2, 3 и 8 рассматриваются ламинарные течения в соосных конических каналах, образованных границами с общей вершиной. Решение в этих главах получено в сферической системе координат.

В главах 4, 5 и 9 рассмотрено течение в соосных конических каналах постоянной ширины в биконической системе координат. Течения в канала переменной ширины, но без общей вершины их границ рассмотрены в главах 6, 10 и 12 также в биконической системе координат. В главах 6, 11 и 13 исследованы ламинарные течения в соосных конических каналах, но с общей вершиной их границ в биконических координатах.

В главе 9 изложена общая методика определения мощности, необходимой для поддержания заданного расхода в соосных конических каналах.

В главах с 14 по 18 решены задачи ламинарного течения в соосных конических каналах в приближении, не учитывающем кривизны границ канала. Показано, что такое течение может быть реализовано в секториальных каналах.

В главах 19 и 20 рассмотрено пространственно не установившееся течение в соосных конических и их аппроксимирующих секториальных каналах. Здесь найдены координаты стабилизации течения и определены длины начальных гидродинамических участков для диффузорных течений в соосных конических и секториальных каналах. Для этих течений определены также и входовые поправки давления.

В главе 20 показано, что если перед входом в соосный конический диффузор имеется участок течения в соосном цилиндрическом канале, то при расчете перепада давления в соосном коническом канале входовой поправкой давления можно пренебречь в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

В главе 21 рассматриваются диффузорные и конфузорные течения в соосных конических каналах с учетом влияния кривизны границ каналов на поперечное распределение скорости жидкости. Здесь же показано, что вычисление давления при ламинарном течении в соосных конических каналах с помощью выражений, полученных в моделях с частичным учетом влияния кривизны границ на распределение скорости жидкости в главах 4 – 13 хорошо согласуется с результатами, полученными при более детальном учете такого влияния.

В заключении приведена систематизация полученных в монографии решений и намечены пути дальнейших исследований ламинарных течений в соосных конических каналах.

В монографии представлено достаточно много решений задач ламинарного течения в соосных конических каналах. Все выражения для расчета перепада давлений и распределения скоростей собраны в приложении, где они представлены в размерном виде.

Каждое приведенное в данной монографии решение хорошо визуализировано, а это позволяет инженеру-технологу или конструктору получить качественную информацию об интересующем его течении без детального изучения постановки и математического решения соответствующей задачи, а придя к новому техническому решению, он быстро рассчитает параметры течения, воспользовавшись приложением.

Заинтересованный же читатель найдет в монографии математическую постановку интересующей его задачи, ее решение и подробный анализ этого решения.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Зависит от желания, какие знаки для изображений числа употреблять надо.

Л. Эйлер

В двух томах данной монографии рассматривается несколько сот различных физических и геометрических величин, характеризующих как ламинарные течения в соосных конических и других каналах, так и сами эти каналы. Поэтому неизбежно использование одинаковых букв для обозначения различных параметров. Но при этом автор стремился сохранить традиционные обозначения, следовать некоторой системе в их выборе и выборе обозначений для верхних и нижних индексов.

Для величин, которые используются редко, 1 – 2 раза, автор приводит расшифровку их идентификаторов непосредственно до или после выражений, в которых они использованы.

Список принятых обозначений

Для идентификаторов начинающихся с латинских букв

b – угловой коэффициент в зависимости ширины канала от продольной координаты;

b_B – значение параметра b, начиная с котрого течение в секториальном конфузоре переменной ширины происходит в сторону увеличения давления при постоянном числе Рейнольдса;

b_D – значение параметра b при котором давление на выходе из соосного конического конфузора определяется только диссипативной силой;

b_v – значение параметра b, начиная с которого зависимость средней по поперечному сечению канала скорости в соосном коническом конфузоре будет немонотонной;

b_s – значение параметра b, начиная с которого появляется экстремальное значение в распределении скорости сдвига на границах соосного конического конфузора переменной ширины;

b_{s1} – максимальное значение параметра b, при котором возможна немонотонная зависимость безразмерной скорости сдвига на границе соосного конического диффузора переменной ширины;

$b_{s2} = b_{\bar{v}2}$;

b_{s3} – значение параметра b, при котором минимум модуля скорости сдвига на границе соосного конического диффузора переменной ширины локализуется вблизи входа в канал;

$b_{\bar{v}1}$ – значение параметра b при котором появляется минимум средней скорости в канале;

$b_{\bar{v}2}$ – минимально возможное значение параметра b в соосном коническом диффузоре;

$b_{\bar{v}3}$ – значение параметра b при котором минимум средней скорости локализуется на входе в канал;

b_{s1}^f – значение параметра b при котором зависимость скорости сдвига на границе секториального диффузора переменной ширины вдоль течения становится немонотонной;

b_{s3}^f – значение параметра b, при котором минимум модуля скорости сдвига на границе секториального диффузора переменной ширины локализуется вблизи входа в канал;

$b_{\bar{v}1}^f$ – значение параметра b при котором появляется минимум средней скорости в секториальном диффузоре;

$b_{\bar{v}3}^f$ – значение параметра b при котором минимум средней скорости локализуется вблизи входа в секториальный диффузор;

$b_{\Pi'}$ – значение параметра b начиная с которого зависимость градиента давления в секториальном конфузоре становится немонотонной при его вычислении без учета характерной инерционной силы;

$d_э$ – эквивалентный гидравлический диаметр, м;

$\tilde{d}_э$ – безразмерный эквивалентный гидравлический диаметр;

H_i – коэффициенты Ламе;

h – ширина канала, м;

$\tilde{h}$ – безразмерная ширина соосного конического канала;

$\vec{i}_R, \vec{i}_X, \vec{i}_\varphi$ – орты биконической системы координат;

k – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

L – длина образующей канала, м;

$N(Q)$ – мощность, необходимая для обеспечения заданного расхода в соосном коническом канале, Вт;

P – давление, Па;

p – независимая переменная в изображении Лапласа – Карсона;

$\bar{P}$ – среднее по площади поверхности поперечного сечения канала давление, Па;

P_0 – давление на входе в канал, Па;

$P_2(\tau)$– сферическая функция Лежандра, первого рода и второго порядка;

$Per(R)$ – величина смачиваемого периметра канала, м;

Q – объемный расход жидкости, м^3/с;

$Q_2(\tau)$ – сферическая функция Лежандра, второго рода и второго порядка;

Q_e – значение расхода жидкости, при котором достигается максимальный перепад давления в соосном коническом канале, м^3/с;

$Q_{\Delta\bar{P}}$ – значение расхода жидкости при котором достигается максимальный перепад давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ, м^3/с;

$Q^*_{\Delta\bar{P}}$ – значение расхода жидкости при котором перепад давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ, равен 0, м^3/с;

q_i – обобщенные координаты;

R – радиальная координата в сферической и биконической системах координат;

R_0, R_1 – радиальные координаты входа в канал и выхода из него в случае диффузорного течения (для конфузорного течения наоборот), м;

R_{max} – возможное наибольшее значение радиальной координаты в соосном коническом диффузоре, образованном границами, открытыми навстечу друг другу, м;

$R_{\text{н.г}}$ – размерная радиальная координата стабилизации течения, м;

$\tilde{r}_0$ – безразмерный радиус кривизны внешней поверхности соосного конического диффузора (глава 21);

$\tilde{r}_{00}$ – безразмерный радиус кривизны внешней поверхности соосного конического диффузора на его входе (глава 21);

$\tilde{r}_1$ – безразмерный радиус кривизны внутренней поверхности соосного конического диффузора (глава 21);

$\tilde{r}_{01}$ – безразмерный радиус кривизны внутренней поверхности соосного конического диффузора на его входе (глава 21);

$\tilde{r}'_0$ – безразмерный радиус кривизны внешней поверхности соосного конического конфузора (глава 21);

$\tilde{r}'_{00}$ – безразмерный радиус кривизны внешней поверхности соосного конического конфузора на его входе (глава 21);

$\tilde{r}'_1$ – безразмерный радиус кривизны внутренней поверхности соосного конического конфузора (глава 21);

$\tilde{r}'_{01}$ – безразмерный радиус кривизны внутренней поверхности соосного конического конфузора на его входе (глава 21);

$\tilde{r}_e$ – безразмерный радиус кривизны внешней поверхности соосного конического канала;

$\tilde{r}_{i1}$ – безразмерный радиус кривизны внутренней поверхности соосного конического канала при $b > 0$;

$\tilde{r}_{i2}$ – безразмерный радиус кривизны внутренней поверхности соосного конического канала при $b < 0$;

$\tilde{r}_{we}$ – безразмерный радиус кривизны смоченного периметра внешней поверхности канала;

$\tilde{r}_{wij}$ – безразмерный радиус кривизны смоченного периметра внутренней поверхности канала;

S – площадь поверхности поперечного сечения канала, м^2;

S_0, S_1 – площадь поверхности поперечного сечения канала на радиальной координате R_0 и R_1, соответственно, м^2;

S_b – площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной, вычисленная в биконических координатах, м^2;

S_c – площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной, вычисленная в сферических координатах, м^2;

S_f – площадь поверхности поперечного сечения секториального канала, м^2;

$S_б$ – площадь боковой поверхности канала, м^2;

S_{0b} - площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной на входе в канал, вычисленная в биконических координатах, м^2;

S_{0c} - площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной на входе в канал, вычисленная в сферических координатах, м^2;

$\tilde{s}_{com}$ – относительная площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной, вычисленная в биконических координатах;

s – безразмерная площадь поверхности поперечного сечения канала;

$\tilde{s}$ – относительная площадь поверхности поперечного сечения канала;

$\tilde{s}_f$ – относительная площадь поверхности поперечного сечения секториальнаго канала;

$T = R_1 - R$ – обращенная радиальная координата (для конфузорного течения), м;

t – безразмерная обращенная радиальная координата (для конфузорного течения);

t_m - безразмерная продольная биконическая координата в соосном коническом конфузоре, на которой локализуется максимальное значение площади поверхности поперечного сечения;

$t_{\max}$ – наибольшее возможное значение безразмерной продольной координаты для конических соосных конфузоров постоянной ширины;

$t_{s\min}$ – безразмерная координата локализации минимального значения модуля безразмерной скорости сдвига на границах канала при ламинарном течении жидкости в соосном коническом конфузоре переменной ширины;

$t_{\bar{v}\min}$ – безразмерная координата локализации минимального значения средней по поперечному сечению канала скорости жидкости при ее течении в соосном коническом конфузоре переменной ширины;

$t_{\Pi\max}$ – безразмерная координата локализации максимального безразмерного давления при ламинарном течении жидкости в секториальном конфузоре переменной ширины;

$t'_{\Pi'}$ – безразмерная координата локализации максимума градиента давления при ползущем течении в соосном коническом конфузоре;

U – средняя по площади поверхности поперечного сечения секториального диффузора скорость (глава 19), м/с;

V – скорость жидкости, м/с;

V_0 – скорость жидкости средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал, м/с;

$\bar{V}$ – средняя по площади поверхности поперечного сечения канала скорость, м/с;

V_{0b} – скорость жидкости средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в соосный конический диффузор, вычисленная в биконических координатах, м/с;

V_{0c} – скорость жидкости средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в соосный конический диффузор, вычисленная в сферических координатах, м/с;

V_{f0} – скорость жидкости средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в секториальный диффузор, м/с;

V_{fc0} – скорость жидкости средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в секториальный конфузор, м/с;

$\overline{V}_{fc}$ – средняя скорость по площади поверхности поперечного сечения секториального конфузора переменной ширины, м/с;

$V_0^* = \dfrac{Q}{\pi h^2}$ – масштаб скорости не зависящий от полуугла раскрытия граничных поверхностей (4.39), м/с;

υ – безразмерная скорость жидкости;

υ_{com} – безразмерная скорость в соосном коническом канале с общей вершиной границ, вычисленная в биконических координатах;

$\overline{\upsilon}$ – безразмерная средняя по площади поверхности поперечного сечения канала скорость жидкости;

$\overline{\upsilon}_{com}$ – безразмерная средняя по площади поверхности поперечного сечения скорость в соосном коническом канале с общей вершиной границ, вычисленная в биконических координатах;

$\overline{\upsilon}_f$ – безразмерная средняя по площади поверхности поперечного сечения скорость жидкости в секториальном канале;

$\overline{\upsilon}_{fc}$ – безразмернаясредняя скорость по площади поверхности поперечного сечения секториального конфузора переменной ширины, м/с;

$\overline{\upsilon}_f^*$ – безразмерная средняя по площади поверхности поперечного сечения скорость жидкости в секториальном канале, определенная в масштабе скорости не зависящем от полуугла раскрытия соосного конического канала (4.39);

υ_f^* – безразмерная скорость жидкости в секториальном канале, определенная в масштабе скорости не зависящем от полуугла раскрытия соосного конического канала (4.39);

$\upsilon_{\max}$ – максимальное в поперечном сечении канала значение безразмерной скорости;

$\overline{\upsilon}_{\xi\infty i}$ – безразмерная средняя по площади поперечно сечения скорость при которой динамическая составляющая давления в ламинарном тече-

нии в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ достигает 99 % своего значения на бесконечности;

$\overline{v}_{\xi\infty fr}$ – безразмерная средняя по площади поперечно сечения скорость при которой диссипативная составляющая давления в ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ достигает 99 % своего значения на бесконечности;

v^* – безразмерная скорость жидкости, определенная в масштабе V_0^*;

$\tilde{v}$ – изображение Лапласа – Карсона для безразмерной скорости жидкости в секториальном диффузоре постоянной ширины;

X, Y, Z – декартовы координаты, м;

Для идентификаторов начинающихся с греческих букв

α –половина угла раскрытия внешней границы соосного конического канала, рад (град);

α_1 – половина угла раскрытия внутренней границы соосного конического канала переменной ширины, рад (град);

$\alpha_{\min}$ – значение полуугла раскрытия границ соосного конического диффузора постоянной ширины при котором достигается минимальное значение перепада давления в аппроксимирующем секториальном канале;

β – постоянная разделения;

X – поперечная биконическая координата, м;

χ – безразмерная поперечная биконическая координата;

χ' – безразмерная поперечная координата, определяемая преобразованием, переводещем трапецию в прямоугольник (6.80), (7.77), (12.43);

χ_m – безразмерная координата локализации серединной поверхности соосного конического канала;

χ_{max} – безразмерная координата локализации максимального в поперечном сечении безразмерной скорости при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре;

δ_1, δ_2 – ширина конической щели на концевых срезах соосного конического канала, м;

$\dot{\gamma}_\Gamma$ – безразмерная скорость сдвига на границах канала;

$\dot{\gamma}_{b\Gamma}$ – безразмерная скорость сдвига на границах канала, вычисленная в биконических координатах;

$\dot{\gamma}_{f\Gamma}$ – модуль безразмерной скорости сдвига на границе секториального канала;

$\dot{\gamma}_{s\Gamma i}$ – безразмерная скорость сдвига на границе соосного конического диффузора с общей вершиной границ;

$\dot{\gamma}\big|_{\Gamma i}$ – модуль безразмерной скорости сдвига на границе соосного конического канала постоянной ширины;

ε_{ik} – тензор скоростей деформации, $с^{-1}$;

ε – относительное отклонение;

ε_D – относительное отклонение безразмерного давления, вычисленного с учетом характерной инерционной силы от его динамической составляющей;

ε_F – относительное отклонение безразмерного давления, вычисленного с учетом характерной инерционной силы от его диссипативной составляющей;

ε_g – относительное отклонение безразмерного давления в ламинарном диффузорном течении в соосном конически канале, вычисленного в биконических координатах от безразмерного давления, вычисленного в сферических координатах;

ε_R – отношение радиусов кривизны внешней и внутренней поверхностей соосного конического диффузора;

ε_r – отношение радиусов кривизны внешней и внутренней поверхностей соосного конического диффузора переменной ширины (глава 21);

εs – относительное отклонение площадей поверхностей поперечного сечения соосного конического диффузора, вычисленных в биконических и сферических координатах;

ε_{SP} – относительное отклонение площади поверхности поперечного сечения, определенной в аппроксимирующем секториальном конфузоре от площади поверхности поперечного сечения, определенной в соосном коническом конфузоре;

ε_s – относительное отклонение площади поверхности поперечного сечения, определенной в аппроксимирующем секториальном диффузоре от площади поверхности поперечного сечения, определенной в соосном коническом диффузоре;

ε_v – относительное среднеквадратичное отклонение распределения скорости поперек течения. рассчитанного в модели с частичным учетом влияния кривизны на распределение параметров течения от поперечного распределения скорости, рассчитанного с учетом влияния кривизны границ;

$\varepsilon_{\bar{v}b}$ – относительное отклонение средней по площади поверхности поперечного сечения скорости в секториальном канале от средней по поперечному сечению канала скорости в исходном соосном коническом канале;

θ – азимутальная координата в сферической системе координат, рад;

θ_1, θ_2 – полууглы раскрытия внутренней и внешней границы соосного конического канала с общей вершиной границ, рад (град);

λ – постоянная разделения, введенная при анализе диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ;

λc – постоянная разделения, введенная при анализе конфузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ;

μ – коэффициент динамической вязкости, Па·с;

ν – порядок сферических функций Лежандра;

ν_k – корни характеристического уравнения для определения нулей в знаменателе изображения скорости;

τ_{rz} – касательное напряжение на границе секториального канала, Па;

τ_{RZ} – касательное напряжение на границе соосного конического канала, Па;

ξ – безразмерная радиальная координата в сферической и беконической системы координат;

ξ' – безразмерная продольная координата, определяемая преобразованием (6.80), в главе 21 также значение безразмерной координате, начиная с которой можно пренебречь различием кривизны между внутренней и внешней коническими поверхностями соосного конического диффузора;

$\xi_{0\min}$ – минимальная безразмерная координата входа в соосный конический диффузор;

ξ_{dpm} – безразмерная координата локализации экстремального значения градиента давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре переменной ширины;

$\xi_{d\Pi\max}$ – безразмерная координата локализации максимального градиента давления;

ξ_e – безразмерная радиальная координата на которой радиусы кривизны поверхностей ограничивающих соосный конический канал равны;

$\xi_{\max}$ – максимальное значение безразмерной координаты соосного конического диффузора;

$\xi_{\bar{v}\min}$ – безразмерная координата локализации минимального значения средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости;

ξ_{shm} – безразмерная координата локализации минимального значения модуля безразмерной скорости сдвига на границах соосного конического диффузора переменной ширины;

ξ_{shm}^{f} – безразмерная координата локализации минимального значения модуля безразмерной скорости сдвига на границах секториального диффузора переменной ширины;

ξ_{Se} – безразмерная координата, на которой площади поверхностей поперечного сечения соосного конического и его аппроксимирующего секториального каналов будут равны;

$\xi_{\bar{\Pi}\max}$ – безразмерная радиальная координата локализации максимального значения безразмерного давления в соосном коническом канале с общей вершиной границ;

$\xi_{\Pi max}$ – безразмерная радиальная координата локализации максимального значения безразмерного давления в соосном коническом канале;

$\xi_{\Pi' ex}$ – безразмерная радиальная координата локализация экстремального значения градиента среднего безразмерного давления;

$\xi_{\Pi' \max}$ – безразмерная координата локализации минимального градиента давления при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом диффузоре постоянной ширины;

$\xi_{\Pi' \min}$ – безразмерная координата локализации минимального значения градиента давления;

$\xi_{\Pi din\infty}$ – безразмерная радиальная координата на которой инерционная составляющая безразмерного давления достигает 99 % своей максимальной величины;

ξ_1^* – безразмерная координата выхода из соосного конического диффузора при которой локализация $\bar{v}$ наблюдается у входа в канала для $b = b_{\bar{v}2}$;

ξ_1^{**} – безразмерная координата выхода из соосного конического диффузора при которой локализация модуля скорости сдвига на границе канала наблюдается у входа в канала для $b = b_{s2}$;

ξ_{dm}^b, ξ_{dm}^S – безразмерная координата локализации минимального значения безразмерного градиента давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ, вычисленная в биконических и сферических координатах;

$\xi_{\Pi m}^b$, $\xi_{\Pi m}^S$ – безразмерная координата локализации максимального значения безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с

общей вершиной границ, вычисленная в биконических и сферических координатах;

$\xi_{н.г}$ – безразмерная координата стабилизации течения;

ξ_∞ – безразмерная радиальная координата, на которой безразмерное давление с заданной точностью достигает величины безразмерного давления на бесконечности;

Π – безразмерное давление;

$\bar{\Pi}$ – среднее по площади поверхности поперечного сечения канала безразмерное давление;

$\Pi_{а1}$, $\Pi_{а2}$, $\Pi_{а3}$ – безразмерные давления в соосном коническом диффузоре, вычисленные по различным приближенным выражениям;

Π_{com}, Π_{com}^{S} – безразмерное давление в соосном коническом диффузоре, вычисленное в биконических координатах;

Π_{din} – динамическая составляющая безразмерного давления;

Π_{dis} – диссипативная составляющая безразмерного давления;

$\bar{\Pi}_{din}$ – динамическая составляющая среднего по площади поверхности поперечного сечения канала безразмерного давления;

$\bar{\Pi}_{dis}$ – диссипативная составляющая среднего по площади поверхности поперечного сечения канала безразмерного давления;

Π_{ent} – безразмерная величина поправки на входовые эффекты;

Π_{entcd} – безразмерная величина поправки на входовые эффекты в соосном коническом диффузоре;

$\bar{\Pi}_{\xi}$ – градиент безразмерного давления при ламинарном течении в соосном коническом канале, образованном границами с общей вершиной;

Π^* – безразмерное давление, определенное в масштабе скорости V_0^* (4.39);

Π_f – безразмерное давление, определенное для ламинарного течения в секториальном канале;

$П_{fdin}$ – динамическая составляющая безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре;

$П_{fdis}$ – диссипативная составляющая безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре;

$П_{fc}$ – безразмерное давление, определенное для ламинарного течения в секториальном конфузоре постоянной ширины с учетом характерной инерционной силы;

$П_{fcdin}$ – динамическая составляющая безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном конфузоре;

$П_{fcdis}$ – диссипативная составляющая безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном конфузоре;

$П_c^*$ – безразмерное давление, определенное для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре переменной ширины в масштабе скорости V_0^* (4.39);

$П_c^+$ – безразмерное давление, определенное для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре переменной ширины с учетом характерной инерционной силы и в масштабе скорости V_0^* (4.39);

$П_f^*$ – безразмерное давление, определенное для ламинарного течения в секториальном канале в масштабе скорости V_0^* (4.39);

$П_f^+$ – безразмерное давление, определенное для ламинарного течения в секториальном диффузоре переменной ширины с учетом характерной инерционной силы и в масштабе скорости V_0^* (4.39);

$П^{Sb}$ – безразмерное давление, вычисленное в сферических координатах и представленное в масштабе скорости, принятом при решении задачи в биконической системе координат;

$П_{ст}$ – безразмерное давление на стабилизированном участке течения, вычисленное без учета развития течения на начальном гидродинамическом участке;

ρ – плотность жидкости, кг/м^3;

ρ_1, ρ_2 – безразмерные радиусы элементов распределительного участка формующей головки;

$\sigma = \xi \sin\alpha - \chi \cos\alpha$;

$\sigma' = (\xi_1 - t)\sin\alpha - \chi\cos\alpha$

$\tau = \cos\theta$;

φ – аксиальная биконическая координата (в главах 14 – 20 угол раскрытия секторной поверхности секториального канала), рад;

$\Omega = R\sin\alpha - X\cos\alpha$;

$\Omega' = (R_1 - T)\sin\alpha - \chi\cos\alpha$;

$\omega(\chi)$ – несимметричное относительно серединной поверхности канала начальное распределение безразмерной скорости;

$\Psi_n(\chi)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля;

$\|\Psi_n\|^2$ – квадрат нормы собственных функций;

ΔP – перепад давления, Па;

ΔP_{ent} – размерная величина входовой поправки давления, Па;

$\Delta P_{\max}$ – максимальный перепад давления при ламинарном течении в соосном коническом канале, Па;

$\Delta P_{\max f}$ – максимальный перепад давления при ламинарном течении в секториальном канале, Па;

ΔP_{fr} – изменение давления вдоль течения, вызванное трением жидкости о стенки канала, Па;

ΔP_{dy} – изменение динамического напора вдоль течения, Па;

$\Delta P(Q)$ – расходно-напорная характеристика;

ΔT_{rheol} – интервал температуры, на котором происходит существенное изменение вязкости жидкости, К;

$\Delta\xi_{\text{н.г}}$ – безразмерная длина начального гидродинамического участка;

Безразмерные критерии

$\Lambda = \dfrac{h}{4r_0}$;

$\mathrm{Gn} = \dfrac{\mu V_0^2}{k\Delta T_{rheol}}$ – число Наме–Гриффита;

$\mathrm{Ei}^*(x)$ – интегральная показательная функция;

$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho V_0 h}{\mu}$ – число Рейнольдса;

$\mathrm{Re}_f = \dfrac{\rho V_{f0} h}{\mu}$ – число Рейнольдса, определенное для течения в секториальном диффузоре;

$\mathrm{Re}_{fc} = \dfrac{\rho V_{fc0} h}{\mu}$ – число Рейнольдса, определенное для течения в секториальном конфузоре;

$\mathrm{Re}^* = \dfrac{\rho Q}{\mu \pi h}$ – число Рейнольдса, определенное в масштабе скорости V_0^*;

$\boldsymbol{R} = \dfrac{\rho h Q}{8\pi\mu r_0^2 \sin\alpha}$ – параметр, определяющий аналог числа Рейнольдса в главе 19;

Re_S^b – число Рейнольдса определенное в сферических координатах и пересчитанное в масштабе скорости, аринятом при решении задачи в биконических координатах;

Re^{**} – значение числа Рейнольда вплоть до которого можно при расчете давления в ламинарном диффузорном течении пренебрегать характерной инерционной силой;

Re_{I0} – число Рейнольдса начиная с которого в ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ преобладающими становятся инерционные силы;

Re_{I1} – число Рейнольдса при котором течение в пределах всего соосного конического диффузора с общей вершиной границ происходит в сторону увеличения давления;

$\mathrm{Re}_{\max}$ – число Рейнольдса для которого наблюдается максимальный перепад давления;

Re_S – число Рейнольдса, определенное для диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ;

$\mathrm{Re}_{\Pi' ex}$ – число Рейнольдса, начиная с которого зависимость градиента безразмерного давления в канале становится немонотонной;

$\mathrm{Re}_{\Pi' de}$ – число Рейнольдса, начиная с которого распределение градиента давления в пределах соосного конического диффузора становится монотонно убывающей функцией;

$\mathrm{Re}_{\Pi i}$ – число Рейнольдса, начиная с которого распределение давления в пределах соосного конического диффузора становится монотонно растущей функцией;

$\mathrm{Re}_{\Pi\max}$ – число Рейнольдса, начиная с которого в ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале начинает преобладать характерная инерционная сила;

$\mathrm{Re}_{\Pi'\min}$ – число Рейнольдса, начиная с которого распределение градиента давления в пределах соосного конического диффузора становится немонотонным;

Re_1 – число Рейнольдса, определенное для течения в соосном коническом конфузоре (в главе 12 это критическое значение Re вплоть до которого можно пренебрегать характерной инерционной силой при расчете давления в ламинарном конфузорном течении в канале переменной ширины);

Re_1^* – критическое значение Re начиная с которого можно пренебрегать характерной диссипативной при расчете давления в ламинарном конфузорном течении в канале переменной ширины;

Re^u, Re_S^u – значение числа Рейнольдса при котором безразмерное давление на бесконечности будет равно 0, вычисленное в биконических и в сферических координатах;

Re^{*} – число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать характерной инерционной силой при ламинарном течении в секториальном диффузоре переменной ширины;

Re^{*}_{u} – число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать характерной инерционной силой при расчете перепада давления вблизи выхода из секториальнного диффузора с уменьшающейся вдоль течения шириной;

Re^{*}_{un} – число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать характерной инерционной силой при расчете перепада давления в бесконечно длинном секториальном диффузоре переменной ширины;

Re^{*}_{b} – число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать характерной инерционной силой при расчете перепада давления вблизи входа в секториальный диффузор переменной ширины, при $b > 0$;

Re^{0} – значение числа Рейнольдса, начиная с которого можно пренебречь диссипативной составляющей давления при его расчете в ламинарном течении в соосном коническом канале с относительной точностью 5 %;

$\mathrm{Re}^{**}_{2\xi_0}$ – число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать инерционной составляющей безразмерного давления ламинарного диффузорного течения на входе соосного конического канала с общей вершиной границ при его вычислении в биконических координатах;

$\mathrm{Re}^{**}_{2\xi_1}$ – число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать инерционной составляющей безразмерного давления ламинарного диффузорного течения на выходе из соосного конического канала с общей вершиной границ при его вычислении в биконических координатах;

$\mathrm{Re}^{b'}$, $\mathrm{Re}^{S'}$ величина числа Рейнольдса, вычисленная в биконической и в сферической системах координат, начиная с которой возникает ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале с общей вершиной границ в сторону увеличения давления;

Re_{fB} – число Рейнольдса, начиняя с которого жидкость будет течь в секториальном конфузоре с заданными геометрическими параметрами в сторону увеличения давления;

Re' – значение числа Рейнольдса, начиная с которого жидкость в соосном коническом конфузоре переменной ширины течет в сторону увеличения давления;

Re^0 – число Рейнольдса при котором перепад давления в бесконечно длинном секториальном диффузоре с растущей вдоль течения шириной равен нулю;

Re_c^{*+} – значение числа Рейнольдса, вычисленное в масштабе скорости (4.39), вплоть до которого можно не учитывать при расчете давления в соосном коническом диффузоре переменной ширины динамическую его составляющую;

Re_f^{*+} – значение числа Рейнольдса, вычисленное в масштабе скорости (4.39), вплоть до которого можно не учитывать при расчете давления в секториальном диффузоре переменной ширины динамическую его составляющую;

Re_{fc}^{*} – значение числа Рейнольдса, вплоть до которого можно не учитывать при расчете давления в соосном коническом диффузоре переменной ширины динамическую его составляющую;

Re_{fcD}^{*} – значение числа Рейнольдса, вплоть до которого можно не учитывать при расчете давления в соосном коническом диффузоре переменной ширины диссипативную его составляющую;

ВВЕДЕНИЕ

Засучи мне, Господи, рукава!
Подари мне посох на верный путь!

А. Башлачев

Зарождение и развитие науки о течении жидкостей

Я думаю – ученые наврали, –
Прокол у них в теории, порез:
Развитие идет не по спирали;
А вкривь и вкось, в разнос, наперерез.

В. Высоцкий

Трудно переоценить значение течений различных веществ в жизни человека. Еще до своего рождения он ощущает потоки физиологических жидкостей в утробе матери, а после рождения вся жизнь человека проходит в разнообразных течениях. Прежде всего, среда его обитания обладает текучестью. Жизнедеятельность организма обеспечивают различные физиологические потоки. И в моменты наслаждения, и во время трагедий, вызванных природными катаклизмами, человеку сопутствуют течения жидкостей. Самые большие несчастья и страдания вызывают природные явления, так или иначе связанные с течением. Это извержения вулканов, ураганы и штормы, цунами и смерчи.

В эпосе почти всех народов есть сказания о страшных наводнениях, которые, по-видимому, отразились в библейском сказании о всемирном потопе, ниспосланном человеку в наказание. Да и вся история развития человечества показывает, что вода и ее течения играют в жизни человеческого общества огромное значение. Вода является и источником, и Каином жизни человека.

Тесное соприкосновение человека и течений не могло не сублимироваться в его интеллектуальной деятельности. Даже само слово «течение» уже давно используется не только в связи с движением некоторой материальной субстанции, веществом, но и применяется к совершенно абстрагированным от материи понятиям и категориям. Говорят о течении времени, мысли, течениях музыки и души, о политических течениях, о течении болезней и вообще о течении человеческой жизни. Удивительно, но даже моменты и вопросы могут быть текущими, а у великих поэтов текут стихи.

Существует множество аллегорий и аналогий, связанных со свойствами течений, как в современной жизни, так и в дошедших до нас мифах и преданиях. По-видимому, одной из старейших аллегорий на эту тему является фраза пророчицы Деборы, жившей в период судей – (XII век до Р.Х.). В ее высказывании «Перед Богом текут даже горы» видится и величие бога, и то, что все тела обладают текучестью, а также идея временного масштаба: горы текут по временной шкале бога, а не человека. И именно вследствие этого в современной реологии, да и пожалуй во всем естествознании, эта фраза стала классическим определением числа Деборы – безразмерной величины, которая вычисляется как отношение времени протекания процесса ко времени его наблюдения или к характерному времени существования другого процесса, на фоне которого происходит первый.

В V веке до Р.Х. Гераклит Эфесский, представитель ионийской философской школы, аллегорическими выражениями высказал идею непрерывного изменения и становления– «все течет» и «в одну реку нельзя войти дважды».

С развитием человеческой цивилизации росла и ее численность. И поскольку первые поселения и первая государственность появилась вдоль течения крупных рек, увеличение численности человечества происходило вместе с увеличением площади плодородных земель, да и мощь государств в то время определялась количеством поливных земель. Появление ирригационных систем ставило задачи оптимального управления течением воды в кана-

лах. Хорошо известен исторический факт, что чрезмерное расширение ирригационной системы Двуречья привело к засаливанию некогда плодородных земель из-за невозможности обеспечить необходимым количеством воды созданную поливную систему. И именно это затем явилось одним из решающих факторов угасания существовавшей в этом регионе цивилизации.

Постепенно в процессе развития и обеспечения жизнедеятельности человеческого общества накапливались отдельные наблюдения, открывались определенные закономерности движения материи, которые затем обобщались и постепенно превращались в стройную систему знаний – науку. В русскоязычной литературе ее обычно называют гидромеханикой, а иногда гидродинамикой, хотя описываются в ней любые текучие среды, и, как правило, считается, что первое название принадлежит науке, охватывающей более широкий класс явлений, чем второе. Это произошло потому, что приставка гидро- в русском языке не ассоциируется исключительно с водой, а связана с образом любых жидких сред.

В англосаксонских языках данная наука, обычно, называется механикой сплошных сред или механикой жидкости. И в связи с расширением класса задач, решаемых механикой, в последнее время все три названия в русскоязычной литературе стали использоваться на равных условиях.

Первые систематические результаты в области гидромеханики были изложены в трудах греческого философа Аристотеля (IV век до Р.Х.). Дальнейшее развитие гидромеханики, как и всякой науки, было связано с потребностями практики. Отвечая запросам древних кораблестроителей, Архимед (III век до Р.Х.) сформулировал законы плавания и устойчивости плавающих тел.

Строительство каналов, плотин, шлюзов, фонтанов, увеличение морских перевозок, развитие мореплавания и судоходства в XV–XVII веках служило серьезным стимулом для развития гидромеханики. В это время большой вклад в науку внесли Леонардо да Винчи (XV–XVI века), Стевин и Галилей (XVI–VII века), Гюйгенс (XVII век). Исаак Ньютон (XVII–XVIII века) в своем труде «Матема-

тические начала натуральной философии» приводит теоретический вывод квадратичного закона сопротивления. Здесь же Ньютон высказал гипотезу, согласно которой сила внутреннего трения между частицами жидкости прямо пропорциональна относительной скорости этих частиц. В настоящее время жидкости, обладающие данным свойством при их течении, называются ньютоновскими жидкостями, а коэффициент пропорциональности между сдвиговыми напряжениями и скоростью деформации именуют вязкостью.

Особое значение имело открытие и обнародование Ньютоном основных законов и уравнений динамики, обобщение которых на текучие среды приводит в восемнадцатом веке к образованию самостоятельного раздела теоретической механики – гидродинамики. Основателями этой науки стали Леонард Эйлер и Даниил Бернулли (XVIII век). Сам термин «гидродинамика» впервые появился как название трактата, написанного Д. Бернулли.

Работу Эйлера и Бернулли по теории идеальной жидкости продолжили Даламбер (XVIII век), Лагранж (XVIII–XIX века) и Гельмгольц (XIX век).

Гидродинамика вязкой жидкости заложена в трудах Навье (1785–1836) и Стокса (1819–1903), который и вывел в окончательной форме уравнения пространственного движения вязкой жидкости, получившие наименование уравнений Навье-Стокса.

Стимулом к созданию и развитию механики вязкой жидкости стало стремительное развитие техники в XIX веке, необходимость расчета гидравлических и гидротехнических устройств. Основное значение при этом имело исследование сопротивления в трубах и каналах при течении в них вязких жидкостей. Теоретическое решение данной задачи было выполнено Стоксом в 1846 году и Стефаном в 1862 году. Экспериментальные исследования проведены Гагеном в XVIII веке и Ж. Пуазейлем в 1840–1842 годах.

Пренебрежение квадратичными членами инерции в уравнениях движения вязкой жидкости позволило Стоксу и целому ряду последующих исследователей найти теоретические решения многих задач, подтверждаемые опытом при малых скоростях движения

жидкости. Уравнения, использованные при этом, были впоследствии названы приближенными уравнениями Стокса.

Устойчивость ламинарного течения и переход его в турбулентное исследованы в восьмидесятых годах XIX века английским физиком О. Рейнольдсом, установившим критерий перехода, который и был назван его именем. Рейнольдсу принадлежит и первый вывод дифференциальных уравнений турбулентного течения.

Рейнольдсу также принадлежит заслуга создания теории смазки. Он, при рассмотрении течения в смазочном слое вполне обосновал возможность отбрасывания в уравнениях движения жидкости не только квадратичных членов инерции, но и большинства слагаемых от вязкости.

К концу XIX столетия наука о течении жидкости разделилась на две ветви, почти не связанные между собой. Одна из них к тому времени уже именовалась классической гидродинамикой и, основанная на уравнениях Эйлера, описывающих движение идеальной жидкости, достигла большого совершенства, но не давала ответы на конкретные технические задачи, которые ставила практика. Другая ветвь – это гидродинамика течения вязкой жидкости. К тому времени уже были известны уравнения Навье-Стокса, описывающие движение жидкости с учетом трения, но из-за больших математических трудностей их не удавалось применить для теоретического исследования течения вязких жидкостей.

В 1904 году Л. Прандтль в своем докладе «О движении жидкости при очень малом трении», сделанном на математической конференции в Гейдельберге [1], показал возможность исследования течений вязкой жидкости в практически важных случаях с помощью гипотезы о пограничном слое. Прандтль также обосновал гипотезу прилипания жидкости к стенке во время течения, что, совместно с уравнениями движения жидкости в пограничном слое, позволило решить основные задачи ламинарного течения несжимаемой среды. Эти задачи были поставлены развитием машиностроения, гидравлики, нефтепромысловой механики.

Через два десятилетия после создания основ теории пограничного слоя Л. Прандтль высказал идею о пути смешения для турбулентного течения, что позволило использовать методы теории пограничного слоя и для расчета турбулентного течения.

Одновременно с развитием методов пограничного слоя в начале XX века развивалось еще одно направление приближенного решения уравнений Навье-Стокса. Работы второго направления начались с исследований К.В. Озеена. Общее между работами этих двух направлений заключалось лишь в том, что квадратичные члены в уравнениях движения вязкой жидкости отбрасываются не полностью. В теории пограничного слоя эти члены учитываются полностью, но только в одном уравнении, а в исследованиях Озеена квадратичные члены учтены частично, но во всех уравнениях.

Вязкостные члены в уравнениях пограничного слоя учитываются аналогично тому, как они учитываются в смазочной аппроксимации Рейнольдса, поэтому теорию погранслоя можно считать естественным развитием смазочной аппроксимации. Аналогично метод Озеена можно считать естественным развитием метода Стокса.

Существенное же различие между этими двумя направлениями определяется величинами чисел Рейнольдса, для которых результаты исследований согласуются с результатами опытных данных. Результаты теории пограничного слоя находят подтверждение при весьма больших числах Рейнольдса, в то время как метод Озеена находит численное подтверждение лишь для малых значений чисел Рейнольдса.

Можно считать, что современный этап развития гидромеханики начинается с работ Прандтля и Озеена, т.е. с начала XX века. За это время механика сплошных сред, наравне с другими науками, получила существенное развитие. Огромные достижения получены как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях.

Без гидродинамики немыслимы современные технологии, невозможно развитие транспорта, энергетики и металлургии, таких наук, как астрофизика, биология, океанология, метеорология и экология.

Гидродинамические модели используются и в самых, на первый взгляд, неожиданных отраслях знаний: физической космоло-

гии, ядерной физике, физиологии животных и человека. Мы уже много знаем о строении атома, элементарных частиц и Вселенной в целом, но до сих пор не можем рассчитать перепад давления при течении жидкости в канале, подъемную силу крыла самолета или сопротивление ракеты, автомобиля и судна, исходя из первых принципов физики. Для этого мы используем гипотезу сплошности среды [2–4], предложенную еще в XVIII веке Д. Бернулли.

В наше время механика сплошных сред еще во многом является феноменологической наукой, в основании которой лежат эмпирические гипотезы, подтвержденные человеческим опытом – это гипотеза оплошности среды, гипотеза непрерывности пространства и гипотеза абсолютности времени [4].

Мы в своем исследовании ламинарных течений в соосных конических каналах также будем использовать эти идеи, не выходя за рамки общепринятых гипотез. Наряду с этим мы будем полагать, что рассматриваемая среда является однородной, изотропной и классической ньютоновской жидкостью [5].

Бурное развитие авиации, самолетостроения и ракетной техники, водного и автомобильного транспорта, подводного и надводного кораблестроения, строительство высотных зданий и создание мощных турбин стимулировало развитие в XX веке гидродинамики больших чисел Рейнольдса. Практически на протяжении всего века внимание большинства исследователей во всем мире было сосредоточено на гидродинамике больших скоростей.

И только в последние два - три десятилетия XX века вновь появился интерес исследователей, работающих в области гидродинамики, к ламинарным течениям. Это произошло вследствие увеличения производства полимеров, расширения их рецептур и номенклатуры полимерных изделий. Полимеры и изделия из них производятся и перерабатываются в расплавленном состоянии, а расплавы полимеров являются высоковязкими жидкостями, следовательно, их течение в проточных частях оборудования происходит при умеренных и малых числах Рейнольдса. Вновь возникший интерес к исследованию ламинарных течений не является чисто академическим, который и не исчезал, а имеет как научное, так и практическое значение. Совершенствование оборудования для производства полимерных изделий в настоящее время ставит задачи

ламинарного течения жидкости, которые еще не получили своего решения.

Более детально познакомиться с задачами, решаемыми в настоящее время в гидродинамике малых и пренебрежимо малых чисел Рейнольдса можно в работах [6 – 19].

В последней трети двадцатого века получила значительное развитие вычислительная техника, что привело к возникновению совершенно самостоятельной науки – вычислительной гидродинамики. В настоящее время вычислительная техника позволяет получать численные решения уравнений Навье-Стокса для ламинарного течения ньютоновской жидкости в каналах практически любой геометрии. Но в то же время, численные решения не дают ясной функциональной связи между параметрами течения, которую можно получить при аналитическом решении, пусть даже упрощенной модельной задачи.

Конструктору еще до изготовления оборудования важно знать, как оно будет работать, и в этом ему неоценимую помощь оказывают инженерные методы расчета. Инженерные методы расчета, созданные на основе аналитических решений задач гидродинамики, дают ясное представление о характеристиках течения, с их помощью можно быстро определить особенности течений в выбранной геометрии, и, как правило, они не требуют большой вычислительной мощности и специальной подготовки конструктора для их анализа. Немаловажно и то, что для задач, решаемых аналитически, стоимость такого решения намного меньше стоимости численного исследования. Кроме того, аналитические решения служат тестовыми задачами при создании и отладки численных моделей. Поэтому аналитические исследования течений вязкой жидкости являются одной из основных задач, стоящих перед специалистами, работающими в области гидромеханики и ее приложений.

Исследованию одной из таких проблем и посвящена данная монография, а именно, изучению ламинарного течения в соосных конических каналах.

Все конкретные результаты, относящиеся к этой проблеме и изложенные в монографии, получены лично ее автором. Значительная часть из них изложена в ранее опубликованных работах [20–49], хотя больша́я часть результатов, представленных в монографии, обнародована впервые.

ГЛАВА 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

Гидродинамики делятся на экспериментаторов, которые наблюдают то, что нельзя описать, и теоретиков, которые описывают то, что нельзя наблюдать.

Д. Биркгоф

1.1. Характерные области практического использования соосных конических каналов

Во-первых, обратить внимание на чрезвычайную эффективность математики в естественных науках, как на нечто загадочное, не поддающееся рациональному объяснению.

Е. Вигнер

Изучение ламинарных течений в каналах различной геометрии является одной из фундаментальных задач гидродинамики, так как на его основе проводится исследование ряда других проблем, возникающих при конструировании и расчете проточных частей промышленных аппаратов. К таким задачам относится и задача ламинарного течения вязких жидкостей в соосных конических каналах.

Возникает необходимость расчета ламинарных течений при расчете и проектировании машин и аппаратов в различных отраслях техники. Например, при проектировании объемных гидравлических устройств требуется производить расчет переходных соосных конических устройств и расчет конфузорного течения в соосных конических каналах, а также расчет кольцевых конических каналов в системах дроссельного регулирования гидромоторов [50–53].

Надежность авиационных двигателей во многом зависит от точности расчета их гидравлических систем, в которых также присутствуют конические соосные участки [54].

Наибольшее же распространение получили соосные конические каналы в машинах и аппаратах производства полимеров и изделий из них. Здесь же наблюдается наибольшее разнообразие таких каналов.

Практически все червячные машины имеют в своей компоновке соосные конические каналы, которые, как правило, принадлежат формирующим устройствам или устройствам сопряжения экструзионных головок с экструдером [7]. Например, при гранулировании термопластов погружным способом, устройство погружного гранулирования [55] сопрягается с экструдером соосным коническим каналом (рис. 1.1), в котором расплав термопласта продавливается между дорном (внутренняя стенка) и матрицей (внешней стенкой канала).

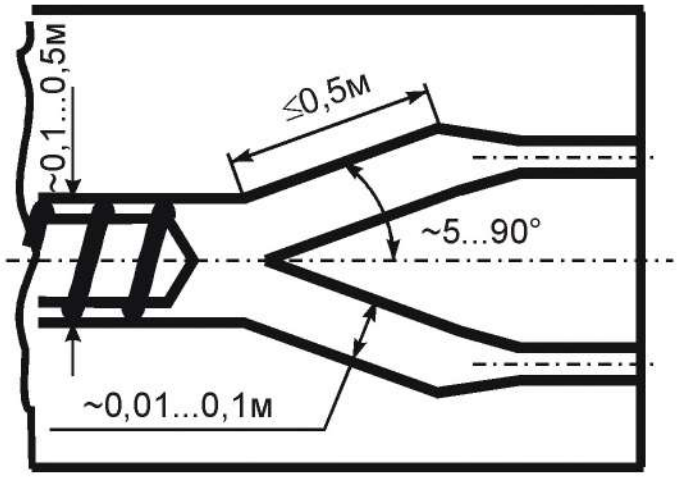


Рис. 1.1 Продольный разрез распределительного участка фильерной головки устройства подводного гранулирования термопластов

Практически все конструкции трубных экструзионных головок и головок для производства шлангов имеют конические соосные каналы [56]. Во многих трубных головках одновременно присутствуют соосные конические диффузоры и конфузоры [56, 57]. Соосные конические каналы имеют также и экструзионные головки для

раздувного формования [58] и головки для производства рукавной пленки и полимерных сеток [58]. Практически все современные конструкции экструзионных кабельных головок, будь то прямоточные, косоугольные и прямоугольные, головки трубного типа, головки давления и головки наложения многослойной изоляции имеют соосные конические каналы [59].

Многие механизмы пластикации и впрыска у литьевых машин имеют в своей конструкции соосные конические каналы, например, в машинах для многоцветного литья [60].

Перепад давления в соосном коническом канале может составлять значительную часть перепада давления всей экструзионной головки [59] и, следовательно, рабочей характеристики головки, а именно этой величиной определяется рабочая точка экструдера, а значит и его производительность [61].

Таким образом, изучение ламинарного течения в соосных конических каналах имеет не только академический и теоретический интерес, но также и большое практическое значение.

Результаты исследования ламинарного течения в соосных конических каналах также используются для решения задач теплопередачи в процессах переработки и синтеза полимерных материалов, что также представляет большой практический интерес, поскольку процессы теплообмена в ряде случаев становятся лимитирующими.

Примеры такого использования решения гидродинамических задач можно найти в публикациях автора данной монографии [62–78]. В этих работах исследован теплообмен в условиях, при которых свойства жидкости, текущей в каналах, можно считать постоянными. Но значение распределения скорости для изотермического ламинарного течения жидкости в каналах важно и при исследовании случаев существенно неизотермического течения высоковязких жидкостей [79–97].

При решении неизотермических задач такое распределение используется в качестве профиля скорости на входе в канал или начального распределения в численных методах исследования.

Решения, полученные для изотермических течений, используются также в качестве тестовых задач при создании численных методов.

Выяснив необходимость и значимость исследования ламинарных течений в соосных конических каналах, рассмотрим, какими же могут быть такие каналы, прежде всего для того, чтобы выбрать адаптированное к их геометрии математическое описание течения. Понятно, что разнообразие каналов, использующихся в промышленности, не исчерпывается геометрией, представленной на рисунке 1.1.

Автором выполнена классификация соосных конических каналов по геометрическим признакам в работе [46] результаты которой будут использованы в следующем разделе настоящей главы.

1.2. Классификация соосных конических каналов

Все, что выходит за рамки геометрии,
выходит за рамки нашего понимания.

Б. Паскаль

Под классификацией соосных конических каналов будем понимать выделение и объединение каналов в определенные группы по геометрическим признакам. Необходимость такого разделения следует из того, что различные геометрии каналов потребуют различных математических моделей для описания течений в таких каналах. выполнять классификацию будем следуя недавно опубликованной работе автора данной монографии [46].

Все круглые соосные конические каналы можно разделить на два вида. К первому отнесем каналы, у которых конические поверхности, образующие границы канала, имеют общую вершину (рисунок 1.2). Очевидно, что углы раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала, различны. Коническую поверхность с меньшим углом раскрытия будем называть внутренней границей соосного конического канала с общей вершиной границ или внутренней конической поверхностью канала (рисунок 1.2 а). На

указанном рисунке это коническая поверхность с углом раскрытия, равным $2\alpha_1$. Значение α_1 будем называть полууглом раскрытия конической поверхности.

Коническую поверхность с большим углом раскрытия будем называть внешней границей соосного конического канала с общей вершиной границ или внешней конической поверхностью канала. В таких каналах ламинарное течение от вершины является строго расходящимся и обычно называется диффузорным течением, а сам канал можно определить как соосный конический диффузор с общей вершиной границ.

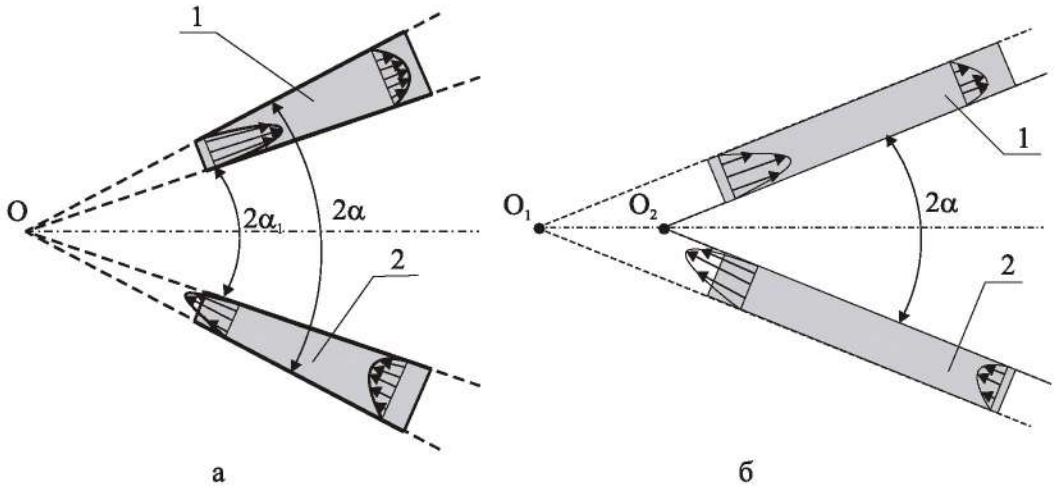


Рис. 1.2. Продольное сечение соосных конических каналов: а – с общей вершиной границ; б – постоянной ширины; 1 – диффузорное течение; 2 – конфузорное течение

Ламинарное течение к вершине в таких каналах является строго сходящимся течением и обычно его называют конфузорным течением, а сам канал мы будем называть соосным коническим конфузором с общей вершиной границ.

Ко второму виду соосных конических каналов отнесем каналы, у которых вершины круглых конусов, образующих границы канала, разнесены на некоторые расстояния. Среди таких каналов могут быть каналы с постоянной шириной вдоль течения и с переменной шириной.

Соосные конические каналы постоянной ширины образованы круглыми соосными конусами с одинаковыми углами раскрытия 2α (рис. 1.2 б). В таких каналах сходящиеся и расходящиеся течения, как и в уже рассмотренных каналах, определяются совершенно однозначно, и, также как в каналах с общей вершиной границ, диффузорное течение направлено от вершины конусов, а конфузорное – к вершинам.

Для данного типа каналов определить внутреннюю и внешнюю границы по разности углов раскрытия не удается. В дальнейшем, при описании течения в таких каналах, мы определим адаптированную к ним систему координат, в которой даже по значению координат можно будет определить внешние и внутренние границы, а пока, для всех рассматриваемых в данной монографии соосных конических каналов, мы можем считать внешней границей ту, которая охватывает коническую поверхность, являющуюся внутренней границей. Внутренняя же граница соосно вложена во внутреннее пространство конической поверхности, образующей внешнюю границу канала (рис. 1.2).

Среди каналов с переменной вдоль течения шириной также можно выделить два типа соосных конических каналов. Во-первых, это каналы, в которых вершины, образующие границы поверхностей, лежат с одной стороны канала (рис. 1.3), и, во-вторых, это каналы, находящиеся между вершинами своих границ (рис. 1.4).

Общая характеристика каналов, продольными сечениями которых являются области I и III на рис. 1.3, аналогична характеристике каналов с общей вершиной границ. Течение в сторону от вершин является строго расходящимся (ширина канала увеличивается) и канал является соосным коническим диффузором. Течение к вершинам в этих областях является сходящимся конфузорным течением. Это связано с тем, что угол раскрытия внешней конической поверхности больше угла раскрытия внутренней конической поверхности в указанных каналах.

В канале с продольным сечением II (рис. 1.3) общая характеристика несколько иная. Здесь угол раскрытия внутренней поверхности канала больше угла раскрытия внешней конической поверх-

ности. Поэтому течения в направлении от вершин происходит в канале с уменьшающейся шириной вдоль течения (рис. 1.3). И в некоторых случаях средняя скорость течения может возрастать, т.е. в

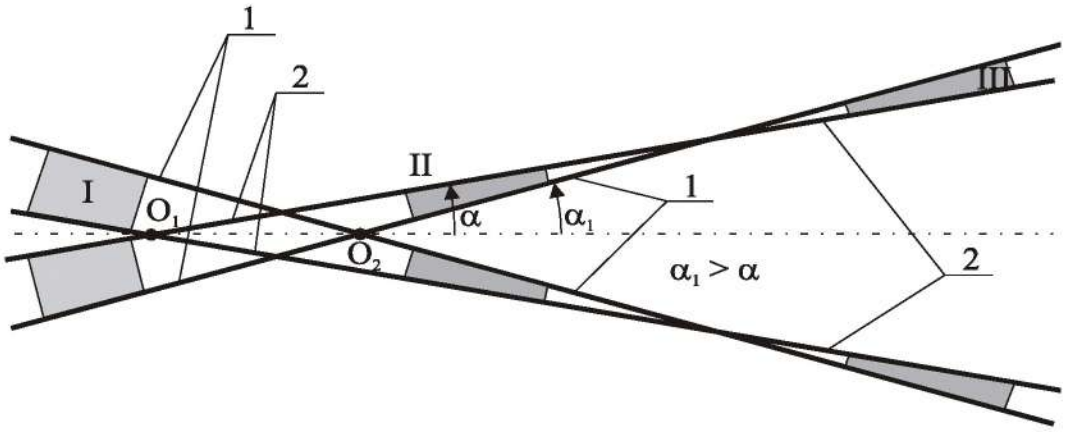


Рис. 1.3. Продольные сечения соосных конических каналов переменной ширины с границами, раскрывающимися в одну сторону : 1 – поверхность с большим полууглом раскрытия; 2 – поверхность с меньшим полууглом раскрытия

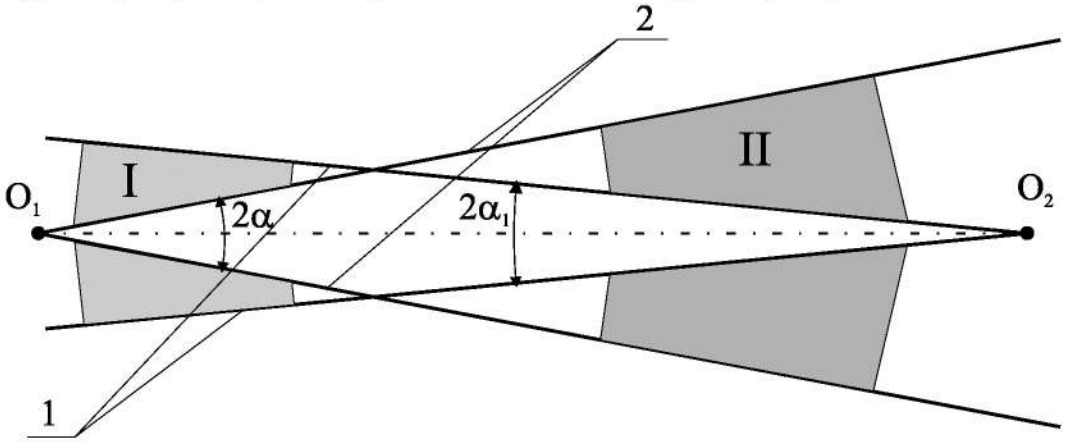


Рис. 1.4. Продольные сечения соосных конических каналов переменной ширины с границами, раскрывающимися на навстречу друг другу: 1 – поверхность с вершиной в точке O_1; 2 – – поверхность с вершиной в точке O_2.

таких случаях течение в сторону от вершины будет проявлять характеристики конфузорного течения, но по аналогии с уже рассмотренными геометриями каналов течение в сторону от вершин, т.е. течение в сторону раскрытия конических поверхностей, будем

считать диффузорным, а течение по направлению к вершинам будем называть конфузорным течением и в каналах, продольным сечением которых является область II (рис. 1.3), хотя оно и происходит в сторону увеличения ширины канала.

Соосные конические каналы, находящиеся между вершинами своих границ, отличаются от всех уже рассмотренных каналов тем, что углы раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала направлены навстречу друг другу (рис. 1.4). Диффузорным течением в данных каналах будем называть течение, направленное в сторону раскрытия внешней конической границы канала, и, соответственно, конфузорным течением будем называть течение, направленное к вершине конуса, образующего внешнюю границу канала. Например, для области I на рис. 1.4 диффузорным течением является течение, направленное от O_2 к O_1, а конфузорным – течение, направленное к O_2.

Необходимо также выделить одну геометрию соосного конического канала, достаточно часто встречающуюся в практических приложениях. Это соосный конический канал, образованный цилиндрической внутренней поверхностью и конической внешней границей. Такой канал можно рассматривать, как канал, образованный при предельном переходе, в котором одна оз вершин конических поверхностей O (рис. 1.4) устремляется к бесконечности при постоянной ширине входа в канал. Течение в соосном коническом канале, образованном внутренней цилиндрической границей и внешней конической поверхностью будет кратко рассмотрено в последней главе данной монографии.

Выполнив геометрическую классификацию соосных конических каналов, которые могут быть использованы в технических устройствах, в следующих разделах данной главы приступим к построению математического описания ламинарных течений в конических каналах.

Получение ясной картины ламинарного течения в каналах и вычисление параметров течения с точностью, приемлемой для конструктивных и технологических расчетов, можно достичь только

при последовательном и строгом применении фундаментальных принципов гидродинамики [98].

Но сначала сделаем простые оценки основных параметров, определяющих характер течения в каналах, например, в соосных конических каналах фильерных головок экструзионных аппаратов (рис. 1.1). В пределах изменения параметров переработки расплавы некоторых полимеров ведут себя как ньютоновские жидкости [99]. Для практически значимых расходов таких жидкостей $Q = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^3/с, их реофизических свойств $\mu \approx 10^3$ Па·с, $\rho \approx 1250$ кг/м^3, $k \approx 0{,}2$ Вт/(м·К), $\Delta T_{rheol} = 6$ К [79] и геометрических размеров канала (рис. 1.1) число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} \ll 1, \tag{1}$$

а число Наме-Гриффита [79, 100] $\mathrm{Gn} \ll 1$.

Величина числа Gn говорит о том, что диссипативные эффекты не влияют на динамику течения рассматриваемых жидкостей и ими можно пренебречь, что вместе с хорошим термостатированием экструдеров [101] позволяет рассматривать течение в кольцевых конических каналах как изотермическое, т.е. считать $\mu = \mathrm{const}$.

Начнем построение математического описания ламинарных течений в соосных конических каналах диффузорного течения.

1.3. Система гидродинамических уравнений, описывающих ламинарные течения в соосных конических диффузорах с общей вершиной границ

Не бог ли начертал эти письмена.

Цитата из В. Гете, сказанная Л. Больцманом по отношению к уравнениям Дж. К. Максвелла

Математическое описание ламинарного течения, впрочем как и любых других явлений, базируется на модельных представлениях об изучаемом явлении, выбор которых должен быть осуществлен

так, чтобы они наилучшим образом аппроксимировали объект изучения.

Для текущей среды мы будем использовать модель вязкой жидкости Ньютона, согласно которой предполагается, что сдвиговые напряжения τ прямо пропорциональны скорости ее деформации $\dot{\gamma}$

$$\tau = -\mu\dot{\gamma}. \qquad (1.2)$$

Течение ньютоновской жидкости в кольцевых конических каналах с общей вершиной границ (рис. 1.5) совершенно естественно рассматривать в сферических координатах, поскольку здесь поверхности, формирующие канал, являются координатными поверхностями (рис. 1.5). В дальнейшем будем рассматривать осесимметричное стационарное течение изотропной несжимаемой жидкости в отсутствии массовых сил, а в тех случаях, когда рассматриваемое

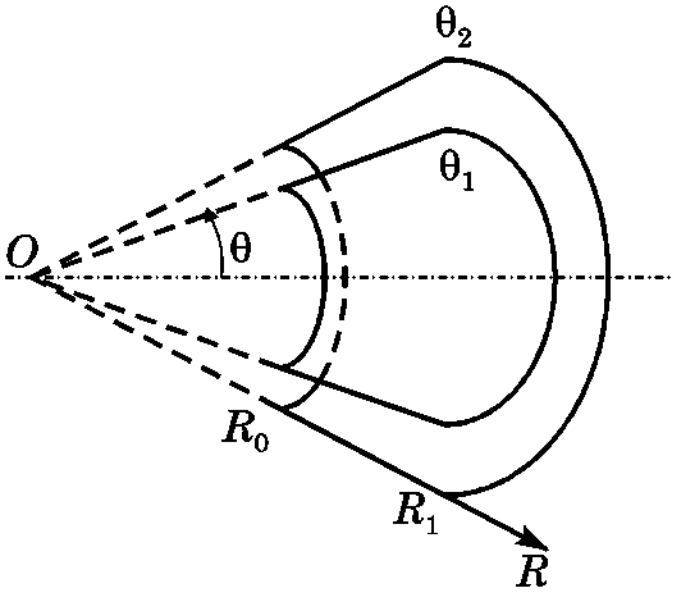


Рис. 1.5. Геометрия соосного конического канала с общей вершиной его границ: O – вершина конических поверхностей, формирующих канал, и сферической системы координат; R – радиальная сферическая координата; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в диффузор и выхода из него (для конфузора наоборот); θ – азимутальная сферическая координата; θ_1, θ_2 – полууглы раскрытия внутренней и внешней границ канала.

течение будет носить другой характер, мы это специально будем оговаривать.

Осесимметричность предполагает, что азимутальная составляющая скорости отсутствует, а в этом случае уравнение неразрывности, записанное в сферических координатах, будет выглядеть как [102]

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 V_R\right)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V_\theta\right)=0. \qquad (1.3)$$

Для разности полууглов раскрытия граничных поверхностей кольцевого конического канала, не превосходящих значения $\Delta\theta=\theta_1-\theta_2\leq\sim 30^\circ$, уравнение неразрывности (1.3) позволяет сделать оценку угловой составляющей скорости $V_\theta \sim \Delta\theta V_R$, т.е

$$V_\theta = o\left(V_R\right). \qquad (1.4)$$

А это означает, что в уравнениях движения и уравнении неразрывности мы можем пренебречь членами, в которые входит угловая составляющая скорости V_θ.

Малое значение числа Рейнольдса (1.1) позволяет пренебречь инерционными членами в уравнениях движения, но течение в конических каналах обладает той особенностью, что вследствие изменения средней скорости вдоль канала, инерционные силы, действующие на жидкость, всегда будут отличны от нуля. Инерционную силу, возникающую вследствии изменения средней по площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала будем называть характерной инеерционной силой, различая при этом характерные инерционные силы в диффузорном и конфузорном течениях. Поэтому, для того чтобы оценить их влияние на параметры течения и определить условия, при которых действием сил инерции можно пренебречь, запишем уравнение движения для диффузорного течения в соосном коническом канале в форме Озеена [102] с учетом сделанных предположений и оценок в виде:

$$\rho\bar{V}\frac{\partial V_R}{\partial R}=-\frac{\partial P}{\partial R}+\mu\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V_R}{\partial R}\right)+\right.$$

(1.5)

$$+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_R}{\partial\theta}\right)-\frac{2V_R}{R^2}\Bigg];$$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial\theta}+\mu\frac{2}{R}\frac{\partial V_R}{\partial\theta}. \tag{1.6}$$

Уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2V_R\right)=0. \tag{1.7}$$

Инерционную силу, возникающую вследствие изменения средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости вдоль течения будем называть характерной инерционной силой. При этом будем различать характерные инерционные силы для диффузорного течения и конфузорного течения. В дальнейшем в каждом конкретном случае течения, если это необходимо, будем отдельно уточнять характер инерционной силы.

...да будет твердь, и да разделит она собой воды.

Бог

В качестве граничных условий, определяющих распределение скорости в канале, примем условия прилипания, т.е. равенство нулю скорости на стенках канала:

$$V_R=0,\quad \theta=\theta_1; \tag{1.8}$$

$$V_R=0,\quad \theta=\theta_2. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.6) говорит о том, что давление в канале является функцией двух координат $P(R,\,\theta)$, а в технических приложениях, как правило, интересует перепад давления вдоль канала. Поэтому, при решении задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале мы будем определять распределение среднего по поперечному сечению канала давления

$$\bar{P}(R)=\frac{1}{\cos\theta_1-\cos\theta_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}P(R,\,\theta)\sin\theta d\theta. \tag{1.10}$$

Это позволяет записать условие однозначности для определения давления в виде

$$\bar{P} = P_0, \quad R = R_0, \tag{1.11}$$

где P_0 – это среднее по поперечному сечению канала давление на входе в канал, т.е. $P_0 = \bar{P}(R_0)$.

Заметим, что задача (1.5)–(1.11) является типичной начально-краевой задачей, а условия (1.8) и (1.9) являются граничными условиями. Условие (1.11) можно считать начальным условием. В дальнейшем в данной монографии условие однозначности для давления будем называть начальным условием.

1.4. Система гидродинамических уравнений, описывающих ламинарные течения в соосных конических конфузорах с общей вершиной границ

...это столб наизнанку, прожектор с обратным свеченьем...

И. Жданов

При рассмотрении конфузорного течения в соосных конических каналах с помощью сферической системы координат необходимо учитывать, что направление скорости жидкости в данном случае противоположно направлению радиальной координаты (рис. 1.5).

Начало конфузора находится на радиальной координате R_1, а выход из канала – на координате R_0, поэтому удобно для дальнейшего анализа конфузорного течения сделать замену координат

$$T = R_1 - R, \quad \theta = \theta. \tag{1.12}$$

Из (1.12) следует, что $\dfrac{\partial}{\partial T} = -\dfrac{\partial}{\partial R}$. Выполняя замену переменных (1.12) в уравнениях (1.5)–(1.7), получим систему гидродинамических уравнений, описывающих стационарное аксиально симмет-

ричное ламинарное течение ньютоновской жидкости в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ:

$$\rho\bar{V}\frac{\partial V_T}{\partial T}=-\frac{\partial P}{\partial T}+\mu\left\{\frac{1}{(R_1-T)^2}\frac{\partial}{\partial T}\left[(R_1-T)^2\frac{\partial V_T}{\partial T}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(R_1-T)^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V_T}{\partial\theta}\right)-\frac{2V_T}{(R_1-T)^2}\right\}; \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}+\mu\frac{2}{R_1-T}\frac{\partial V_T}{\partial\theta}=0; \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[(R_1-T)^2V_T\right]=0. \tag{1.15}$$

Граничными условиями для определения распределения скорости жидкости остаются условия прилипания на границах канала:

$$V_R=0,\quad \theta=\theta_1; \tag{1.16}$$

$$V_R=0,\quad \theta=\theta_2, \tag{1.17}$$

а начальное условие для давления запишется, как

$$\bar{P}=P_0,\quad R=R_1, \tag{1.18}$$

где $\bar{P}$ определяется выражением (1.10), а $P_0=\bar{P}(R_1)$.

1.5. Система гидродинамических уравнений, описывающих течение в соосных конических диффузорах с постоянной шириной канала

Фонарь зажигают от другого фонаря

Из Упанишад

Исследование течения в соосных конических каналах постоянной ширины (рис. 1.2 б) с помощью сферической системы координат представляет большие трудности вследствие того, что границы не являются координатными поверхностями. В работе [45] автор об-

народовал упрощенную систему уравнений движения, пригодную для описания ламинарных течений ньютоновской жидкости в соосных конических каналах, образованных коническими границами, которые не имеют общей вершины. Далее в этом разделе следуя идеям работы [45] мы детализируем получение системы уравнений движения.

Для изучения ламинарных течений в соосных конических каналах удобно использовать биконическую систему координат [103] (рис. 1.6), которая определяется преобразованием:

$$Y' = R\cos\alpha + \mathrm{X}\sin\alpha; \tag{1.19}$$

$$Z' = \left(R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right)\sin\varphi = \Omega\sin\varphi; \tag{1.20}$$

$$X' = \left(R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right)\cos\varphi = \Omega\cos\varphi, \tag{1.21}$$

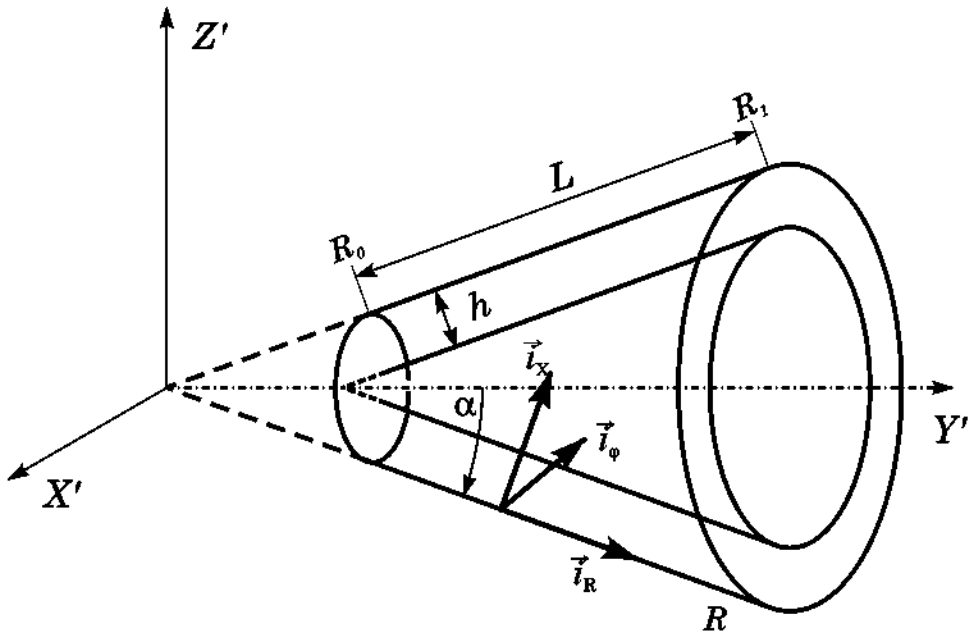


Рис. 1.6. Геометрия соосного конического канала постоянной ширины: h – ширина канала; L – длина образующих границ канала; R – радиальная биконическая координата; $\vec{i}_{\mathrm{X}}, \vec{i}_{\varphi}, \vec{i}_{R}$ – орты в биконической системе координат; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в соосный конический диффузор постоянной ширины и выхода из него (для конфузора наоборот); X', Y', Z' – координаты в декартовой системе координат; α – полуугол раскрытия конических поверхностей, образующих канал

где $\Omega = R\sin\alpha - X\cos\alpha$.

Автором в работах [21–23] была представлена система уравнений гидродинамики, описывающих диффузорное течение с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса в биконических координатах, а в работах [25, 31, 35] представлены уравнения гидродинамики для данной геометрии в форме Озеена. В работе [67] автор представил решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с постоянной шириной вдоль течения при Re = 0, а в [33] обнародованы уравнения движения в форме Озеена для конфузорного течения в соосном коническом канале.

В данном разделе настоящей монографии мы последовательно получим систему уравнений, описывающих ламинарные, осесимметричные, стационарные течения изотропных несжимаемых жидкостей при отсутствии массовых сил в биконической системе координат.

Последнее условие хотя и является упрощающим, но не является принципиальным для решения. В работах [104, 105] автором показано, что массовые силы совершенно элементарно могут быть учтены в уравнениях движения несжимаемой жидкости, записанных в биконических координатах.

Для получения уравнений ламинарного движения жидкости и уравнения неразрывности в биконической системе координат воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного движения сплошной среды в векторной форме, записанном в криволинейных ортогональных координатах в случае отсутствия массовых сил и представленном через напряжения [102]

$$\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{v_k}{H_k}\frac{\partial\vec{V}}{\partial q_k} = \\ = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\vec{p}_1H_2H_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\vec{p}_2H_3H_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\vec{p}_3H_1H_2\right)\right]. \tag{1.22}$$

Коэффициенты Ламе H_i в (1.22) определяются соотношением [106]

$$H_i = \left[\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \qquad (1.23)$$

где x_k – декартовы координаты, а q_i – криволинейные ортогональные координаты.

Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости в криволинейных ортогональных координатах запишется в виде [102]

$$\left[\frac{\partial}{q_1}(V_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 H_3 H_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 H_1 H_2) \right] = 0. \qquad (1.24)$$

Входящие в уравнения (1.22), (1.24) векторы $\vec{V}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_3$ можно представить в виде суммы произведений этих векторов по касательным к координатным линиям на соответствующие орты $\vec{i}_k$, т.е.

$$\vec{V} = V_k \vec{i}_k; \qquad (1.25)$$

$$\vec{p}_m = p_{mk} \vec{i}_k, \qquad (1.26)$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование, а m и k изменяются от 1 до 3.

Преобразование (1.19) – (1.21) позволяет определить координату q_i как

$$q_1 = R; \quad q_2 = \mathrm{X} \quad \text{и} \quad q_3 = \varphi \qquad (1.27)$$

с соответствующими ортами: $\vec{i}_1 = \vec{i}_R$, $\vec{i}_2 = \vec{i}_{\mathrm{X}}$ и $\vec{i}_3 = \vec{i}_\varphi$.

Используя выражение (1.23), вычислим параметры Ламэ для преобразования (1.19) – (1.21)

$$H_R = 1; \; H_{\mathrm{X}} = 1 \text{ и } H_\varphi = R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha = \Omega. \qquad (1.28)$$

Подставляя данные значения параметров Ламэ в (1.24) с соответствующими переобозначениями координат (1.27), получим уравнение неразрывности для течения несжимаемой жидкости в биконических координатах

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}(\Omega V_{\mathrm{X}})+\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}=0. \qquad (1.29)$$

Для того, чтобы получить уравнение движения в напряжениях, записанное в биконической системе координат, нам необходимо подставить соотношения (1.26) в уравнение (1.22) и затем вычислить производные от единичных векторов по координатам.

Мы сразу можем заметить, что все три орта $\vec{i}_R$, $\vec{i}_{\mathrm{X}}$ и $\vec{i}_\varphi$ остаются постоянными вдоль координатных линий R и X. В то же время все три орта меняются по углу φ. Из дифференциальной геометрии известно, что при дифференцировании единичных векторов по натуральному параметру координатной линии, являющейся окружностью, выполняется условие [107, 108]

$$\frac{d\vec{i}_k}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}_k, \qquad (1.30)$$

где вектор $\bar{\omega}$ называется вектором угловой скорости и направлен перпендикулярно плоскости, в которой происходит изменение натурального параметра. В рассматриваемом случае это направление совпадает с направлением оси Z' (рис. 1.6).

Следовательно, вектор угловой скорости при изменении φ направлен по оси Z' и равен по величине $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\vec{\omega}=\frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{i}_{Z'}=\frac{d\varphi}{dt}\left(\vec{i}_R\cos\alpha+\vec{i}_{\mathrm{X}}\sin\alpha\right). \qquad (1.31)$$

Используя определение векторного произведения [100]

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k, \qquad (1.32)$$

где ε_{ijk} – символ Леви-Чивита, определяем значения производных от ортов биконической системы координат по натуральному параметру (1.30):

$$\frac{d\vec{i}_R}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt}\sin\alpha\vec{i}_\varphi; \qquad (1.33)$$

$$\frac{d\vec{i}_{\mathrm{X}}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha\vec{i}_{\varphi}; \tag{1.34}$$

$$\frac{d\vec{i}_{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\left(-\sin\alpha\vec{i}_{R} + \cos\alpha\vec{i}_{\mathrm{X}}\right). \tag{1.35}$$

Выбирая в качестве натурального параметра значения координаты φ, будем иметь:

$$\frac{d\vec{i}_{R}}{d\varphi} = -\sin\alpha\vec{i}_{\varphi}; \tag{1.36}$$

$$\frac{d\vec{i}_{\mathrm{X}}}{d\varphi} = \cos\alpha\vec{i}_{\mathrm{X}}; \tag{1.37}$$

$$\frac{d\vec{i}_{\varphi}}{d\varphi} = -\sin\alpha\vec{i}_{R} + \cos\alpha\vec{i}_{\mathrm{X}}. \tag{1.38}$$

Подставляя координатную запись вектора скорости (1.25) в левую часть уравнения (1.22) и выполняя дифференцирование с помощью соотношений (1.36) – (1.38), учитывая обозначения (1.27) и значения коэффициентов Ламэ (1.28), получим выражение, определяющее инерционный член в уравнении движения жидкости, записанный в векторном виде в биконической системе координат

$$\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{V_k}{H_k}\frac{\partial\vec{V}}{\partial q_k} = \rho\left(V_R\frac{\partial V_R}{\partial R} + V_{\mathrm{X}}\frac{\partial V_R}{\partial \mathrm{X}} + \frac{V_\varphi}{\Omega}\frac{\partial V_R}{\partial\varphi} - \frac{V_\varphi^2}{\Omega}\sin\alpha\right)\vec{i}_R +$$

$$+\rho\left(V_R\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial R} + V_{\mathrm{X}}\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial \mathrm{X}} + \frac{V_\varphi}{\Omega}\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial\varphi} + \frac{V_\varphi^2}{\Omega}\cos\alpha\right)\vec{i}_{\mathrm{X}} + \tag{1.39}$$

$$+\rho\left(V_R\frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + V_{\mathrm{X}}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \mathrm{X}} + \frac{V_\varphi}{\Omega}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{V_\varphi V_R}{\Omega}\sin\alpha + \frac{V_\varphi V_R}{\Omega}\cos\alpha\right)\vec{i}_\varphi.$$

Точно так же, подставляя выражение (1.26) в правую часть уравнения (1.22) и проводя дифференцирование векторного выражения, находим

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\vec{p}_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(\vec{p}_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(\vec{p}_3H_1H_2)\right]=$$

$$=\left(\frac{\sin\alpha}{R}p_{RR}+\frac{\partial p_{RR}}{\partial R}-\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\mathrm{X}R}+\frac{\partial p_{\mathrm{X}R}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial p_{\varphi R}}{\partial\varphi}-\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{\varphi\varphi}\right)\vec{i}_R+$$

$$+\left(\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{R\mathrm{X}}+\frac{\partial p_{\mathrm{XX}}}{\partial R}-\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\mathrm{XX}}+\frac{\partial p_{\mathrm{XX}}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial p_{\varphi\mathrm{X}}}{\partial\varphi}+\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\varphi\varphi}\right)\vec{i}_{\mathrm{X}}+$$

$$+\left(\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{R\varphi}+\frac{\partial p_{R\varphi}}{\partial R}-\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\mathrm{X}\varphi}+\frac{\partial p_{\mathrm{X}\varphi}}{\partial \mathrm{X}}+\right. \tag{1.40}$$

$$\left.+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{p_{\varphi\mathrm{X}}\cos\alpha-p_{\varphi R}\sin\alpha}{\Omega}\right)\vec{i}_{\varphi}.$$

Приравнивая (1.39) и (1.40) и далее расписывая векторное равенство по координатам R, X и φ, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих стационарное ламинарное течение жидкости в биконических координатах, записанную в напряжениях:

$$\rho\left(V_R\frac{\partial V_R}{\partial R}+V_{\mathrm{X}}\frac{\partial V_R}{\partial \mathrm{X}}+\frac{V_\varphi}{\Omega}\frac{\partial V_R}{\partial\varphi}-\frac{V_\varphi^2}{\Omega}\sin\alpha\right)=\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{RR}+$$

$$+\frac{\partial p_{RR}}{\partial R}-\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\mathrm{X}R}+\frac{\partial p_{\mathrm{X}R}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial p_{\varphi\mathrm{X}}}{\partial\varphi}-\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{\varphi\varphi}; \tag{1.41}$$

$$\rho\left(V_R\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial R}+V_{\mathrm{X}}\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{V_\varphi}{\Omega}\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial\varphi}+\frac{V_\varphi^2}{\Omega}\cos\alpha\right)=\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{R\mathrm{X}}+$$

$$+\frac{\partial p_{R\mathrm{X}}}{\partial R}-\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\mathrm{XX}}+\frac{\partial p_{\mathrm{XX}}}{\partial \mathrm{X}}+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial p_{\varphi\mathrm{X}}}{\partial\varphi}+\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{\varphi\varphi}; \tag{1.42}$$

$$\rho\left(V_R\frac{\partial V_\varphi}{\partial R}+V_X\frac{\partial V_\varphi}{\partial X}+\frac{V_\varphi}{\Omega}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{V_\varphi V_X}{\Omega}\sin\alpha+\frac{V_\varphi V_X}{\Omega}\cos\alpha\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\Omega}p_{R\phi}+\frac{\partial p_{R\phi}}{\partial R}-\frac{\cos\alpha}{\Omega}p_{X\phi}+\frac{\partial p_{X\phi}}{\partial X}+ \qquad (1.43)$$

$$+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{p_{\varphi X}\cos\alpha-p_{\varphi R}\sin\alpha}{\Omega}.$$

Заметим, что уравнения (1.41) – (1.43) совместно с уравнением (1.29) представляют собой систему гидродинамических уравнений в напряжениях, описывающих течение несжимаемой жидкости в биконической системе координат.

Для того, чтобы записать уравнение движения жидкости в биконических координатах через проекции вектора скорости, нам необходимо определить соотношения, представляющие компоненты тензора напряжения p_{ik} через компоненты тензора скоростей деформации ε_{ik} в биконической системе координат.

Тензор скоростей деформации в криволинейной ортогональной системе координат определяется следующими соотношениями [102, 109]:

$$\varepsilon_{kk}=\sum_{i=1}^{i=3}\frac{V_i}{H_iH_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_i}+\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{V_k}{H_k}\right); \qquad (1.44)$$

$$2\varepsilon_{ik}=\frac{H_i}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{V_i}{H_i}\right)+\frac{H_k}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V_k}{H_k}\right). \qquad (1.45)$$

Обобщенная гипотеза Ньютона позволяет записать выражения, связывающие тензор напряжений с тензором скоростей деформации для несжимаемой жидкости [2, 102]

$$p_{ik}=-P\delta_{ik}+2\mu\varepsilon_{ik}, \qquad (1.46)$$

где величина P представляет давление в точке движущейся жидкости и определяется как отрицательная величина среднего нормального напряжения $P=-\frac{1}{3}p_{ii}$ [2]. В покоящейся жидкости вели-

чина P сводится к статическому давлению и обобщает понятие давления на движущуюся жидкость, т.е. представляет меру локальной интенсивности «сжатия» элемента жидкости, и в дальнейшем мы будем именовать величину p статическим давлением. Величина μ в (1.46) является коэффициентом динамической вязкости жидкости, а δ_{ik} – символ Кронекера.

Далее, подставляя (1.44) и (1.45) в (1.46) и используя определения (1.27), (1.28), найдем компоненты тензора напряжений в биконической системе координат:

$$p_{RR} = -P + 2\mu\frac{\partial V_R}{\partial R}; \tag{1.47}$$

$$p_{\mathrm{XX}} = -P + 2\mu\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial \mathrm{X}}; \tag{1.48}$$

$$p_{\varphi\varphi} = -P + 2\mu\frac{1}{\Omega}\left(V_R\sin\alpha - V_{\mathrm{X}}\cos\alpha + \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right); \tag{1.49}$$

$$p_{R\mathrm{X}} = \mu\left(\frac{\partial V_R}{\partial \mathrm{X}} + \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial R}\right); \tag{1.50}$$

$$p_{\mathrm{X}\varphi} = \mu\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \mathrm{X}} + \frac{V_\varphi}{\Omega}\cos\alpha\right); \tag{1.51}$$

$$p_{\varphi R} = \mu\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{\Omega}\sin\alpha + \frac{1}{\Omega}\frac{\partial V_R}{\partial\varphi}\right). \tag{1.52}$$

Ранее мы уже отмечали, что в данной монографии рассматриваются только аксиально-симметричные течения жидкости в соосных конических каналах, а это означает, что угловая компонента скорости равна нулю, т.е. $V_\varphi = 0$. Все другие параметры течения не зависят от φ: $\frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0$; $\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial\varphi} = 0$; $\frac{\partial V_R}{\partial\varphi} = 0$. Для такого течения уравнение неразрывности (1.29) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}(\Omega V_{\mathrm{X}})=0. \tag{1.53}$$

Уравнение (1.53) позволяет сравнить по величине продольную составляющую скорости V_R и поперечную ее составляющую V_{X}

$$|V_{\mathrm{X}}|\approx\frac{h}{L}|V_R|, \tag{1.54}$$

где h – ширина канала, $L=R_1-R_0$ – длина образующей конических границ канала (рис. 1.6). И для размеров каналов, аналогичных размерам, приведенным на рисунке 1.1, или для размеров каналов из работ [56, 57, 110] мы имеем неравенство $h\ll L$, вследствие этого получаем соотношение сравнения

$$V_{\mathrm{X}}=o(V_R), \tag{1.55}$$

что позволяет пренебречь угловой и поперечной составляющими скорости в уравнении неразрывности, записав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R)=0, \tag{1.56}$$

а также в уравнениях движения (1.41)–(1.43) и в выражениях, определяющих компоненты тензора напряжений (1.47)–(1.52). Подставляя последние в уравнения движения и учитывая уравнение неразрывности (1.56) и то, что число Наме-Гриффита $\mathrm{Gn}\ll 1$, т.е. $\mu=\mathrm{const}$, получим:

$$\rho V_R\frac{\partial V_R}{\partial R}=-\frac{\partial P}{\partial R}+\frac{\mu}{\Omega}\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\Omega\frac{\partial V_R}{\partial \mathrm{X}}\right); \tag{1.57}$$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}}-\frac{\mu\cos\alpha}{\Omega}\frac{\partial V_R}{\partial R}. \tag{1.58}$$

Таким образом, система гидродинамических уравнений (1.56) – (1.58) описывает аксиально-симметрическое диффузорное ламинарное течение в соосном коническом канале с учетом сделанных нами сравнительных оценок составляющих скорости жидкости.

Выполняя оценку членов в уравнениях (1.57) и (1.58), можно записать:

$$\left|\frac{\partial P}{\partial R}\right| \sim \frac{\rho V_R^2}{L} + \mu \frac{V_R}{h^2}; \tag{1.59}$$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}}\right| \sim \mu \cos\alpha \frac{V_R}{L}, \tag{1.60}$$

и, поскольку $h \ll L$ в рассматриваемых каналах, получаем сравнение величины градиента давления

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}}\right| = o\left|\frac{\partial P}{\partial R}\right|. \tag{1.61}$$

Поэтому для поперечной составляющей градиента давления мы можем записать

$$\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}} = 0. \tag{1.62}$$

Заметим, последнее равенство нам показывает, что можно считать градиент давления зависящим только от радиальной координаты R, а это позволяет в уравнении движения (1.57) частную производную давления заменить на обыкновенную, и в дальнейшем изложении при решении конкретных задач ламинарного течения жидкости в соосных конических каналах мы часто этим будем пользоваться.

Таким образом, система уравнений гидродинамики (1.29), (1.41)–(1.43), с помощью сделанных нами оценок, редуцирована к двум уравнениям (1.56) и (1.57), описывающим аксиально-симметричное диффузорное ламинарное течение в соосных конических каналах в биконической системе координат.

В качестве условий однозначности для определения распределения скорости при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале выберем условие прилипания жидкости на границах канала:

$$V_R = 0, \quad \mathrm{X} = 0; \tag{1.63}$$

$$V_R = 0, \quad \mathrm{X} = h, \tag{1.64}$$

где h – ширина канала (рис. 1.6).

Начальным условием для давления будем считать заданную величину давления на входе в канал

$$P = P_0, \quad R = R_0. \tag{1.65}$$

В последнем условии важно иметь в виду то, что значение давления P_0 является относительной величиной, начиная от которой мы можем определять изменения давления вдоль течения в канале, т.е. вычислять значение $\Delta P = P - P_0$, где P – текущее давление. Подстановка ΔP в уравнение (1.57) вместо P не изменяет самого уравнения в нашем случае, т.к. жидкость считается несжимаемой, и поэтому, решив поставленную задачу с условием (1.65), мы определим распределение перепада давления вдоль канала и распределение градиента давления вдоль течения. Определение перепада давления вдоль канала $\Delta P(R)$ является практически важной задачей, поскольку позволяет построить расходно-напорную характеристику для ламинарного течения в соосных конических каналах – $\Delta P(Q)$, знание которой необходимо, например, при определении рабочей точки экструзионных машин для производства и переработки полимеров.

1.6. Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины

Малое с великим схоже,
Хоть и разнится на вид.

В. Гете

При рассмотрении конфузорного течения в биконических координатах также, как и при его анализе в сферической системе ко-

ординат (раздел. 1.4), учтем, что направление движения жидкости противоположно направлению радиальной координаты.

Учитывая данный факт и произведя замену переменных

$$R = R_1 - T; \quad \mathrm{X} = \mathrm{X}, \tag{1.66}$$

получим систему гидродинамических уравнений, описывающих стационарное апроксимально-симметрическое ламинарное течение несжимаемой жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины с учетом оценок величины членов в уравнениях движения, выполненных выше для практически интересных геометрических размеров каналов:

$$\rho V_R \frac{\partial V_R}{\partial T} = -\frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\mu}{\Omega'} \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} \left(\Omega' \frac{\partial V_R}{\partial \mathrm{X}} \right); \tag{1.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} (\Omega' V_R) = 0, \tag{1.68}$$

где

$$\Omega' = (R_1 - T)\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha. \tag{1.69}$$

Граничными условиями для определения распределения скорости жидкости в канале остаются условия прилипания на границах канала:

$$V_R = 0, \quad \mathrm{X} = 0; \tag{1.70}$$

$$V_R = 0, \quad \mathrm{X} = h, \tag{1.71}$$

а начальное условие для определения давления запишется, как

$$P = P_0, \quad T = 0. \tag{1.72}$$

В заключение настоящей главы отметим, что здесь мы дали математическую формулировку задачи стационарного осесимметричного ламинарного диффузорного и конфузорного течения ньютоновской несжимаемой жидкости в соосных конических каналах с общей вершиной и каналах постоянной ширины. При этом были

использованы сферическая и биконическая системы координат. В тех случаях, когда указанные течения мы будем рассматривать в других приближениях, нам могут понадобиться и другие системы координат, и для каждого такого случая мы будем выполнять математическую постановку задачи отдельно, описывая ее в той же главе, где будет приведено решение задачи.

ГЛАВА 2

МЕДЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ГРАНИЦ

Блажен лишь тот, кто, суеты не ведая,
Как первобытный род людской,
Наследье дедов пашет на волах своих...

Гораций

2.1. Краткий обзор ранних работ

Начаша ти поведати по делом и по былинам.

Задонщина

Одной из самых ранних работ, посвященных изучению течения между соосными коническими поверхностями, была работа Н.А. Слезкина [111]. В ней исследовалось ламинарное течение в коаксиальном коническом канале, образованном кольцевыми коническими поверхностями с общей вершиной.

Мы в настоящей монографии начнем анализ ламинарных течений в соосных конических каналах с изучения стационарного ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ. В работе [111] сделан, в большей степени, качественный анализ ламинарного течения, и результаты этой работы для расчетов не применимы, поскольку практические вопросы расхода жидкости и перепада давления в канале там не рассматривались. В работе [112] получено общее решение для сферических ламинарных течений безотносительно к граничным условиям. В работах [100, 110, 115] предлагается для расчетов течения в кольцевых конических каналах использовать ступенчатую аппроксимацию этих каналов кольцевыми цилиндрическими каналами, что может привести к значительным погрешностям в технологических расчетах вследствие того, что при этом подходе расходящееся тече-

ние заменяется прямолинейным. Особенно большие погрешности ступенчатая аппроксимация будет давать при больших углах раскрытия конических поверхностей.

Достаточно полное решение задачи ламинарного диффузорного течения между круглыми конусами с общей вершиной приведено в работе [114]. Здесь получено распределение скорости жидкости, но математическая постановка задачи выполнена не совсем корректно. В приведенном решении допущены некоторые неточности, а перепад давления предлагается определять по номограмме, представленной в работе, что не всегда удобно.

В данной главе монографии приводится постановка задачи, ее решение и анализ решения, выполненные автором и опубликованные в работах [20, 22, 23].

2.2. Математическая формулировка проблемы

Пестрое многообразие явлений может быть понято потому, говорят Пифагор и Платон, что в основе его лежит единый, доступный математическому описанию принцип формы.

В. Гейзенберг

Для того, чтобы получить характеристики ламинарного течения в кольцевом соосном диффузоре в наиболее общем виде, вне зависимости от конкретных значений вязкости жидкости и линейных размеров канала, будем рассматривать течение в безразмерных переменных. Для выбора линейного масштаба имеется много возможностей, например, мы можем выбрать в качестве масштабного множителя длины – радиус входа в канал R_0 или длину образующей канала $R_1 - R_0$ (рис. 1.5), и мы воспользуемся этим при необходимости. Но сначала мы выберем для большей общности в качестве линейного масштаба ширину канала на его входе h_0, которую определим как длину перпендикуляра, восстановленного от кромки внешней границы на входе в канал до внутренней границы канала (рис. 2.1)

До анализа конкретных примеров течения мы будем считать h_0 некоторым самостоятельным линейным масштабом что позволит получить решение в наиболее общем виде, а в каждом конкретном случае мы будем выбирать наиболее подходящий линейный масштаб.

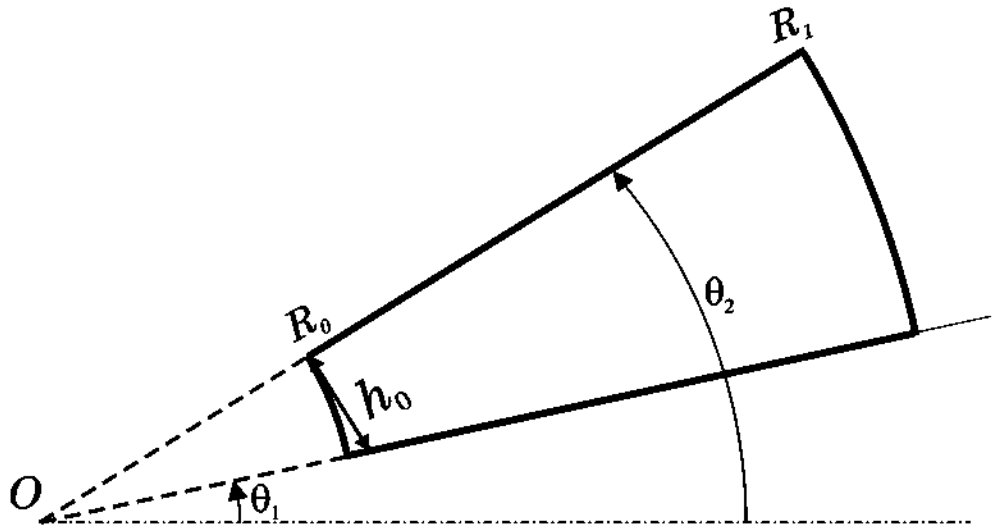


Рис. 2.1. К определению входа в канал для ширины соосного конического диффузора с общей вершиной границ: O – вершина соосных конических поверхностей; h_0 – ширина канала на его входе; R_0, R_1 – радиальные координаты входа и выхода из канала.

В качестве масштаба скорости возьмем среднюю по площади поперечного сечения канала скорость жидкости на его входе. Площадь поверхности поперечного сечения определится соотношением

$$S_0 = 2\pi R_0^2 \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right), \tag{2.1}$$

и тогда масштаб скорости определится как

$$V_0 = \frac{Q}{2\pi R_0^2 \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)}. \tag{2.2}$$

Выбранные масштабные множители позволяют определить безразмерные переменные, которые будут использоваться для записи уравнений гидродинамики (1.5) – (1.11):

$$\xi = \frac{R}{h_0}; \upsilon = \frac{V_R}{V_0}; \ \Pi = \frac{(P - P_0)h_0}{\mu V_0}; \tau = \cos\theta; \ \mathrm{Re} = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}. \qquad (2.3)$$

Определенные выше переменные могут быть получены непосредственно при обезразмеривании уравнений (1.5) – (1.11).

Далее, учитывая, что в данной главе мы рассматриваем диффузорные течения в кольцевых конических каналах с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$ и соотношения, которые должны выполняться при замене независимых переменных:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\tau}; \quad \frac{\partial}{\partial R} = \frac{1}{h_0}\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad (2.4)$$

запишем систему гидродинамических уравнений, определяющих ползущее течение в кольцевом коническом канале с общей вершиной границ, в безразмерном виде:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial\tau}\right] - \frac{2\upsilon}{\xi^2}; \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} = \frac{2}{\xi}\frac{\partial\upsilon}{\partial\tau}; \qquad (2.6)$$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\upsilon\right) = 0, \qquad (2.7)$$

с граничными и начальным условиями, следующими из размерных записей (1.8), (1.9) и (1.11):

$$\upsilon = 0, \quad \tau = \tau_1; \qquad (2.8)$$

$$\upsilon = 0, \quad \tau = \tau_2; \qquad (2.9)$$

$$\bar{\Pi} = 0, \quad \xi = \xi_0, \qquad (2.10)$$

где $\xi_0 = \frac{R_0}{h_0}$, R_0 – радиальная координата входа в канал (рис. 2.1), и для $\bar{\Pi}$ из (1.10) получаем

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Pi d\tau . \qquad (2.11)$$

Для решения поставленной задачи нам потребуется условие постоянства расхода в любом поперечном сечении канала, которое в рассматриваемом случае эквивалентно уравнению неразрывности и может быть из него получено, но может быть и непосредственно из закона сохранения вещества. В размерном виде условие постоянства расхода запишется как

$$2\pi R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} V \sin\theta d\theta = Q . \qquad (2.12)$$

Переходя в (2.12) к безразмерным переменным с учетом определения (2.2), запишем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} v d\tau = \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 \left(\tau_2 - \tau_1 \right) . \qquad (2.13)$$

Таким образом, мы получили уравнения (2.5) – (2.11) и (2.13), определяющие задачу медленного диффузорного течения монотонной несжимаемой жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ. В следующем разделе настоящей главы мы приступим к ее решению.

2.3. Аналитическое решение задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ

Кто использует машины, тот делает все свои дела машинообразно; кто действует машинообразно, у того сердце становится машинным. У кого в груди машинное сердце, тот утрачивает чистую простоту, а без чистой простоты не может быть уверенности в побуждениях собственного духа.

Чжуан Цзы

Не решая уравнений движения, мы можем определить распределение безразмерной средней по площади поперечного сечения

канала скорости, вдоль течения, исходя из геометрии канала. Для этого сначала определим распределение площади поверхности поперечного сечения канала координатной поверхностью

$$S = 2\pi R \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \sin\theta d\theta = -2\pi R^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = 2\pi R^2 (\tau_1 - \tau_2). \qquad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что для безразмерной площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной границ можно записать выражение

$$s = 2\pi\xi^2 (\tau_1 - \tau_2). \qquad (2.15)$$

Но при анализе течения в каналах переменного сечения иногда удобно использовать безразмерную площадь поперечного сечения, для определения которой выбран масштаб площади, равный площади поверхности поперечного сечения на входе в канал (2.1), т.е

$$\tilde{s} = \frac{S}{S_0} = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2. \qquad (2.16)$$

Характеры зависимости (2.15) и (2.16) от ξ аналогичны, но в выражении (2.16) присутствует безразмерная координата входа в канал, а в (2.15) входят угловые координаты конических поверхностей, и поэтому (2.16) удобно использовать для анализа течений с различными значениями ξ_0, а выражение (2.15) – при анализе течений в каналах с различными углами раскрытия границ.

Очевидно, что определения безразмерной площади поперечного сечения канала (2.15) и (2.16) для одного канала различаются постоянным множителем $2\pi\xi_0(\tau_1 - \tau_2)$, т.е. величиной безразмерной площади поперечного сечения, определенного в (2.15). Поэтому определение (2.16) будем рассматривать, как отношение текущей площади поперечного сечения к безразмерной площади поверхно-

сти поперечного сечения на входе в канал, и называть относительной безразмерной площадью поперечного сечения канала.

С помощью (2.14) мы можем определить распределение размерной средней по площади поперечного сечения канала скорости вдоль течения

$$\bar{V} = \frac{Q}{2\pi R^2 (\tau_1 - \tau_2)}. \tag{2.17}$$

И тогда распределение вдоль канала безразмерной средней скорости, исходя из определений безразмерных переменных (2.3), запишем в виде

$$\overline{v} = \frac{\bar{V}}{V_0} = \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{s}}. \tag{2.18}$$

Определив интегральные характеристики течения, следующие непосредственно из геометрических свойств канала, приступим к решению гидродинамических уравнений.

Интегрируя уравнение неразрывности (2.7), получаем то, что безразмерная скорость может быть представлена в виде произведения

$$v = \frac{1}{\xi^2} u(\tau), \tag{2.19}$$

где $u(\tau)$ – множитель, зависящий только от угловой координаты τ.

Подставляя (2.19) в (2.6) и интегрируя его по τ, найдем выражение для безразмерного давления

$$\Pi(\xi, \tau) = \frac{2}{\xi^3} u(\tau) + f(\xi), \tag{2.20}$$

где член $f(\xi)$ зависит исключительно от радиальной координаты ξ.

Дифференцируя (2.20) по ξ, получаем выражение

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -\frac{6}{\xi^4} u + f'(\xi), \tag{2.21}$$

подставляя которое совместно с (2.19) в уравнение движения, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\xi^4 \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} = \left(1-\tau^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\tau\frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u. \qquad (2.22)$$

Левая часть (2.22) зависит только от ξ, а правая – исключительно от τ, но это возможно только в том случае, когда обе части постоянны и равны некой константе, т.е.

$$\xi^4 f'(\xi) = (1-\tau)u'' - 2\tau u' + 6u = -\lambda, \qquad (2.23)$$

а величина λ называется постоянной разделения.

Для функции $u(\tau)$ мы получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left(1-\tau^2\right)u'' - 2\tau u' + 6u + \lambda = 0. \qquad (2.24)$$

Граничные условия для (2.24) следуют из выражения (2.19) и условий (2.8) и (2.9), т.е.

$$u = 0, \quad \tau = \tau_1; \qquad (2.25)$$

$$u = 0, \quad \tau = \tau_2. \qquad (2.26)$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение неоднородного дифференциального уравнения является суммой общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения [115].

Однородным дифференциальным уравнением для (2.24) является уравнение Лежандра с индексом $\nu = 2$ [116]

$$\left(1+\tau^2\right)u'' - 2\tau u' + \nu(\nu+1)u = 0. \qquad (2.27)$$

Решение уравнения Лежандра при $\nu = 2$ запишется в виде

$$u(\tau) = C_1 P_2(\tau) + C_2 Q_2(\tau), \qquad (2.28)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $P_2(\tau)$ – зональная гармоническая сферическая функция первого рода и второго порядка,

или, по-другому, функция Лежандра первого рода и второго порядка, определяемая полиномом [116]

$$P_2(\tau)=\frac{1}{2}\left(3\tau^2-1\right), \tag{2.29}$$

а $Q_2(\tau)$ – функция Лежандра второго рода и второго порядка, которая определяется выражением

$$Q_2(\tau)=\frac{1}{4}\left(3\tau^2-1\right)\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}-\frac{3}{2}\tau. \tag{2.30}$$

Частным решением неоднородного уравнения (2.24) является соотношение

$$u=-\frac{\lambda}{6}, \tag{2.31}$$

и, следовательно, решение дифференциального уравнения второго порядка (2.24) может быть записано в виде

$$u=C_1P_2(\tau)+C_2Q_2(\tau)-\frac{\lambda}{6}. \tag{2.32}$$

Произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим с помощью граничных условий (2.25) и (2.26):

$$C_1=\frac{\lambda}{6}\cdot\frac{Q_2(\tau_2)-Q_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2)-P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}; \tag{2.33}$$

$$C_2=\frac{\lambda}{6}\cdot\frac{P_2(\tau_1)-P_2(\tau_2)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2)-P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}, \tag{2.34}$$

и после этого мы можем представить решение краевой задачи (2.24)–(2.26) в виде

$$u(\tau)=\frac{\lambda}{6}\left[AP_2(\tau)+BQ_2(\tau)-1\right], \tag{2.35}$$

где

$$A=\frac{Q_2(\tau_2)-Q_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2)-P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}, \tag{2.36}$$

$$B = \frac{P_2(\tau_1) - P_2(\tau_2)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}. \tag{2.37}$$

Для определения постоянной разделения λ воспользуемся условием постоянства расхода (2.13), которое с помощью (2.18) запишем для множителя $u(\tau)$, характеризующего распределение радиальной скорости по угловой координате, в виде

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} u(\tau)d\tau = \xi_0^2(\tau_2 - \tau_1). \tag{2.38}$$

Рассмотрим интеграл, стоящий в левой части (2.38)

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} u(\tau)d\tau = \frac{\lambda}{6}\left[A\int_{\tau_1}^{\tau_2} P_2(\tau)d\tau + B\int_{\tau_1}^{\tau_2} Q_2(\tau)d\tau - (\tau_2 - \tau_1)\right]. \tag{2.39}$$

Интеграл от функции Лежандра первого рода вычисляется без особого труда

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} P_2(\tau)d\tau = \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{2}\left(\tau_2^2 + \tau_2\tau_1 + \tau_1^2 - 1\right). \tag{2.40}$$

Опуская громоздкие промежуточные выкладки для интеграла от функции Лежандра второго рода второго порядка, приведем сразу результат интегрирования

$$\begin{aligned}\int_{\tau_1}^{\tau_2} Q_2(\tau)d\tau &= \frac{3}{4}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau_2 \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}d\tau - \frac{1}{4}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau} - \frac{3}{4}\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left[\tau_2\left(\tau_2^2 - 1\right)\ln\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2} - \tau_1\left(\tau_1^2 - 1\right)\ln\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1} - 2\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right)\right].\end{aligned} \tag{2.41}$$

Подставляя выражения (2.40) и (2.41) в (2.39) и, затем, в (2.38), получаем формулу для определения постоянной разделения λ

$$\lambda = \frac{6\xi_0^2}{\frac{A}{2}\left(\tau_2^2 + \tau_2\tau_1 + \tau_1^2 - 1\right) + B_1(\tau)}, \tag{2.42}$$

где $B_1(\tau) = \frac{B}{4}\left[\frac{\tau_2\left(\tau_2^2-1\right)}{\tau_2-\tau_1}\ln\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2} - \frac{\tau_1\left(\tau_1^2-1\right)}{\tau_2-\tau_1}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau} - 2\left(\tau_2+\tau_1\right)\right] - 1.$

Из (2.23) определяем значение производной функции f по безразмерной радиальной координате

$$f'(\xi) = -\frac{\lambda}{\xi^4}, \tag{2.43}$$

подставляя которое в (2.21), получаем дифференциальное уравнение для определения распределения безразмерного давления П в канале

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -\frac{6u}{\xi^4} - \frac{\lambda}{\xi^4}. \tag{2.44}$$

Интегрируя (2.44) по ξ, получим для $\Pi(\xi,\tau)$ выражение

$$\Pi(\xi,\tau) = \frac{2}{\xi^3}u(\tau) + \frac{\lambda}{3\xi^3} + C_1(\tau), \tag{2.45}$$

где C_1 – постоянная интегрирования по переменной ξ, и в общем случае, зависящая от угловой координаты $C_1(\tau)$.

Но поскольку должно выполняться уравнение (2.6), то значение C_1 не зависит от τ.

Условие однозначности для определения давления (2.10) у нас записано для среднего по поперечному сечению безразмерного давления на входе в канал, и чтобы им воспользоваться, усредним равенство (2.45) по безразмерной площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала сферической координатной поверхностью (2.15)

$$\bar{\Pi}(\xi) = \frac{1}{2\pi\xi^2\left(\tau_1-\tau_2\right)}\left\{\int_{\tau_1}^{\tau_2} -2\pi\xi^2\left[\frac{2u(\tau)}{\xi^3} + \frac{\lambda}{3\xi^3} + C_1\right]d\tau\right\} =$$

(2.46)

$$= \frac{2\xi_0^2}{\xi^3} + \frac{\lambda}{3\xi^3} + C_1.$$

И теперь, используя условие (2.10), определяем значение C_1

$$C_1 = -\frac{2}{\xi_0} - \frac{\lambda}{3\xi_0^3}, \tag{2.47}$$

и, подставляя его в (2.46), находим выражение, определяющее распределение вдоль течения среднего по площади поперечного сечения соосного конического диффузора с общей вершиной границ безразмерного давления

$$\bar{\Pi}(\xi) = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3}\left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3}\right). \tag{2.48}$$

С помощью (2.47) и (2.45) мы можем записать распределение безразмерного давления в соосном коническом диффузоре при медленном течении вязкой жидкости

$$\Pi(\xi, \tau) = \frac{2}{\xi^3}u(\tau) + \frac{\lambda}{3}\left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3}\right) - \frac{2}{\xi_0}. \tag{2.49}$$

Итак, мы получили выражения (2.19), (2.35) и (2.48), которые и являются решением задачи (2.5)–(2.10), (2.13). Полагая в этих выражениях $\theta_2 = \pi/2$ или $\tau_2 = 0$, найдем решение для медленного осесимметричного радиального расходящегося течения между плоскостью и конусом с вершиной, лежащей на плоскости, и осью, перпендикулярной к ней. В этом случае выражения (2.42) и (2.35) примут соответственно следующий вид:

$$\lambda = \frac{6\xi_0^2}{\tau_1^2 + \dfrac{1 + 2P_2(\tau_1)}{4Q_2(\tau_1)}\left[(\tau_1 - 1)\ln\dfrac{1+\tau_1}{1-\tau_1} - 2\tau_1\right] - 2}; \tag{2.50}$$

$$u = \frac{\lambda}{6}\left[2P_2(\tau) + \frac{1 + 2P_2(\tau_1)}{Q_2(\tau_1)}Q_2(\tau) - 1\right]. \tag{2.51}$$

Очевидно, что выражения (2.19) и (2.48) сохраняют свой вид для любых значений полууглов раскрытия граничных поверхностей, удовлетворяющих ранее принятым ограничениям (см. главу 1).

Определим значение выражения (2.35) при $\tau_1 \to 1$, что соответствует $\theta_1 \to 0$. Прямая подстановка значения $\tau_1 = 1$ в выражение для B (2.37) дает $\lim\limits_{\tau_1 \to 1} B = B(1) = 0$, а в (2.36) приводит к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$, раскрывается которая с помощью троекратного применения правила Лопиталя [117], и в результате получаем

$$A(1) = \frac{1}{P_2(\tau_2)}. \tag{2.52}$$

Далее вычисляем значение λ при $\tau_1 = 1$

$$\lim_{\tau_1 \to 1} \lambda = \frac{6\xi_0^2}{\frac{A}{2}\left(\tau_2^2 + \tau_1\tau_2 + \tau_1^2 - 1\right) - 1} = \frac{12\xi_0^2 P_2(\tau_2)}{1 - 2\tau_2^2 + \tau_2}, \tag{2.53}$$

и, подставляя (2.52) и (2.53) в (2.35), находим распределение функции u по угловой координате при $\theta_1 \to 0$

$$u(\tau) = \frac{3\left(\tau^2 - \tau_2^2\right)}{1 - 2\tau_2^2 + \tau_2}. \tag{2.54}$$

Если мы подставим выражение (2.53) в (2.19), умножим числитель и знаменатель получившегося соотношения на $(1 - \tau_2)$, то после проведения элементарных преобразований, получим для профиля безразмерной скорости распределение Харрисона [93, 118]

$$v(\xi, \tau) = \frac{3(1 - \tau_2)}{\xi^2} \frac{\tau^2 - \tau_2^2}{1 - 3\tau_2^2 - 2\tau_2^3}. \tag{2.55}$$

При подстановке (2.53) в (2.48) получаем формулу

$$\bar{\Pi}(\xi)=\frac{2\xi_0^2\left(\tau_2^2+\tau_2\right)}{1-2\tau_2^2+\tau_2}\left(\frac{1}{\xi^3}-\frac{1}{\xi_0^3}\right), \qquad (2.56)$$

которая совпадает с выражением, полученным автором для определения распределения среднего по площади поперечного сечения безразмерного давления при течении вязкой жидкости в коническом диффузоре [93].

Таким образом, для полученного нами решения задачи медленного диффузорного течения вязкой жидкости в соосном коническом канале (2.35), (2.48) выполняется предельный переход к решению задачи ламинарного течения в круглом коническом диффузоре (2.55), (2.56), что говорит о правильности найденного решения и опосредовано об его адекватности опытным данным, поскольку зависимость, к которой осуществлен предельный переход, хорошо согласуется с опытными данными. Правильность решения также подтверждает обычная проверка с помощью подстановки выражений (2.19), (2.35) и (2.49) в исходную систему уравнений (2.5) – (2.10). Проверка выполняется достаточно просто, но вследствие большого объема математических преобразований мы ее здесь не приводим.

2.4. Анализ полученного решения

И на модели без труда
Любой вопрос решить всегда

Г. У. Лонгфелло

В предыдущем разделе мы получили аналитическое решение задачи аксиально симметричного ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале в случае преобладающего влияния вязких сил. Решение, определенное выражениями (2.19), (2.35) и (2.48), может быть применимо для любых вариантов рассматриваемых течений в отличие от решений, получаемых численными методами. Аналитические выражения для расчета параметров течения позволяют определять наиболее общие закономерности, присущие изучаемым видам движения жидкости.

Наряду с этим с помощью аналитических решений можно определить частные особенности течений, учитываемые в постановке задачи. После этих кратких замечаний начнем исследование найденного нами решения с рассмотрения распределения скорости жидкости в канале.

2.4.1. Анализ и визуальное представление распределения скорости ламинарного течения в кольцевом коническом диффузоре

Математика обеспечила основу для интеллектуального воображения, с помощью которого люди науки взялись за наблюдения природы.

А. Н. Уайтхед

Параметрами, определяющими общее решение задачи течения в кольцевом коническом диффузоре (2.19), (2.35) и (2.48), являются значения полууглов раскрытия граничных поверхностей канала в выбранных нами координатах τ_1 и τ_2, а также безразмерная радиальная координата входа в канал – ξ_0. Проанализируем влияние данных параметров на распределение скорости и давления в канале. Рассмотрим сначала особенности распределения безразмерной скорости в канале, которая определяется выражениями (2.19) и (2.35).

При формулировке задачи в безразмерном виде мы отмечали, что под масштабом линейной величины h_0 можно подразумевать некоторое значение, не связанное с геометрией задачи, и тогда решение будет записано в наиболее общем виде. Но если мы в качестве параметра обезразмеривания линейного размера выбираем величину h_0, которую определили как расстояние от кромки внешней границы на входе в канал до внутренней границы (рис. 2.1), то в этом случае между h_0 и R_0 существует однозначное соответствие

$$h_0 = R_0 \mathrm{tg}(\theta_2 - \theta_1). \qquad (2.57)$$

Откуда следует, что безразмерная координата входа в канал будет равна

$$\xi_0 = \operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1). \tag{2.58}$$

Подставляя это выражение в (2.18) и в (2.48), соответственно получим:

$$\overline{v} = \left[\frac{\operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1)}{\xi}\right]^2; \tag{2.59}$$

$$\overline{\Pi}(\xi) = \frac{\lambda + 6\left[\operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1)\right]^2}{3}\left[\frac{1}{\xi^3} - \operatorname{tg}^3(\theta_2 - \theta_1)\right], \tag{2.60}$$

где λ также определяется с помощью подстановки (2.57) в (2.42), с помощью чего определяется и распределение безразмерной скорости v и величины u в канале: (2.19) и (2.49) соответственно.

Следовательно, при выбранных нами безразмерных переменных решение рассматриваемой задачи определяется только двумя параметрами – θ_2 и θ_1.

На рисунке 2.2. представлено распределение средней по площади поперечного сечения скорости вдоль канала с разностью полууглов раскрытия границ $\Delta\theta = 21°$. Данное распределение справедливо для любых соосных конических диффузоров с разностью полууглов раскрытия границ 21°. Здесь мы выбрали значение координаты выхода из диффузора в три раза больше, чем ξ_0, т.е. $\xi_1 = 3\xi_0$.

В отличие от распределения средней скорости $\overline{v}$ распределение локальной безразмерной скорости v будет зависеть и от величины значений полууглов раскрытия граничных поверхностей θ_2 и θ_1. Для значений $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 24°$ распределение v показано на рисунке 2.3. Характерной особенностью распределения скорости в данном случае является существенная его несимметрия относительно серединной поверхности канала, т.е. конической поверхности с полууглом раскрытия $\dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

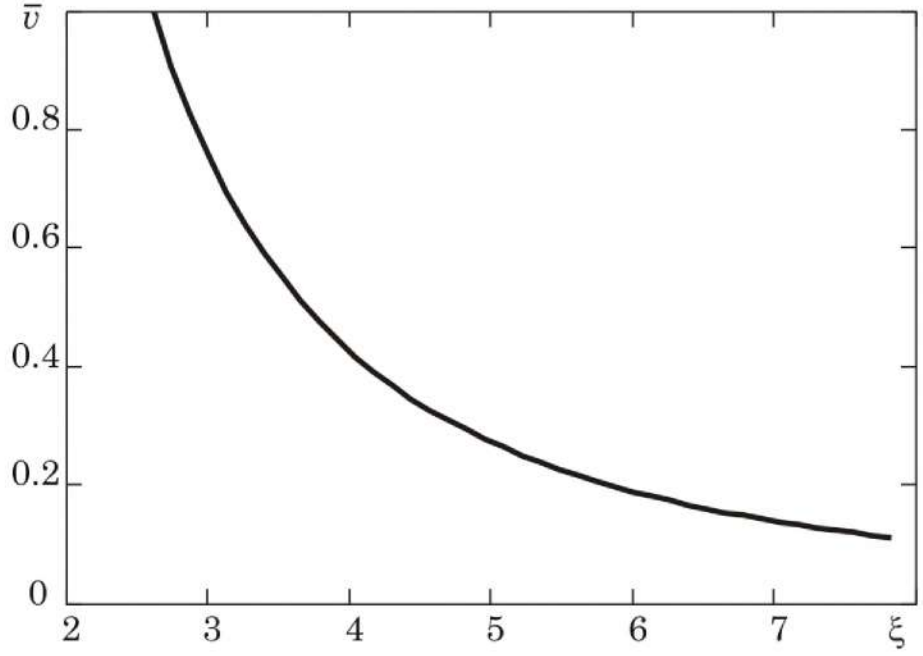


Рис. 2.2. Распределение средней безразмерной скорости при диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ и определяющими геометрическими параметрами: $\Delta\theta = 21°$ и соотношением радиальных координат входа в канал и выхода из него $\xi = 3\xi_0$.

Локализацию максимального значения скорости можно определить из условия $\dfrac{du}{d\tau} = 0$, что приводит к нелинейному уравнению

$$2A\tau + B\tau \ln\frac{1+\tau}{1-\tau} - \frac{4}{3}\frac{B}{1-\tau^2} = 0, \qquad (2.61)$$

где A и B определяются выражениями (2.36) и (2.37) соответственно.

Для рассматриваемого сейчас случая течения максимальное значение u, а значит и v, локализуется на значении $\tau = 0.2038$, что соответствует величине угловой координаты $\theta = 11.675°$ (рис. 2.4).

Несимметричность распределения относительно серединной поверхности канала величины u по угловой координате в данном случае аналогичны несимметричности распределения скорости

жидкости при ее течении в прямолинейном кольцевом канале [119]. И связана она с различием в величине радиусов кривизны поверхностей, являющихся границами канала. Как мы видели, распределение безразмерной скорости также несимметрично, но в отличие от течения в прямолинейном кольцевом канале в кольцевом коническом диффузоре распределение v уменьшается по абсолютной величине вдоль течения (рис. 2.4).

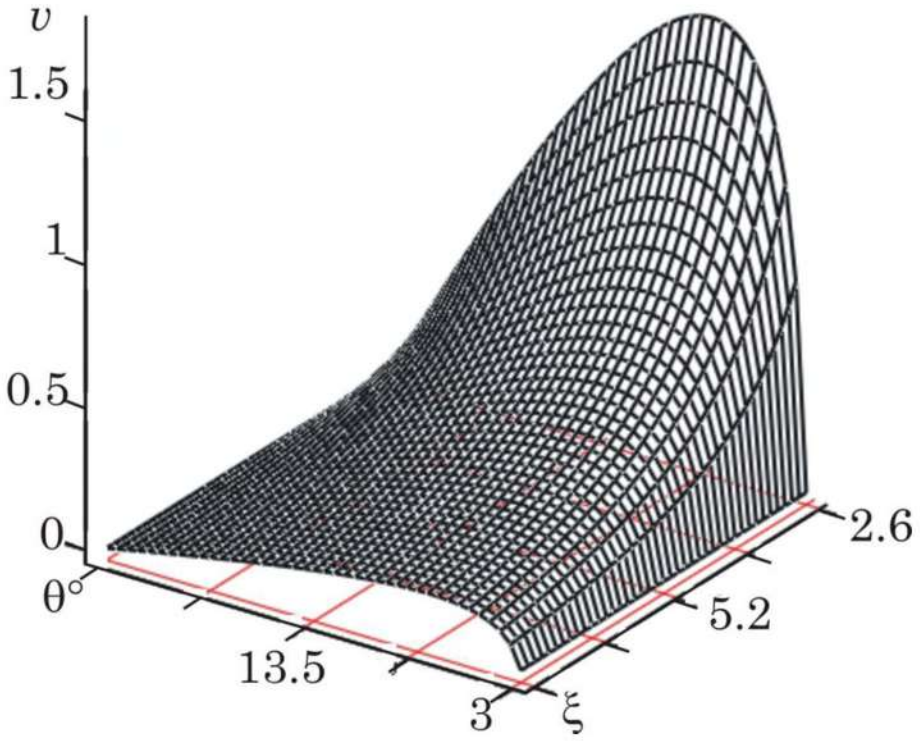


Рис. 2.3. Распределение безразмерной скорости при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ с полу углами их раскрытия $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 24°$ и соотношением радиальных координат входа в канал и выхода из него $\xi = 3\xi_0$

При течении в прямолинейном кольцевом канале профили скорости при уменьшении разности между радиусами границ приближается к профилю скорости ламинарного течения в плоском ка-

нале [119], т.е. к профилю скорости, симметричному относительно серединной поверхности канала.

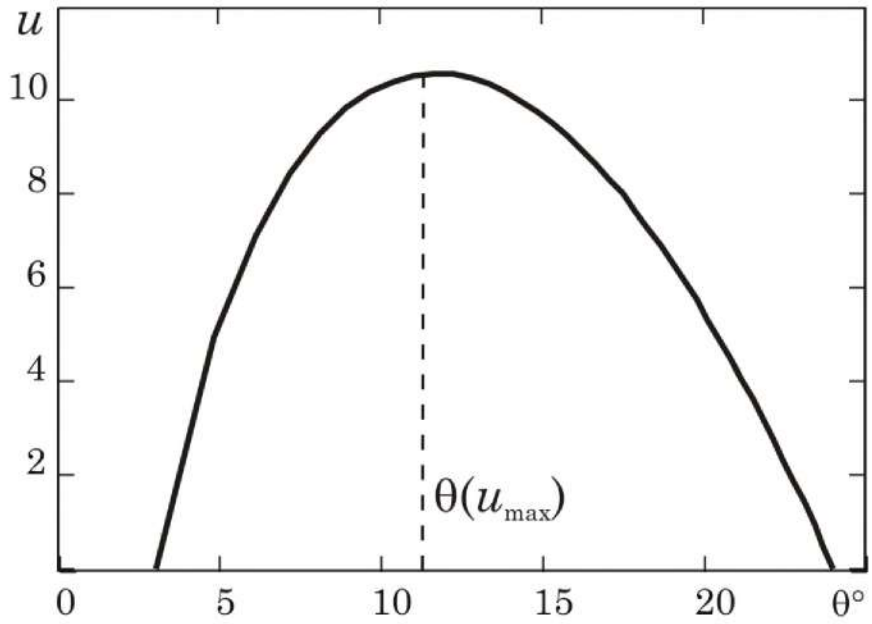


Рис. 2.4. Распределение множителя u, характеризующего угловую зависимость скорости жидкости при ее ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с полууглами их раскрытия $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 24°$. $\theta(u_{max})$ – угловая координата на которой локализуется максимальная скорость.

Аналогично тому, как в прямолинейном кольцевом канале уменьшение толщины слоя жидкости при постоянном значении радиуса одной из границ приводит к уменьшению различия в радиусе кривизны границ в соосном коническом канале, уменьшение разности между полууглами раскрытия $\Delta\theta$ при постоянном значении одного из полууглов раскрытия конических границ приводит к уменьшению различия в локальных радиусах кривизны поверхностей, поскольку локальный радиус кривизны конической границы определяется соотношением

$$r_{Ci} = R \cdot \mathrm{tg}\theta_i, \tag{2.62}$$

где $i=1;\ 2$ – номер границ канала, и если специально не будет оговорено, то будем считать в соосном коническом канале, что внутренняя граница соответствует значению индекса $i=1$, а внешняя – $i=2$.

Для выбранного нами значения полуугла раскрытия внешней границы канала $\theta_2=24°$ уже при $\Delta\theta=6°$, т.е. при $\theta_1=18°$, распределение скорости становится практически симметричным относительно серединной поверхности канала: $\theta_{midl}=21°$, т.к. $\theta(u_{\max})=20{,}93°$ (рис. 2.5).

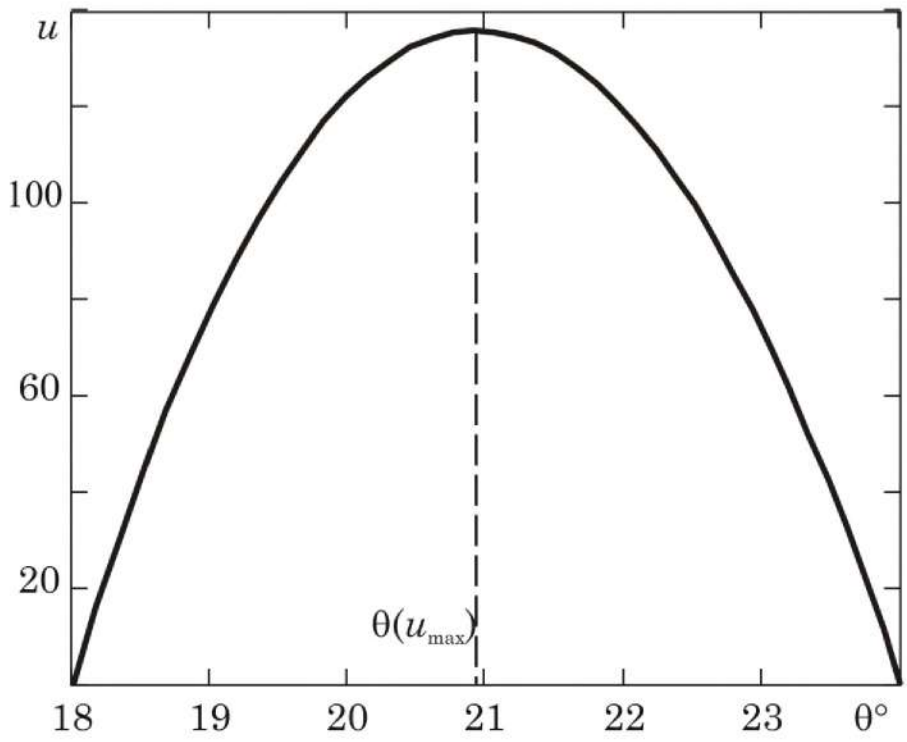


Рис. 2.5. Распределение множителя u, характеризующего угловую зависимость скорости жидкости при ее ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с полууглами их раскрытия $\theta_1 = 18°$, $\theta_2 = 24°$; $\theta(u_{\max})$ – угловая координата, на которой локализуется максимальная скорость.

Мы также можем уменьшить относительное различие радиусов кривизны границ, увеличивая θ_2 при постоянном значении $\Delta\theta$.

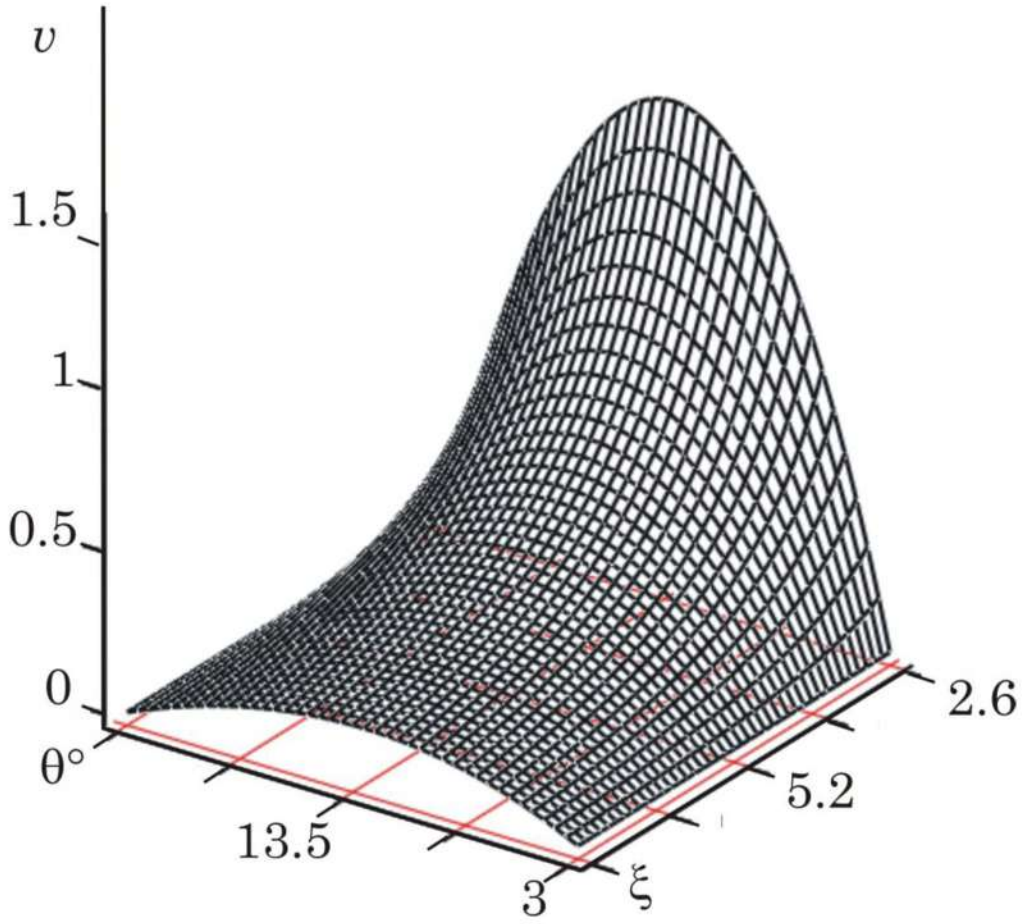


Рис. 2.6. Распределение безразмерной скорости при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ с полууглами их раскрытия $\theta_1 = 63°$, $\theta_2 = 84°$ и соотношением радиальных координат входа в канал и выхода из него $\xi = 3\xi_0$.

Для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с разностью полууглов раскрытия границ $\Delta\theta = 21°$, но при $\theta_2 = 84°$ распределение скорости по угловой координате практически симметрично относительно серединной поверхности канала (рис. 2.6). Максимальное значение скорости локализуется на угловой координате со значением, равным $\theta(u_{\max}) = 73.4°$, а серединная поверхность канала локализуется на координате $\theta_{midl} = 73.5°$ (рис. 2.7).

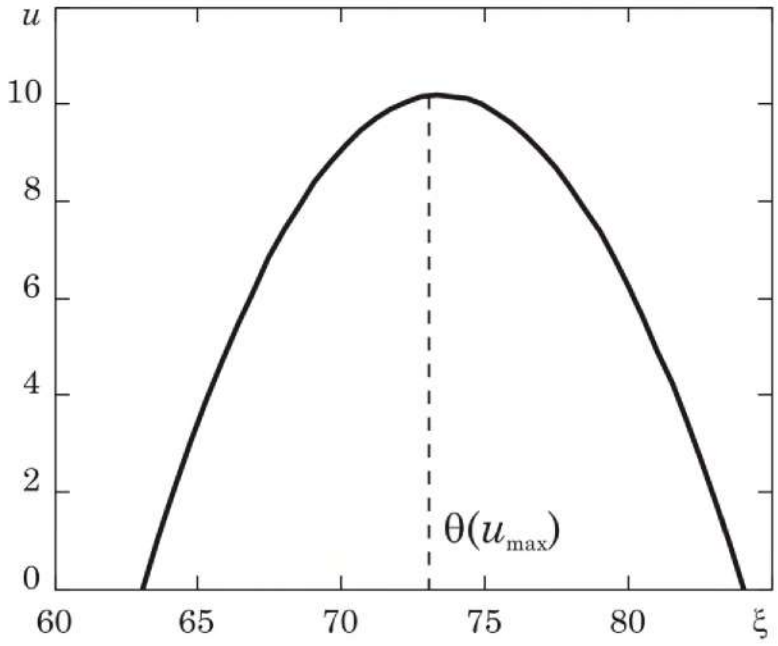


Рис. 2.7. Распределение множителя u, характеризующего угловую зависимость скорости жидкости при ее ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с полууглами их раскрытия $\theta_1 = 18°$, $\theta_2 = 24°$; $\theta(u_{max})$ – угловая координата, на которой локализуется максимальная скорость.

2.4.2. Распределение безразмерного давления и его градиента при ползущем течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ

Самое удивительное свойство нашего мира – это то, что он познаваем.

А. Эйнштейн

Вследствие несимметричности профиля скорости относительно серединной поверхности канала при ламинарном течении жидкости в соосном коническом канале распределения скоростей сдвига на границах канала вдоль течения будут различны. Действительно, принимая во внимание, что скорость сдвига в размерных сферических координатах записывается как

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \tag{2.63}$$

Поэтому в безразмерном виде скорость сдвига на границах канала запишется в виде зависимости

$$\dot{\gamma}_{STi} = -\frac{\sqrt{1-\tau_i^2}}{\xi^3}\left.\frac{\partial v}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_i}, \tag{2.64}$$

которая представлена на рисунке 2.8, а для течения в канале с $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 24°$. В соответствии с распределением скорости (рис. 2.4) скорость сдвига на внутренней границе значительно больше по абсолютной величине, чем на внешней.

Зная распределение величины скорости сдвига на границах канала вдоль течения (2.63), мы можем определить распределение удельной силы, действующей на твердую поверхность со стороны жидкости

$$F_i(R) = 2\pi\mu\dot{\Gamma}_i \sin\theta_i, \tag{2.65}$$

или в безразмерном виде

$$\tilde{f}(\xi)_i = -\frac{1-\tau_i^2}{\xi^2}\left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_i}. \tag{2.66}$$

Несмотря на то, что скорость сдвига на внутренней границе канала по абсолютной величине больше, чем на внешней, удельное усилие, действующее со стороны жидкости на твердую поверхность, т.е. сила, действующая на единицу длины границы канала на внешней поверхности, по абсолютной величине оказывается больше, чем на внутренней (рис. 2.8). Это происходит вследствие того, что смачиваемый периметр для выбранной радиальной координаты на внешней границе больше, чем на внутренней. Вдоль течения абсолютная величина удельной силы, действующей на твердую поверхность, убывает по квадратичной зависимости (рис. 2.8 б) (2.66).

Именно трение на границах канала приводит к появлению градиента давления при ползущих течениях вязких жидкостей, т.е. в тех случаях, когда инерционными эффектами пренебрегается.

Поэтому и градиент безразмерного среднего по поперечному сечению канала давления будет уменьшаться вдоль течения. Распределение градиента безразмерного среднего давления можно получить из (2.48)

$$\frac{d\bar{\Pi}}{d\xi} = -\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi^4} = -\bar{v}^2\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^4} = -\bar{v}^2\frac{\lambda + 6\operatorname{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{ctg}^4(\theta_2 - \theta_1)}. \qquad (2.67)$$

Последнее соотношение показывает, что градиент среднего безразмерного давления при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре полностью определяется геометрическими параметрами канала. Это же можно сказать и о распределении средней безразмерной скорости жидкости (2.18) и о распределении безразмерного давления (2.48).

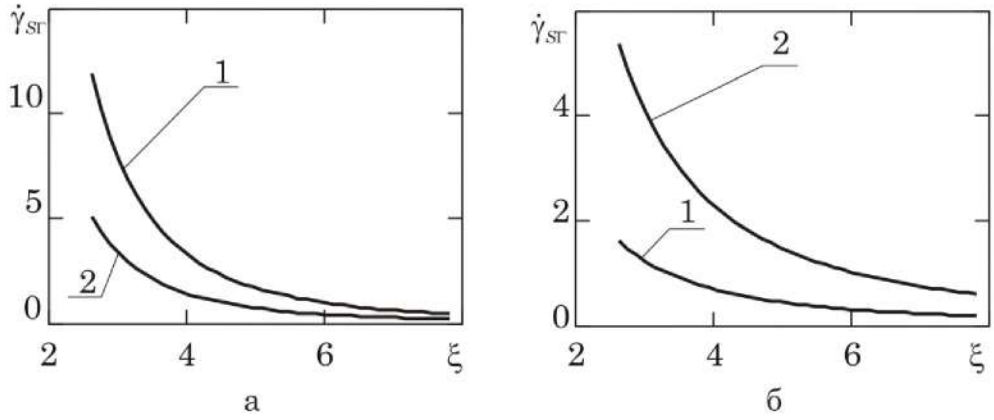


Рис. 2.8. а – распределение вдоль течения модуля безразмерной скорости сдвига на границе соосного конического диффузора; б – распределение модуля безразмерной удельной силы, действующей со стороны жидкости на границы канала; 1 – на внутренней границе с полууглом раскрытия $\theta_1 = 3°$; 2 – на внешней границе с полууглом раскрытия $\theta_2 = 24°$.

Функционально градиент давления изменяется вдоль течения, как вторая степень средней по поперечному сечению безразмерной скорости жидкости (2.67). Но поскольку $\bar{\Pi}'_\xi$ зависит еще и от полууглов раскрытия границ канала, то в каналах с одинаковыми распределениями $\bar{v}$, но с различными углами раскрытия границ, распределения градиента давления будут различны (рис. 2.9).

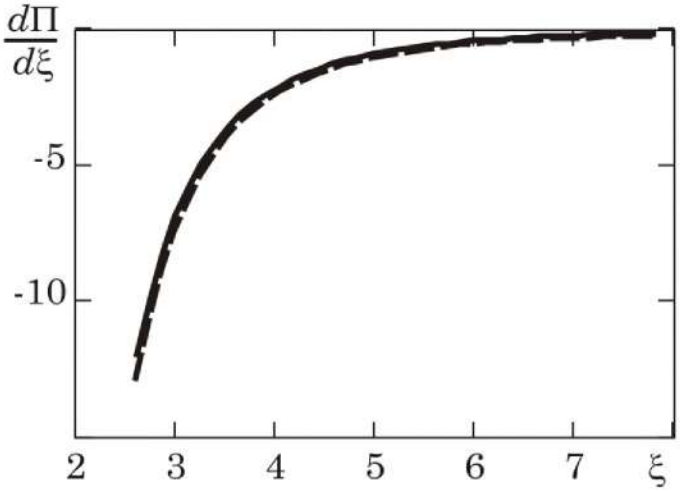


Рис. 2.9. Распределение безразмерного градиента давления при ползущем течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия, равными для внутренней границы $\theta_1 = 3°$, и для внешней $\theta_2 = 24°$ – сплошная линия и штриховая линия для канала с полууглами раскрытия границ: $\theta_1 = 63°$ и $\theta_2 = 84°$.

Абсолютная величина градиента давления максимальна вблизи входа в соосный конический диффузор, а затем убывает вдоль течения вместе с уменьшением $\overline{v}$. При этом безразмерный градиент среднего по поперечному сечению канала давления по абсолютной величине будет больше в канале с большими полууглами раскрытия границ при одинаковой их разности $\Delta\theta$ (рис. 2.9). Этими свойствами градиента давления будет полностью определяться и распределение безразмерного давления при ползущем течении в соосном коническом диффузоре. Наибольшее падение давления наблюдается в начале течения, где наибольшая средняя скорость и градиент давления (рис. 2.9). В полном соответствии с распределением градиента среднего безразмерного давления изменение безразмерного давления несколько значительнее в канале с большими значениями полууглов раскрытия граничных поверхностей при постоянной их разности $\Delta\theta$ (рис. 2.10).

Заметим, что при больших углах раскрытия вследствие уменьшения относительного различия в радиусах кривизны практически совпадают распределения безразмерных скоростей сдвига на границах канала и безразмерных удельных сил, действующих со стороны жидкости на твердые границы (рис. 2.11).

Если в качестве масштабного множителя h_0 выбрать величину радиальной координаты входа в диффузор, т.е. положить $h_0 = R_0$, то написание некоторых полученных ранее формул упро-

стится, поскольку величина ξ_0 станет равной единице. И, следовательно, выражение (2.48) запишется, как

$$\bar{\Pi}(\xi) = \frac{\lambda + 6}{3}\left(\frac{1}{\xi^3} - 1\right), \qquad (2.48\ \text{а})$$

где $\xi = R/R_0$.

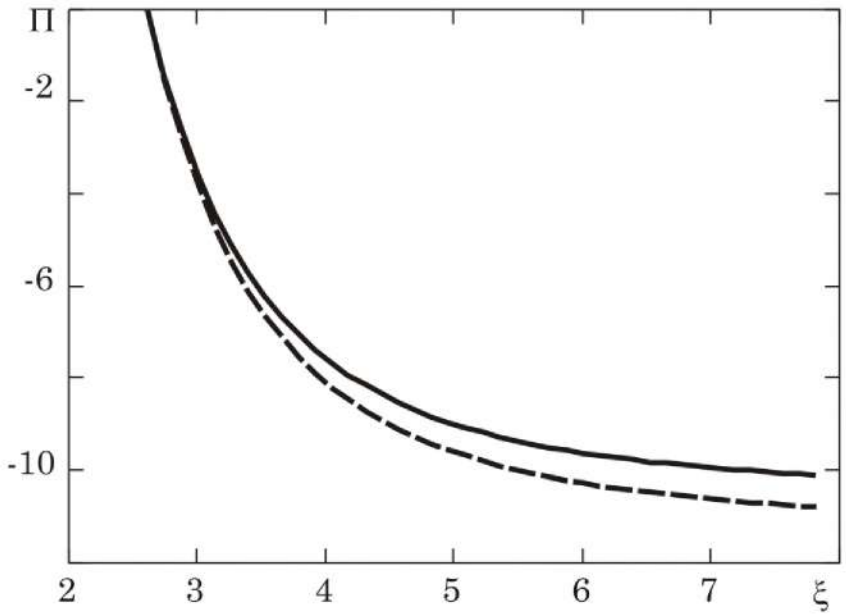


Рис. 2.10. Распределение безразмерного давления при ползущем течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия, равными для внутренней границы $\theta_1 = 3°$, и для внешней $\theta_2 = 24°$ – сплошная линия и штриховая линия для канала с полууглами раскрытия границ: $\theta_1 = 63°$ и $\theta_2 = 84°$.

Значение λ здесь также изменится в соответствии с равенством $\xi_0 = 1$.

Распределение безразмерного давления вдоль течения в канале с разностью полууглов раскрытия граничных поверхностей $\Delta\theta = 21°$ в зависимости от полуугла раскрытия внешней поверхности θ_2, рассчитанные по зависимости (2.48 а), приведено на рисунке 2.12. Мы видим, что зависимость $\bar{\Pi}(\xi)$ существенно меняется в диапазоне $\theta_2 \in [24°, 30°]$, а затем остается практически постоянной.

А это означает, что безразмерное давление $\bar{\Pi}$ на выходе их канала слабо зависит от θ_2 при постоянном значении $\Delta\theta$ и больших величинах полууглов раскрытия граничных конических поверхностей.

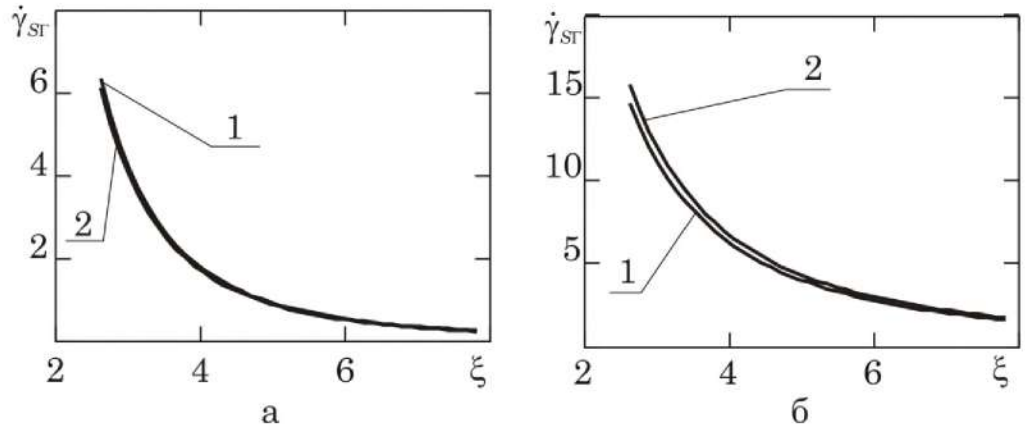


Рис. 2.11. а – распределение вдоль течения модуля безразмерной скорости сдвига на границе соосного конического диффузора; б – распределение модуля безразмерной удельной силы, действующей со стороны жидкости на границы канала; 1 – на внутренней границе с полууглом раскрытия $\theta_1 = 63°$; 2 – на внешней границе с полу углом раскрытия $\theta_2 = 84°$.

Но для всего интервала возможного изменения величины полууглов раскрытия границ канала, что эквивалентно возможному диапазону изменения θ_2 при постоянной величине $\Delta\theta$, наибольшее изменение безразмерного давления происходит в начале канала, а при больших ξ в пределах канала $\bar{\Pi}$ изменяется незначительно (рис. 2.12). С этим связана еще одна особенность распределения давления в соосных конических каналах, а именно, это конечная величина текущего безразмерного давления $\bar{\Pi}(\xi)$ при стремлении безразмерной радиальной координаты *ad infinitum*. Действительно, переходя в (2.48) к пределу $\xi \to \infty$, получим

$$\bar{\Pi}(\infty) = -\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3\xi_0^3}, \tag{2.68}$$

или с учетом (2.58) это выражение мы можем записать в виде

$$\bar{\Pi}(\infty) = -\frac{1}{3}\mathrm{tg}(\theta_2 - \theta_1)\left[6 + \lambda \mathrm{tg}^2(\theta_2 - \theta_1)\right]. \qquad (2.69)$$

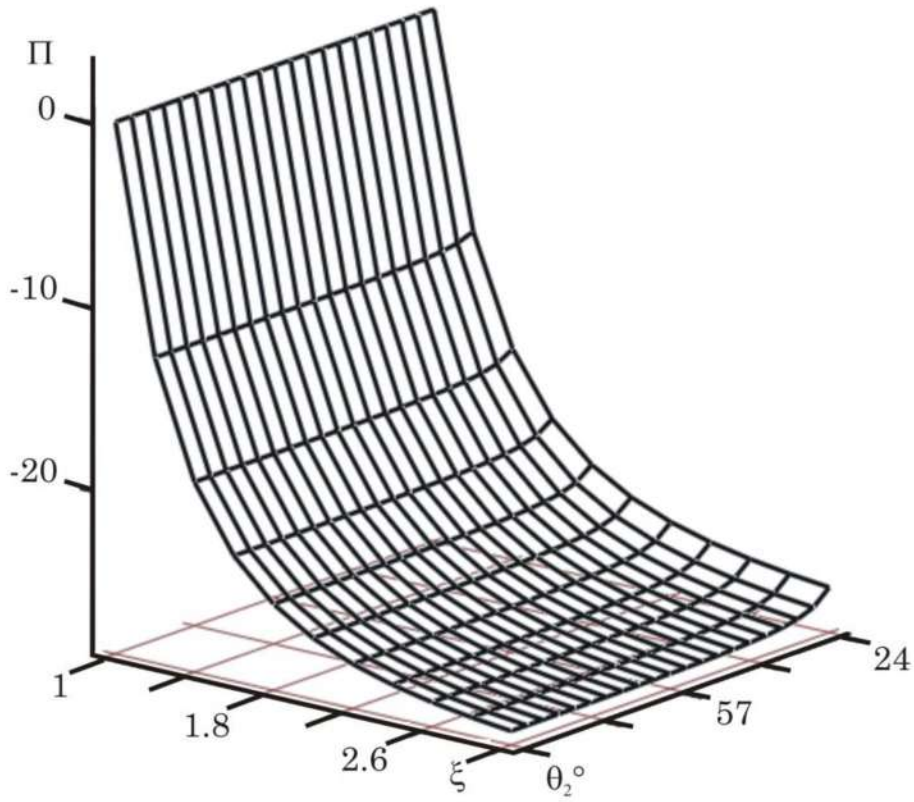


Рис. 2.12. Рраспределение безразмерного давления вдоль канала при ползущем течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и разностью полууглов раскрытия границ $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 21°$ в зависимости от полуугла раскрытия внешней границы канала. П определялось по зависимости (2.48 а).

При выборе в качестве линейного масштаба радиального радиуса входа в канал R_0 безразмерное давление в бесконечно длинном канале (2.68) запишется как

$$\bar{\Pi}(\infty) = -\left(2 + \frac{\lambda}{3}\right). \qquad (2.66\ \text{а})$$

Соотношение (2.3) и соображения, высказанные нами при обсуждении начального условия для давления (1.65), позволяет заключить, что перепад размерного давления при ползущем диффузорном течении в бесконечно длинном соосном коническом канале с общей вершиной границ является величиной конечной. Этот результат в корне отличается от распределения перепада давления при течении жидкости в прямолинейном канале. Здесь при стремлении длины канала к бесконечности перепад давления также стремится к бесконечности.

Выражения (2.68) и (2.48) позволяют определить значение безразмерной радиальной координаты ξ_∞, на которой безразмерное давление будет отличаться от величины $\bar{\Pi}(\infty)$ не более, чем на 1 %, т.е. для которой выполняется условие

$$\left|\frac{\bar{\Pi}(\xi)-\bar{\Pi}(\infty)}{\bar{\Pi}(\infty)}\right| \le 0.01. \tag{2.70}$$

Откуда получаем

$$\xi \ge \frac{\xi_0}{\sqrt[3]{0.01}} = 4.64\xi_0, \tag{2.71}$$

или с учетом (2.58) запишем

$$\xi \ge 4.64\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1). \tag{2.72}$$

Данное неравенство имеет большое значение для практических расчетов, поскольку показывает интервал, на котором произойдет 99 % всего возможного изменения давления в канале при ламинарном диффузорном течении, а величина этого интервала равна

$$\Delta\xi = 4.64\xi_0-\xi_0 = 3.64\xi_0 = 3.64\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1), \tag{2.73}$$

т.е. зависит только от разности полууглов раскрытия конических поверхностей, в то время как сама величина $\bar{\Pi}(\infty)$ зависит как от $\Delta\theta$, так и от θ_2 (2.69) через зависимость $\lambda(\theta_2)$.

В пределах этого интервала $\Delta\xi$ безразмерное давление также будет зависеть как от разности между полууглами раскрытия граничных конусов, так и от абсолютной величины раскрытия границ. Рассмотрим эту зависимость для канала с разностью полууглов раскрытия границ $\Delta\theta = 21°$ и соотношением координаты входа и выхода $\xi_1 = 3\xi_0$.

Выражение для определения давления на выходе из соосного конического диффузора, радиальная координата выхода из которого в n раз больше координаты входа, т.е. при выполнении условия

$$\xi_1 = n\xi_0, \tag{2.74}$$

запишется в виде

$$\bar{\Pi} = \frac{1-n^3}{3n^3}\left[6 + \lambda \mathrm{tg}^2(\theta_2 - \theta_1)\right]\mathrm{tg}(\theta_2 - \theta_1). \tag{2.75}$$

Если $n = 3$, то полученное выражение примет вид

$$\bar{\Pi} = -\frac{26}{81}\left[6 + \lambda \mathrm{tg}^2(\theta_2 - \theta_1)\right]\mathrm{tg}(\theta_2 - \theta_1). \tag{2.76}$$

Зависимость $\bar{\Pi}(\Delta\theta)\big|_{\theta_2=\mathrm{const}}$ является преобладающей для распределения (2.76) (рис. 2.13). С увеличением $\Delta\theta$ безразмерное давление на выходе из диффузора значительно уменьшается по абсолютной величине в то время, как зависимость $\bar{\Pi}(\theta_2)\big|_{\Delta\theta=\mathrm{const}}$ изменяется не более, чем на 4 % во всем диапазоне изменения определяющих параметров. Наибольшие изменения наблюдаются при $\Delta\theta = 3°$ (рис. 2.14), это ~ 4 %, а для $\Delta\theta = 21$ % $\bar{\Pi}(\theta_2)\big|_{\Delta\theta=\mathrm{const}}$ меняется не более, чем на 0,003 % (рис. 2.14).

Заметим, что выражения (2.75) и (2.69) отличаются друг от друга только постоянным множителем $\frac{n^3-1}{n^3}$, и если мы знаем распределение среднего по поперечному сечению канала безразмерного давления на бесконечности для диффузорного течения в соосном коническом канале (рис. 2.15) и отношение радиальной координаты, на которой необходимо определить П и радиальной координаты

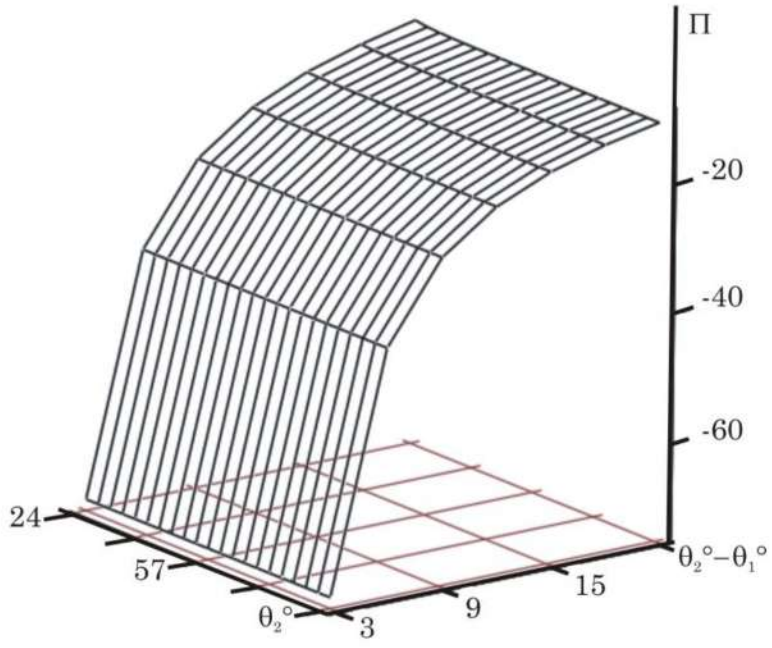


Рис. 2.13. Распределение безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора с общей вершиной границ и соотношением радиальных координат входа и выхода $\xi_1 = 3\xi_0$ от полу угловраскрытия его границ, которые меняются в интервалах: $\theta_2 \in [24°, 90°]$; $\theta_2 - \theta_1 \in [3°, 21°]$.

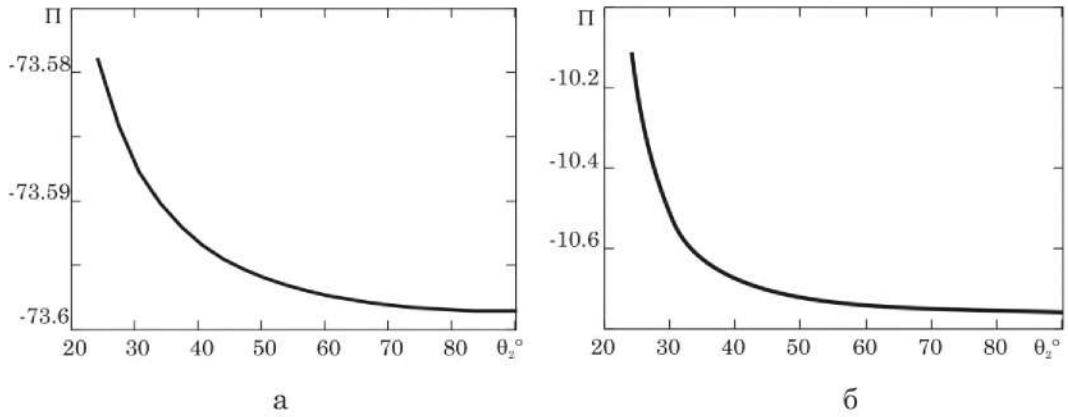


Рис. 2.14. Зависимость безразмерного давления на выходе из кольцевого конического диффузора от полуугла раскрытия внешней конической границы: а– для канала с геометрическими соотношениями: $\xi_1 = 3\xi_0$, $\theta_2 - \theta_1 = 3°$; б – для канала с $\xi_1 = 3\xi_0$, $\theta_2 - \theta_1 = 21°$.

входа в него $-n$, то легко определим среднее безразмерное давление на необходимой координате

$$\bar{\Pi}(n\xi_0) = \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)\bar{\Pi}(\infty), \tag{2.77}$$

а значит, можно будет вычислить и перепад давления в канале.

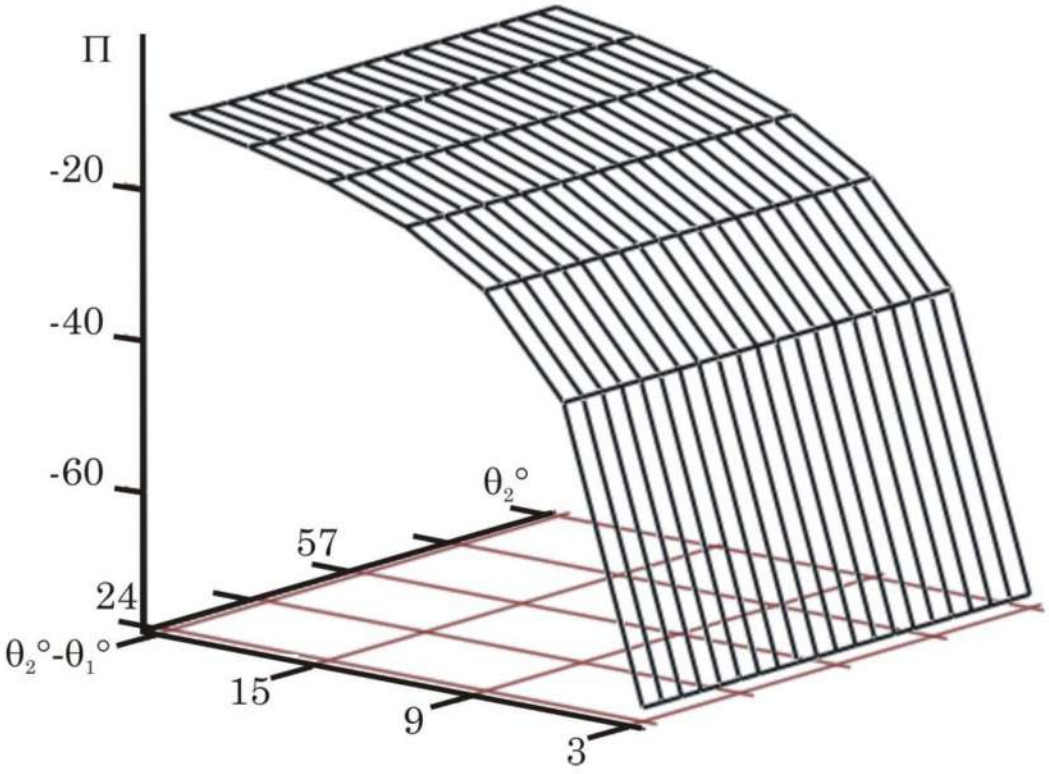


Рис. 2.15. Безразмерное давление в соосном коническом диффузоре на бесконечно большом расстоянии от входа в зависимости от разности полууглов раскрытия границ и полуугла раскрытия внешней конической поверхности.

Отсюда следует, что распределения, представленные на рисунке 2.14, получаются из распределения на рисунке 2.15 при его умножении на 0.96.

Заметим, что если выбрать за линейный масштаб величину R_0, то величины (2.71) и интервала (2.73) определятся как:

$$\xi \geq 4.64; \tag{2.71 а}$$

$$\Delta\xi = 3.64. \qquad (2.73\ \text{а})$$

Последние два значения (2.71 а) и (2.73 а) совпадают с результатами, полученными автором для ползущего течения в коническом диффузоре [122].

2.4.3. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с общей вершиной границ при ползущем течении

Легко из дома реальности зайти в лес математики, но мало кто умеет назад возвратиться.

Г. Штейнгауз

С помощью полученного нами выражения для расчета среднего по площади поперечного сечения соосного конического диффузора безразмерного давления при ползущем течении (2.48) мы можем построить размерную напорно-расходную характеристику. Учитывая соотношения (2.3), получим

$$\Delta\bar{P}(Q) = \frac{\mu V_0}{h_0}\bar{\Pi} = \frac{\mu Q \operatorname{tg}^2(\theta_2-\theta_1)}{6\pi(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}\left[\lambda + 6\operatorname{ctg}^2(\theta_2-\theta_1)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{R_1^3} - \frac{\operatorname{tg}^3(\theta_2-\theta_1)}{h_0^3}\right]. \qquad (2.78)$$

В качестве примера рассмотрим расходно-напорную характеристику для диффузорного ламинарного течения жидкости в кольцевом коническом диффузоре с начальной шириной канала $h_0 = 0.01$ м, разностью полууглов раскрытия границ $\Delta\theta = 21°$, которую будем считать постоянной. Динамический коэффициент вязкости примем равным величине $\mu = 10$ Па с. Также, как и раньше, примем, что радиальная координата на выходе в три раза больше координаты входа в канал, и тогда из соотношения (2.57) получим для этих координат следующее значения: R_0 = 0.026 м, а R_1 = 0.078 м.

Понятно, что величина перепада давления $\Delta\bar{P}$ будет линейно возрастать с увеличением расхода Q, но эта зависимость для малых полууглов раскрытия внешней поверхности будет гораздо круче, чем при больших значениях θ_2 (рис. 2.16). Это связано с тем, что с

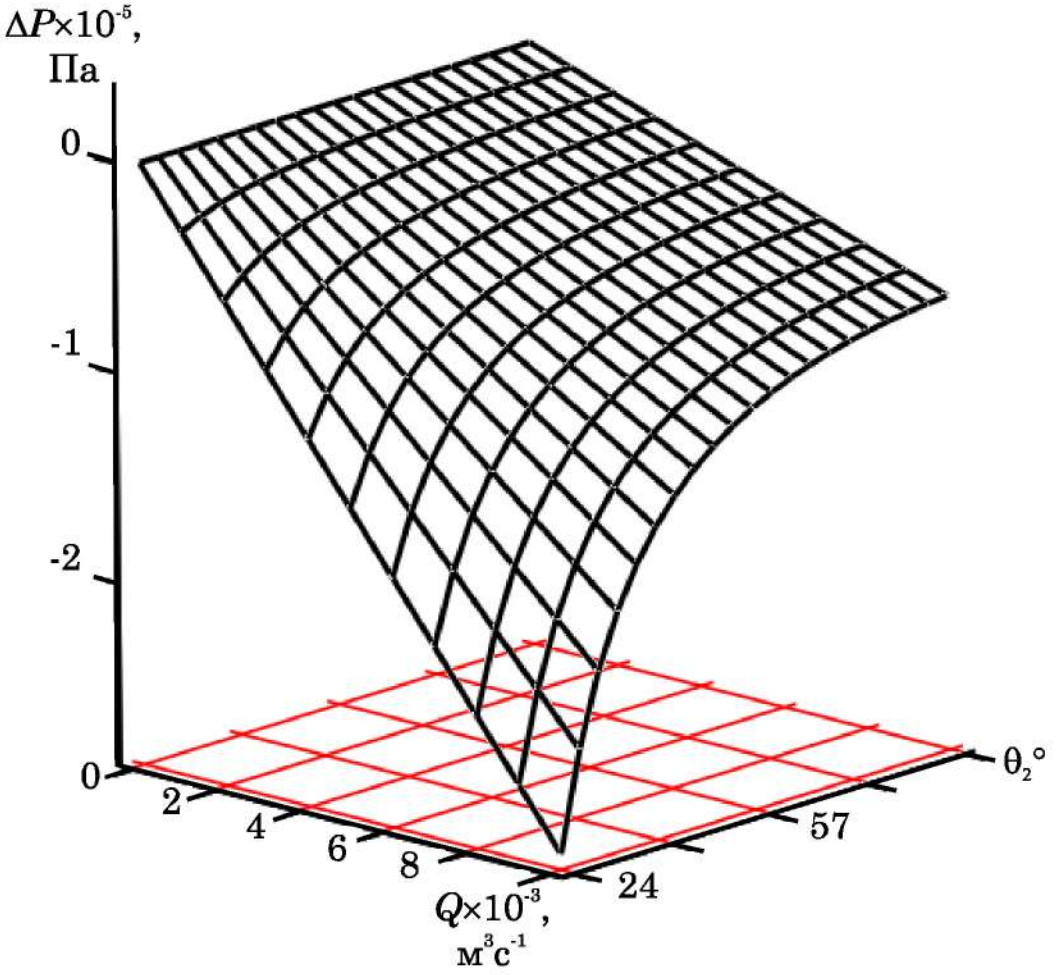


Рис. 2.16. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с общей вершиной границ и соотношением радиальных координат входа и выхода $\xi_1 = 3\xi_0$ от полууглов раскрытия его границ, которые меняются в интервалах: $\theta_2 \in [24°, 90°]$; а $\theta_2 - \theta_1 = 21°$.

увеличением θ_2, при постоянном значении разности $\Delta\theta$, увеличивается площадь поперечного сечения канала, что ведет к уменьшению средней скорости жидкости с увеличением θ_2, а это приводит к уменьшению градиента давления и, в конечном итоге, уменьшению перепада давления с ростом θ_2.

Зная напорно-расходную зависимость, мы можем определить функциональную зависимость мощности, необходимой для обеспечения заданного расхода жидкости [120]

$$N = \left|\Delta\bar{P}(Q)\right| \times Q. \tag{2.79}$$

Качественно зависимость мощности N (рис. 2.17) от парамет-

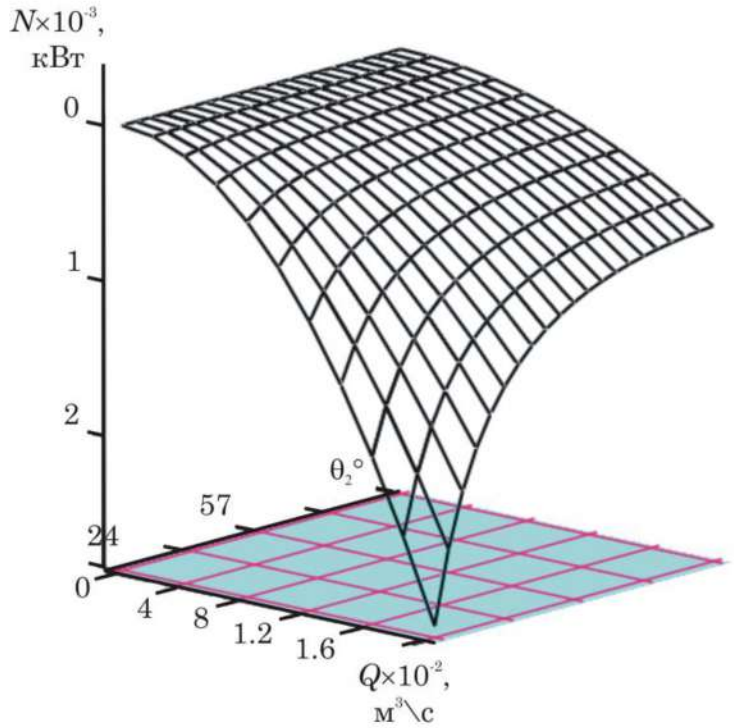


Рис. 2.17. Зависимость мощности, необходимой на обеспечение заданного расхода жидкости через соосный конический конфузор с общей вершиной границ параметров течения. Свойства жидкости и размеры канала те же, что и для рисунка 2.16.

ров задачи отличается от расходно-напорной характеристики только нелинейной зависимостью от объемного расхода жидкости.

На рисунке 2.17 значения мощности являются положительными, но для удобства сравнения с рисунком 2.16 ее значения увеличиваются на оси N вниз.

ГЛАВА 3

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КОНФУЗОРЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ГРАНИЦ

Как вероятен ход невероятный,
Который путь с названием «обратный»,
Низводит до глубокой правоты.

Ю. Визбор

3.1. Краткий обзор ранних работ

Что надо знать, то можно взять руками.

В. Гете

Систематического исследования ползущего течения в соосных конических конфузорах до настоящего времени не было. В работах [100, 110, 113] предлагается использовать для расчета течений в любых соосных кольцевых каналах переменного сечения ступенчатую аппроксимацию отрезками кольцевых прямолинейных труб. Данное предложение можно отнести и к соосным коническим конфузорам, хотя данная методика авторами работ предлагалась для диффузорного течения, но при таком подходе сходящиеся течения заменяются прямолинейными, что может привести к значительным погрешностям, особенно в случае больших значений углов раскрытия граничных поверхностей.

В работе [121] приведено выражение для расчета перепада давления в сужающемся зазоре между двумя коническими поверхностями, но без объяснения входящих в него параметров. Автором в работе [20] сделан краткий анализ распределения скорости и давления в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ. Используя метод, предложенный в последней указанной работе, ис-

следуем более подробно в настоящей главе ползущее течение в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ.

3.2. Математическая формулировка задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ

Математический язык не только самый простой и легкий для понимания, но и самый сжатый.

Г. Броэм

Так же, как и при изучении ползущего диффузорного течения в соосных конических диффузорах, мы для определения наиболее общих характеристик ползущего конфузорного течения в соосных конических каналах будем его рассматривать в безразмерных координатах и параметрах течения, которые мы определим с учетом (1.12):

$$t = \frac{T}{h_0} = \xi_1 - \xi;\ \xi = \frac{R}{h_0};\ \upsilon = \frac{V}{V_0};\ \Pi = \frac{(P - P_0)h_0}{\mu V_0};\ \tau = \cos\theta;$$

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}, \tag{3.1}$$

где h_0 – линейный масштабный множитель, использующийся для обезразмеривания переменных в уравнениях движения жидкости, в дальнейшем величина h_0 будет идентифицирована как ширина канала на входе, $\xi_1 = \frac{R_1}{h_0}$ – безразмерная координата входа в канал (рис. 3.1), V_0 – средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал скорость жидкости, которая определяется выражением

$$V_0 = \frac{Q}{S_1}, \tag{3.2}$$

где S_1 – площадь поперечного сечения канала координатной поверхностью на его входе

$$S_1 = 2\pi R_1^2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2). \tag{3.3}$$

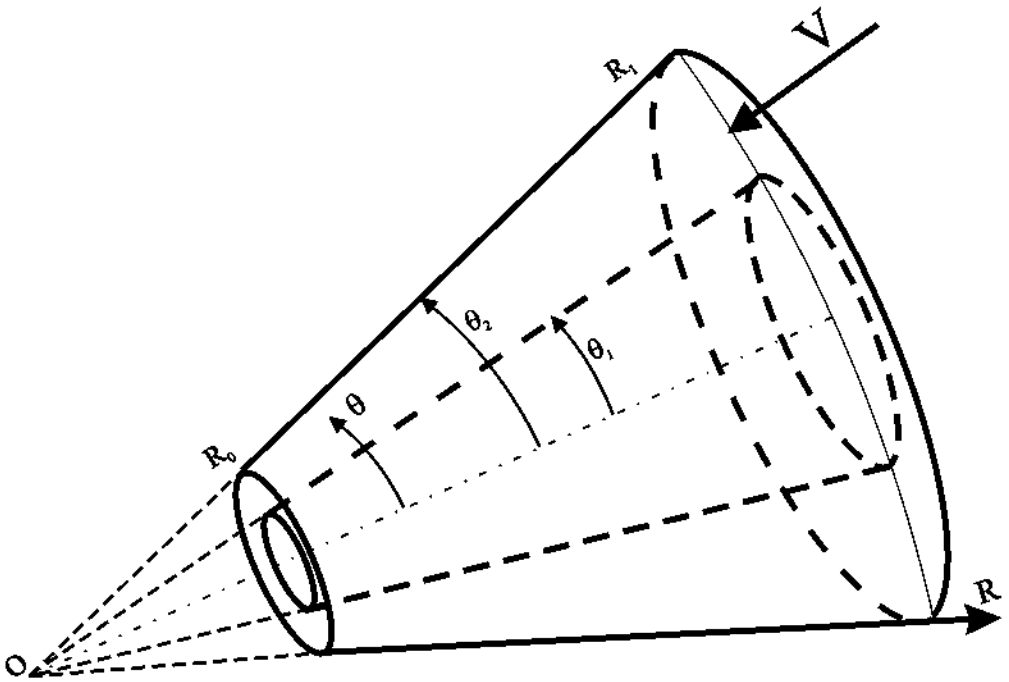


Рис. 3.1. Геометрия соосного конического конфузора с общей вершиной границ: O – вершина границ, она же полюс сферической системы координат; R – радиальная сферическая координата; R_0 – радиальная координата выхода из конфузора; R_1 – радиальная координата входа в конфузор; V – скорость жидкости; θ – азимутальная сферическая поверхности; θ_1, θ_2 – полууглы раскрытия внутренней и внешней границ канала.

Учитывая справедливость оценки (1.1), запишем с учетом (2.4) уравнения, описывающие ползущее конфузорное течение (1.13) – (1.15) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{1}{(\xi_1 - t)^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[(\xi_1 - t)^2 \frac{\partial v}{\partial t}\right] + \tag{3.4}$$

$$+\frac{1}{(\xi_1-t)^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial v}{\partial\tau}\right]-\frac{2v}{(\xi_1-t)^2};$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}=\frac{2}{\xi_1-t}\frac{\partial v}{\partial\tau}; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\xi_1-t)^2 v\right]=0. \tag{3.6}$$

Граничные условия (1.16) и (1.17) примут вид:

$$v=0,\quad \tau=\tau_1; \tag{3.7}$$

$$v=0,\quad \tau=\tau_2, \tag{3.8}$$

а начальные условия для безразмерного давления запишутся как

$$\bar{\Pi}=0,\quad t=0, \tag{3.9}$$

где $\bar{\Pi}$ определяется соотношением (2.11).

При решении системы уравнений (3.4) – (3.6) мы будем использовать еще одно соотношение, а именно уравнение постоянства расхода в любом поперечном сечении канала, которое в рассматриваемом нами случае течения эквивалентно уравнению непрерывности (3.6) и может быть легко получено интегрированием (3.5) по τ. В размерном виде оно записывается аналогично соотношению (2.12)

$$2\pi(R_1-T)^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}V\sin\theta d\theta=Q, \tag{3.10}$$

и далее, переходя к безразмерным переменным (3.1), получим

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}v d\tau=\left(\frac{\xi_1}{\xi_1-t}\right)^2(\tau_2-\tau_1). \tag{3.11}$$

В данном разделе мы получили математическую формулировку задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ (3.4)–(3.9) и (3.11) в безразмерных переменных, определенных соотношением (3.1), к получению аналити-

ческого решения которой перейдем в следующем разделе данной главы.

3.3. Аналитическое решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ

Я знаю, что Венера – дело рук,
Ремесленник – и знаю ремесло:...

М. Цветаева

Для определения распределения средней скорости вдоль соосного конического конфузора нам понадобится выражение, описывающее изменения площади поверхности поперечного сечения канала вдоль течения. В размерном виде площадь сечения канала координатной, т.е. сферической поверхностью, определим с помощью интегрирования по азимуту элементарной поверхности (рис. 3.1)

$$S = 2\pi(R_1 - T)\int_{\theta_1}^{\theta_2}(R_1 - T)\sin\theta d\theta = -2\pi(R_1 - T)^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \\ = 2\pi(R_1 - T)^2(\tau_1 - \tau_2). \tag{3.12}$$

Учитывая, что при обезразмеривании уравнений гидродинамики мы в качестве линейного масштаба выбрали величину h_0, безразмерная площадь поверхности определится как

$$s = \frac{S}{h_0^2} = 2\pi(\xi_1 - t)^2(\tau_1 - \tau_2). \tag{3.13}$$

Так же, как и при рассмотрении диффузорного течения, при анализе конфузорного течения полезно ввести понятие относительной площади поверхности поперечного сечения канала

$$\tilde{s} = \frac{S}{S_0} = \frac{s}{s_0} = \left(\frac{\xi_1 - t}{\xi_1}\right)^2. \tag{3.14}$$

Используя выражение (3.12), определим среднюю по площади поперечного сечения канала скорость течения жидкости в соосном коническом конфузоре как

$$\bar{V} = \frac{Q}{2\pi(R_1 - T)^2(\tau_1 - \tau_2)}, \tag{3.15}$$

и тогда распределение безразмерной средней по площади поперечного сечения канала запишется в виде

$$\bar{v} = \frac{\bar{V}}{V_0} = \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{s}}. \tag{3.16}$$

Интегрируя уравнение неразрывности (3.6), получаем для безразмерной скорости соотношение

$$v = \frac{1}{(\xi_1 - t)^2} u(\tau), \tag{3.17}$$

где u зависит, очевидно, только от угловой координаты τ.

Далее поступим точно так, как мы делали при решении задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре: выражение для безразмерной скорости (3.17) подставим в уравнение (3.5) и проинтегрируем его по τ. Это даст нам выражение, представляющее безразмерное давление

$$\Pi(t,\tau) = -\frac{2}{(\xi_1 - t)^3} u + f(t), \tag{3.18}$$

где $f(t)$ – функция, зависящая только от t (см. замечание к (2.20)). Дифференцируя (3.18) по t, получим выражение

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{6}{(\xi_1 - t)^4} u + f'(t), \tag{3.19}$$

которое вместе с (3.17) подставим в уравнение (3.4) и, проводя элементарные преобразования, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(\xi_1 - t)^4 f'(t) = (1 - \tau^2)u'' - 2\tau u' + 6u = -\lambda_C, \tag{3.20}$$

где λ_C – постоянная разделения. Поскольку члены, входящие в левую и правую задачу равенства (3.20), зависят от разных переменных, то, чтобы равенство выполнялось, обе части равенства должны быть равны некоторой постоянной величине.

В итоге для функции u мы получили неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left(1-\tau^2\right)u''-2\tau u'+6u+\lambda_C=0, \tag{3.21}$$

граничные условия, для которого следуют из (3.7), (3.8) и (3.17):

$$v=0, \quad \tau=\tau_1; \tag{3.22}$$

$$v=0, \quad \tau=\tau_2. \tag{3.23}$$

Решение задачи (3.21) – (3.23) мы уже получили в разделе 2.3, и оно запишется, как

$$u(\tau)=\frac{\lambda_C}{6}\left[AP_2(\tau)+BQ_2(\tau)-1\right], \tag{3.24}$$

где A и B определяются выражениями (2.36) и (2.37), а $P_2(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ – это функции Лежандра первого и второго ряда и второго порядка (2.29) и (2.30).

Заметим, что выражения (2.35) и (3.24) различаются только постоянными множителями λ и λ_C, которые в общем случае различны.

Для определения постоянной разделения воспользуемся условием постоянства расхода (3.11), которое с учетом (3.17) можно записать в виде

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} u(\tau)d\tau=\xi_1^2\left(\tau_2-\tau_2\right). \tag{3.25}$$

Интеграл в левой части (3.25) мы уже вычислили, и он определяется выражениями (2.39)–(2.41), подставляя которые в (3.25) и учитывая замену λ на λ_C, получим выражение для определения постоянной разделения

$$\lambda_C = \frac{6\xi_1^2}{\frac{A}{2}\left(\tau_1^2 + \tau_2\tau_1 + \tau_2^2 - 1\right) + B_1(\tau)} \tag{3.26}$$

где $B_1(\tau) = \frac{B}{4}\left[\frac{\tau_2\left(\tau_2^2-1\right)}{\tau_2-\tau_1}\ln\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2} - \frac{\tau_1\left(\tau_1^2-1\right)}{\tau_2-\tau_1}\ln\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1} - 2\left(\tau_2+\tau_1\right)\right] - 1.$

После этого, учитывая (3.20), определим производную от функции f по координате t

$$f'(t) = -\frac{\lambda_C}{\left(\xi_1 - t\right)^4}, \tag{3.27}$$

подставляя которую в (3.19), получим дифференциальное уравнение для безразмерного давления

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{6}{\left(\xi_1 - t\right)^4}u - \frac{\lambda_C}{\left(\xi_1 - t\right)^4}. \tag{3.28}$$

Интегрируя (3.28) по переменной t, получаем

$$\Pi(t,\tau) = -\frac{2}{\left(\xi_1 - t\right)^3}u - \frac{\lambda_C}{3\left(\xi_1 - t\right)^3} + C_1, \tag{3.29}$$

где C_1 – постоянная интегрирования по переменной t, которая в общем случае может зависеть от τ, поскольку интегрируется выражение, являющееся частной производной по t, но вследствие того, что должно выполняться выражение (3.5), C_1 является независимой постоянной.

Усредним равенство (3.29) по безразмерной площади поверхности поперечного сечения канала, воспользовавшись соотношением (3.13) и (3.25)

$$\bar{\Pi}(t) = \frac{1}{2\pi\left(\xi_1 - t\right)^2\left(\tau_1 - \tau_2\right)}\left\{\int_{\tau_1}^{\tau_2} -2\pi\left(\xi_1 - t\right)^2 \times\right.$$

$$\times\left[-\frac{2u(\tau)}{(\xi_1-t)^3}-\frac{\lambda_C}{3(\xi_1-t)^3}+C_1\right]d\tau\Bigg\}= \tag{3.30}$$

$$=-\frac{2\xi_1^2}{(\xi_1-t)^3}-\frac{\lambda}{3(\xi_1-t)^3}+C_1.$$

Для определения значения C_1 используем условием (3.9)

$$C_1=\frac{2}{\xi_1}+\frac{\lambda_C}{2\xi_1^3}, \tag{3.31}$$

и, подставляя это значение в (3.30), находим

$$\bar{\Pi}(t)=\frac{\lambda_C+6\xi_1^2}{3\xi_1^3}\left[1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_1-t}\right)^3\right]. \tag{3.32}$$

Тем самым мы получили решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре, образованном поверхностями с общей вершиной с математической формулировкой, данной в уравнениях (3.4)–(3.9) и (3.11). Решение представлено выражениями (3.17), (3.24) и (3.32).

Поскольку зависимость полученных выражение решения (3.17), (3.24) и (3.32) от угловой координаты такая же, как и в решении для течения в соосном коническом диффузоре, полученном в пункте 3 второй главы, то очевидно выполняется предельный переход от полученного здесь решения к решению задачи ползущего течения в коническом конфузоре при $\theta_1\to 0$.

3.4. Анализ полученного решения

...я восхищаюсь совершенством и верю в логическую простоту того порядка и той гармонии, которые мы способны смиренно познавать своим несовершенным разумом

А. Эйнштейн

Параметрами, определяющими полученное решение задачи ползущего течения в кольцевом коническом конфузоре (3.17), (3.24)

и (3.32), являются величины τ_1, τ_2 и ξ_1. В качестве линейного масштаба была выбрана, в общем-то, произвольная величина h_0, мы можем связать ее с геометрией канала, полагая, что h_0 – это ширина канала на его входе, и шириной канала будем считать длину отрезка перпендикуляра между границами канала и восстановленного от среза внешней границы (рисунок 3.2).

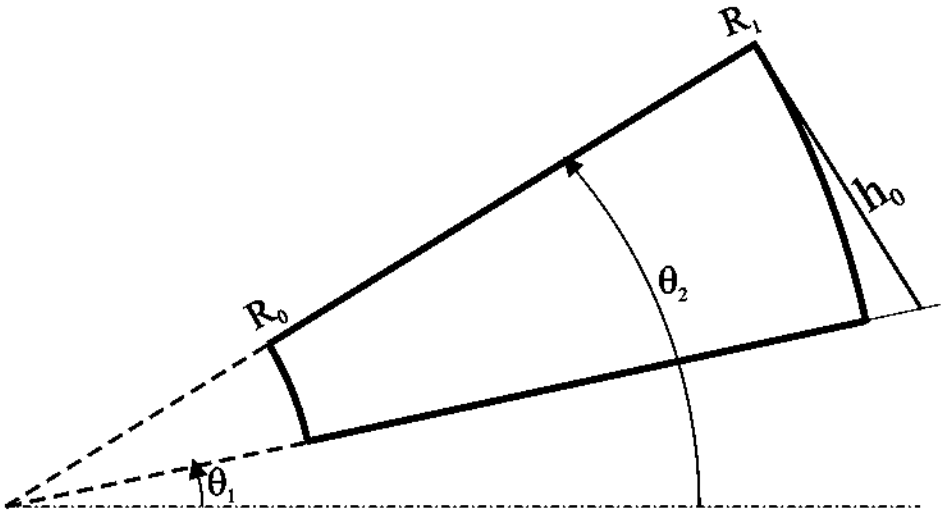


Рис. 3.2. К определению ширины соосного конического конфузора на его входе – h_0; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в канал и выхода из него; θ_1, θ_2 – полууглы раскрытия границ канала.

В этом случае R_1 и h_0 связаны между собой соотношением

$$h_0 = R_1 \mathrm{tg}(\theta_2 - \theta_1), \tag{3.33}$$

откуда безразмерная координата входа в конфузор определится как

$$\xi_1 = \mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1). \tag{3.34}$$

Следовательно, выражение для средней безразмерной скорости (3.16) может быть записано как

$$\overline{v} = \left[\frac{\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1)}{\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1) - t} \right]^2, \tag{3.35}$$

а распределение среднего по поперечному сечению канала безразмерного давления (3.32) примет вид

$$\overline{\Pi}(t)=\frac{\lambda'_C+6\operatorname{ctg}^2(\theta_2-\theta_1)}{3\operatorname{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}\left\{1-\left[\frac{\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)}{\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)-t}\right]^3\right\}, \qquad (3.36)$$

где λ'_C также будет определяться подстановкой (3.34) в (3.26).

Следовательно, как и в случае диффузорного течения, решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре определяется только двумя параметрами, а именно, значениями полуугов раскрытия граничных поверхностей θ_1 и θ_2.

Распределение безразмерного градиента среднего по поперечному сечению давления вдоль течения можно получить, дифференцируя по t выражения (3.32) или (3.36)

$$\frac{d\overline{\Pi}}{dt}=-\frac{\lambda_C+6\xi_1^2}{(\xi_1-t)^4}=-\overline{v}^2\frac{\lambda_C+6\operatorname{ctg}^2(\theta_2-\theta_1)}{\operatorname{ctg}^4(\theta_2-\theta_1)}. \qquad (3.37)$$

Полученное выражение (3.37) с точностью до постоянного множителя, определяемого параметрами обезразмеривания, совпадает по абсолютной величине с выражением, определяющим безразмерный градиент среднего давления при течении в диффузоре (2.67) с учетом замены ξ на t. Это вполне понятно, поскольку профили скорости, т.е. их азимутальная зависимость, в конфузоре (3.24) и диффузоре (2.35) полностью совпадают. Общая для них и радиальная зависимость скорости (2.19) и (3.17), следовательно, будут пропорциональны по абсолютной величине и скорости сдвига и напряжения сдвига на границах канала, которыми и определяется абсолютная величина градиента давления. Это значит, что перепады давления в соосном коническом канале при диффузорном и конфузорном течениях при одинаковых расходах будут равны. Будут равны и безразмерные давления на выходе из канала, приведенные к одним и тем же безразмерным переменным. И вследствие аддитивности перепада давления в канале мы, зная распределение безразмерного давления при диффузорном течении, можем найти его распределение для конфузорного течения. Безразмерное давле-

ние для конфузорного течения на координате ξ или, в соответствии с (3.1), на значении координат $t = \xi_1 - \xi$ будет равно

$$\bar{\Pi}_C(t) = \bar{\Pi}(\xi_1) - \bar{\Pi}(\xi). \qquad (3.38)$$

Подставляя в последнее равенство выражения (2.48) или (2.60), мы соответственно получим равенства (3.32) и (3.36), но в безразмерных переменных принятых в главе 2.. Таким образом, для получения решения задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре мы могли бы просто воспользоваться решением, полученным для диффузорного течения, и не решать задачу в конфузоре. Но иногда необходимо иметь полное и ясное решение интересующей проблемы, поэтому мы рассматриваем в данной главе также и независимое решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре. В дальнейшем изложении исследования ламинарных течений в соосных конических каналах мы будем использовать оба метода.

Ранее мы выяснили, что распределение абсолютных значений безразмерных скоростей и градиентов давления в конфузорном и диффузорном течениях совпадают с точностью до постоянных множителей, определяемых параметрами обезразмеривания, только при рассмотрении течения в конфузоре необходимо на рисунках 2.4, 2.7 и 2.10 выход из диффузора рассматривать как вход в конфузор и в соответствии с преобразованием координат (3.1). Далее кратко рассмотрим распределение безразмерного давления для ползущего течения в соосном коническом конфузоре при различных углах раскрытия граничных поверхностей канала.

Рассмотрим распределение безразмерного давления в канале, образованном коническими поверхностями с разностью полууглов их раскрытия равной $\Delta\theta = 21°$, но при этом будем изменять полуугол θ_2 в пределах интервала [24°, 90°]. В соответствии с (3.34) безразмерная координата входа в канал для всех θ_2 будет постоянной величиной, равной $\xi_1 = 2.61$. Координату выхода из канала выберем в три раза меньшей, чем ξ_1, т.е. $\xi_0 = 0.87$.

Как и в случае диффузорного течения среднее безразмерное давление слабо зависит от значения θ_2 (рис. 3.3). Распределение давления вдоль канала вполне соответствует выражению (3.38) и распределению (2.60). В начале канала, где средняя скорость течения еще мала, падение давления незначительно для всех значений θ_2. С увеличением средней скорости течения жидкости в канале увеличивается и абсолютная величина среднего по поперечному сечению безразмерного давления (рис. 3.3).

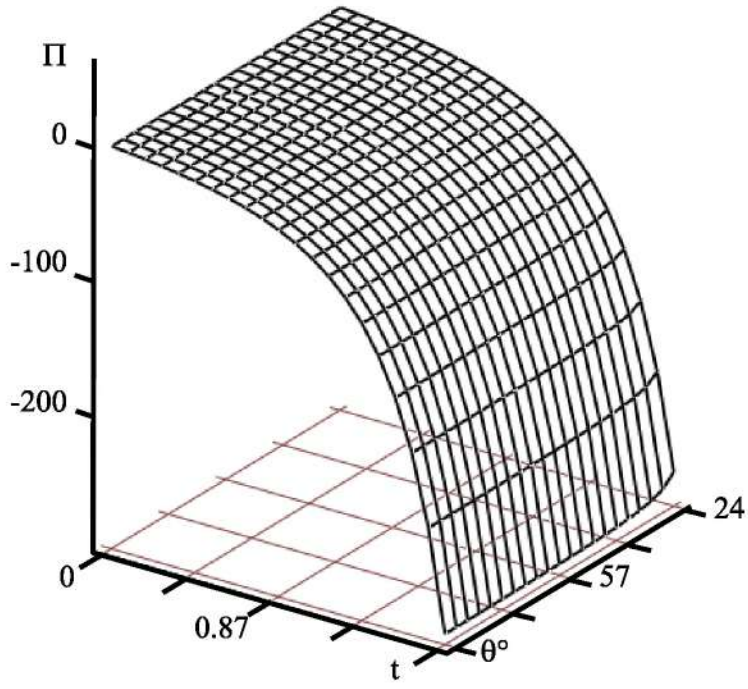


Рис. 3.3. Рраспределение безразмерного давления вдоль ползущего течения в соосном коническом конфузоре с постоянной разностью полууглов раскрытия границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$ при различных значениях полуугла θ_2.

ГЛАВА 4

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Геометрия предопределяет законы движения материи ...

Дж. А. Уилер

4.1. Краткая историческая справка о ранних работах

...помянем первых лет времена, похвалим вящаго Бояна, горазна гудца в Киеве.

Задонщина

Прежде, чем приступить к исследованию ламинарного течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины, отметим, что опубликовано крайне мало работ, посвященных исследованию ползущих течений в соосных конических диффузорах. К таким работам можно отнести работы, выполненные сотрудниками ИТМО им. А.В. Лыкова г. Минск [124–126]. В работе [124] обсуждаются уравнения, описывающие ползущее течение между близкими неплоскими поверхностями. В работах [125, 126] получено решение задачи ползущего течения в коническом зазоре постоянной, но очень малой ширины, что позволило авторам полностью пренебречь кривизной образующих канал поверхностей.

Ряд работ, посвященных диффузорному ползущему течению в соосных конических каналах, опубликованы автором данной монографии: [21–23], [28], [32] и [62–77]. В работах [21–23], [28] и [32] исследовано непосредственно диффузорное течение, а в остальных указанных работах изучался теплообмен при ламинарном диффузорном течении в соосных конических каналах постоянной ширины.

Из других публикаций можно только отметить, что для расчета ламинарных течений в произвольных кольцевых конических каналах в работе [113] предлагается ступенчатый метод аппроксимации, заменяющий трехмерное расходящееся течение на одномерное равномерное течение. В работах [113, 121, 123] предлагаются аналитические выражения для расчета перепада давления в соосных конических каналах, но при каких условиях были получены предлагаемые зависимости и пределы их применимости там не указаны. Поэтому до работ, опубликованных автором, систематического аналитического исследования ламинарного течения в соосных конических диффузорах не было обнародовано. К исследованию основных свойств и особенностей данных течений мы и приступаем в настоящей главе.

4.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины

Математика – чудесное изобретение, но чудо кроется в способности человеческого разума конструировать модели сложных и, казалось бы, не поддающихся описанию явлений природы. Именно эта способность позволяет человеку постигать глубинную сущность явлений...

М. Клайн

Для выяснения основных закономерностей, характерных для ползущих течений в соосных конических диффузорах постоянной ширины, сформулируем задачу, и будем проводить ее исследование в безразмерных переменных. Для выбора масштабных величин рассмотрим основные геометрические параметры и соотношения соосных конических каналов постоянной ширины. При постоянном расстоянии вдоль течения между поверхностями, образующими канал h (рис. 4.1), углы раскрытия внешней и внутренней поверхности равны.

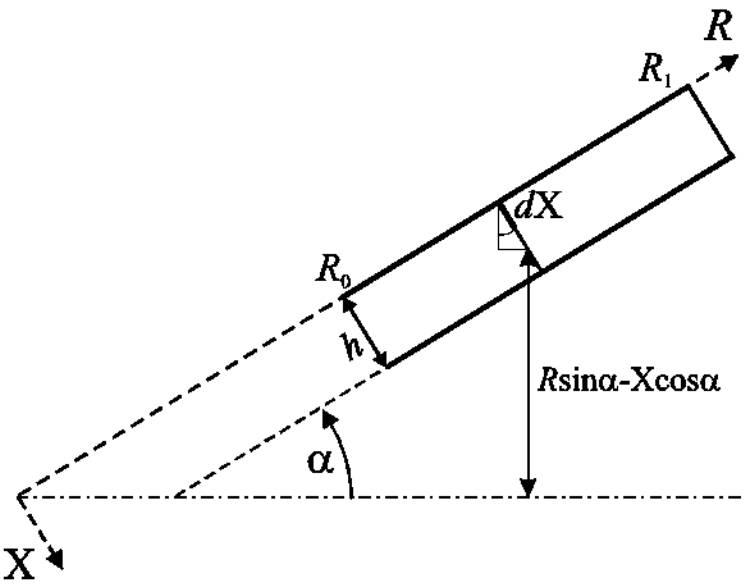


Рис. 4.1. К определению площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала постоянной ширины: h – ширина канала; R, X – координаты в биконической системы координат; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в канал и выхода из канала; α – полуугол раскрытия границ канала.

Площадь поверхности поперечного сечения канала на произвольной радиальной координате R, как следует из рисунка 4.1, определится выражением

$$S(R)=\int_0^h 2\pi\left(R\sin\alpha-\mathrm{X}\cos\alpha\right)d\mathrm{X}=\pi h\left(2R\sin\alpha-h\cos\alpha\right), \qquad (4.1)$$

откуда следует, что площадь поперечного сечения канала координатной поверхности на его входе, т.е. при $R=R_0$, будет равна:

$$S_0=\pi h\left(2R_0\sin\alpha-h\cos\alpha\right). \qquad (4.2)$$

Данное выражение позволяет определить среднюю по поперечному сечению канала скорость жидкости на входе в диффузор

$$V_0=\frac{Q}{S_0}=\frac{Q}{\pi h\left(2R_0\sin\alpha-h\cos\alpha\right)}, \qquad (4.3)$$

и текущую среднюю по площади поперечного сечения скорость

$$\bar{V} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi h\left(2R\sin\alpha - h\cos\alpha\right)}. \tag{4.4}$$

Исходя из полученных соотношений, выберем в качестве масштаба скорости величину V_0, а в качестве линейного масштаба – ширину канала h. В настоящей главе мы будем рассматривать только те течения, для которых справедлива оценка (1.1), т.е. ползущие течения. Система гидродинамических уравнений для таких течений в соосном коническом диффузоре, полученная в биконических координатах (1.57), (1.56) в безразмерных переменных:

$$\xi = \frac{R}{h};\ \chi = \frac{\mathrm{X}}{h};\ \Pi = \frac{\left(P - P_0\right)h}{\mu V_0};\ \upsilon = \frac{V}{V_0}, \tag{4.5}$$

запишется в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\sigma\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}\right); \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma\upsilon\right) = 0, \tag{4.7}$$

где

$$\sigma = \xi\sin\alpha - \chi\cos\alpha, \tag{4.8}$$

а P_0 определено в (1.65).

При решении задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре вместо уравнения неразрывности (4.7) будем использовать его интегральный аналог, т.е. условие постоянства расхода жидкости в любом поперечном сечении канала, которое в размерном виде определится выражением (см. рисунок 4.1)

$$2\pi\int_0^h \left(R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right)V d\mathrm{X} = Q, \tag{4.9}$$

и тогда в безразмерном виде оно запишется как

$$\int_0^1 \sigma\upsilon d\chi = \frac{1}{2}\left(2\xi_0\sin\alpha - \cos\alpha\right). \tag{4.10}$$

Условие (4.10) не противоречит уравнению неразрывности (4.7). Действительно, если мы проинтегрируем левую часть (4.7) по ширине канала и внесем интеграл под знак производной, а затем воспользуемся результатом (4.10), то получим тождественное равенство нулю.

Граничное и начальные условия (1.63) – (1.65) в безразмерных переменных примут вид:

$$\upsilon = 0, \quad \chi = 0; \tag{4.11}$$

$$\upsilon = 0, \quad \chi = 1; \tag{4.12}$$

$$\Pi = 0, \quad \xi = \xi_0. \tag{4.13}$$

Таким образом, математическая формулировка задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре определяется системой уравнений: (4.6), (4.10) с условиями однозначности (4.11) – (4.13).

4.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины

Главное – это из множества проблем выбрать наиболее простые, решение которых позволит выработать допускающие обобщения концепции.

Д. Гильберт

Анализируя технические устройства, в которых используются соосные конические каналы [6, 7], [56–61], [110], [113], [123], мы видим, что в большинстве практически интересных случаев выполняется условие $R\sin\alpha \gg h\cos\alpha$ или в безразмерном виде

$$\xi \mathrm{tg}\alpha \gg 1. \tag{4.14}$$

Это условие позволяет в уравнении движения использовать приближенное выражение для σ (4.8), $\sigma \approx \xi\sin\alpha$, и после упрощения уравнение движения (4.6) примет вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}, \tag{4.15}$$

а уравнение неразрывности будем использовать при решении задачи в виде условия постоянства расхода жидкости в произвольном поперечном сечении канала координатной поверхностью (4.10).

В работах [28, 32] автором данной монографии получено условие более точное, чем (4.14), которое говорит о том, что при выполнении соотношения $\xi \gg 2.22\mathrm{ctg}\alpha$ влиянием различия в кривизне граничных поверхностей в уравнении движения можно пренебречь и использовать его в виде (4.15). В настоящей монографии это условие будет обсуждаться в главе 21.

Таким образом, течение в соосном коническом диффузора будет описываться уравнениями (4.15), (4.10) и условиями однозначности (4.9) – (4.11) и (4.13).

Заметим, что в выражении (4.13) дифференциал площади поверхности поперечного сечения записан без учета условия (4.14), также как и в выражении (4.1). Тем самым мы частично учитываем особенности геометрии соосного конического канала.

Как и при исследовании течения в соосных конических каналах с общей вершиной, мы определим безразмерную площадь поверхности поперечного сечения соосного конического канала постоянной ширины, используя выражение (4.1)

$$s = \pi\left(2\xi \sin\alpha - \cos\alpha\right). \tag{4.16}$$

Для определения интенсивности изменения площади поверхности поперечного сечения канала вдоль течения можно ввести относительную безразмерную площадь поперечного сечения канала, определив ее как

$$\tilde{s} = \frac{S}{S_0} = \frac{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}, \tag{4.17}$$

и тогда распределение вдоль течения безразмерной средней по площади поперечного сечения скорости жидкости определится соотношением

$$\overline{v} = \frac{\overline{V}}{V_0} = \frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{1}{\tilde{s}}. \tag{4.18}$$

Далее, дважды интегрируя (4.15) по χ, получим его общее решение

$$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\chi^2 = v + C_1\chi + C_2, \tag{4.19}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования, которые определяем, подставляя (4.19) в условия (4.11) и (4.12):

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}, \quad C_2 = 0, \tag{4.20}$$

после чего получаем выражение для v

$$v = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\left(\chi^2 - \chi\right). \tag{4.21}$$

Выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления вдоль течения, получим с помощью условия постоянства расхода жидкости (4.13). Подставим (4.21) в левую часть (4.13) и выполним интегрирование по безразмерной ширине канала

$$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\int_0^1 (\xi\sin\alpha - \chi\cos\alpha)\left(\chi^2 - \chi\right)d\chi = \frac{1}{24}\frac{d\Pi}{d\xi}\left(\cos\alpha - 2\xi\sin\alpha\right). \tag{4.22}$$

Приравнивая полученный результат правой части (4.13), находим выражение для определения безразмерного градиента давления

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha}. \tag{4.23}$$

Принимая во внимание (4.18), мы можем выражение (4.23) записать в виде

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\overline{v}, \tag{4.24}$$

т.е. модуль безразмерного градиента давления при ползущем течении в соосном коническом диффузоре прямо пропорционален безразмерной средней по площади поперечного сечения канала скорости.

Далее, подставляя выражение, определяющее распределение безразмерного давления в канале (4.23) в (4.21), получим формулу, определяющую распределение безразмерной скорости жидкости при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре

$$\upsilon = 6\frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha}\left(\chi - \chi^2\right), \tag{4.25}$$

которую с учетом (4.18) можно записать в виде

$$\upsilon = 6\overline{v}\left(\chi - \chi^2\right). \tag{4.26}$$

Заметим, что в технических приложениях выражение (4.25) обычно называют эпюрой скоростей.

Для получения явного вида зависимости безразмерного давления от безразмерной продольной координаты, проинтегрируем (4.23) вдоль ξ

$$\begin{aligned}\Pi(\xi) &= -12\int\frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha}d\xi = \\ &= \frac{-12\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)}{2\sin\alpha}\int\frac{d\left(2\xi \sin\alpha - \cos\alpha\right)}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha} = \\ &= -\frac{6\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)}{\sin\alpha}\ln\left(2\xi \sin\alpha - \cos\alpha\right) + C,\end{aligned} \tag{4.27}$$

где постоянную интегрирования C определяем с помощью начального условия (4.13), и после этого окончательно запишем

$$\Pi(\xi) = -\frac{6\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)}{\sin\alpha}\ln\frac{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}, \tag{4.28}$$

а с учетом (4.18) можем записать

$$\Pi(\xi) = 6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha\right)\ln\overline{v}\,. \tag{4.29}$$

Заметим то, что если в выражениях (4.23), (4.25) и (4.28) положить $\alpha = 90°$, мы получим соотношения, описывающие распределение безразмерного градиента давления, безразмерных скорости и давления при радиальном расходящемся течении между параллельными плоскостями [119]:

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\frac{\xi_0}{\xi}; \tag{4.30}$$

$$\upsilon = 6\frac{\xi_0}{\xi}\left(\chi - \chi^2\right); \tag{4.31}$$

$$\Pi = -12\xi_0 \ln\frac{\xi}{\xi_0}. \tag{4.32}$$

И если записать формулу, определяющую среднюю по поперечному сечению скорость жидкости при $\alpha = 90°$

$$\overline{\upsilon} = \frac{\xi_0}{\xi}, \tag{4.33}$$

то мы увидим, что выражения (4.24) и (4.26) для ползущего радиального течения между параллельными плоскостями не изменят вид, а (4.29) запишется как

$$\Pi(\xi) = 12\xi_0 \ln\overline{\upsilon}. \tag{4.34}$$

Заметим также, что выражение (4.32) есть следствием еще одного предельного перехода в равенстве (4.28). При течении в узких конических щелях выполняется неравенство $\xi_0 \gg 1$, используя которое мы из (4.28) получаем (4.32), что совпадает с точностью до определения безразмерных величин с результатом, полученным в [126] для ползущих течений в узких конических щелях.

Итак, в текущем разделе мы получили решение для задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины, определяемого соотношениями (4.23), (4.25) и (4.28), для которого выполняются предельные переходы к известным и исследованным ранее течениям, а элементарная подстановка решения в исходные уравнения превращает их в тождества.

4.4. Анализ решения задачи ползущего течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины

Нам недостает анализа, поскольку вся теория движения жидкости теперь свелась к исследованию аналитических формул.

Л. Эйлер

Как мы видим из полученных в данной главе выражений, описывающих распределение безразмерной скорости, распределение безразмерного давления и его градиента при течении жидкости в соосном коническом диффузоре с эквидистантными границами, решение в использованных безразмерных переменных определяется двумя параметрами, а именно, безразмерной радиальной координатой входа в канал ξ_0 и полууглом раскрытия граничных α. Данные значения, т.е. геометрические свойства канала, определяют, прежде всего, распределение скорости жидкости, а уже все остальные параметры течения, как мы видели, зависят именно от этого распределения.

Наибольшие значения скорости наблюдаются вблизи входа в канал, где площадь поперечного сечения канала наименьшая (рис. 4.2). Далее вдоль течения с увеличением площади поверхности поперечного сечения скорость течения уменьшается. Профиль скорости, как следует из (4.25), в любом поперечном сечении канала является параболическим. Максимальное значение безразмерной скорости в выбранном сечении, очевидно, будет наблюдаться на срединной поверхности канала, т.е. при $\chi = 0.5$. Подставляя это значение в (4.26), получаем выражение, определяющее распределение безразмерной максимальной скорости жидкости вдоль течения

$$v_{\max} = \frac{3}{2}\overline{v}, \tag{4.35}$$

т.е. определяется распределением безразмерной средней скорости, которое полностью характеризуется распределением обратной величины площади поверхности поперечного сечения (4.18), и, следовательно, имеет гиперболическую зависимость от ξ (рис. 4.3).

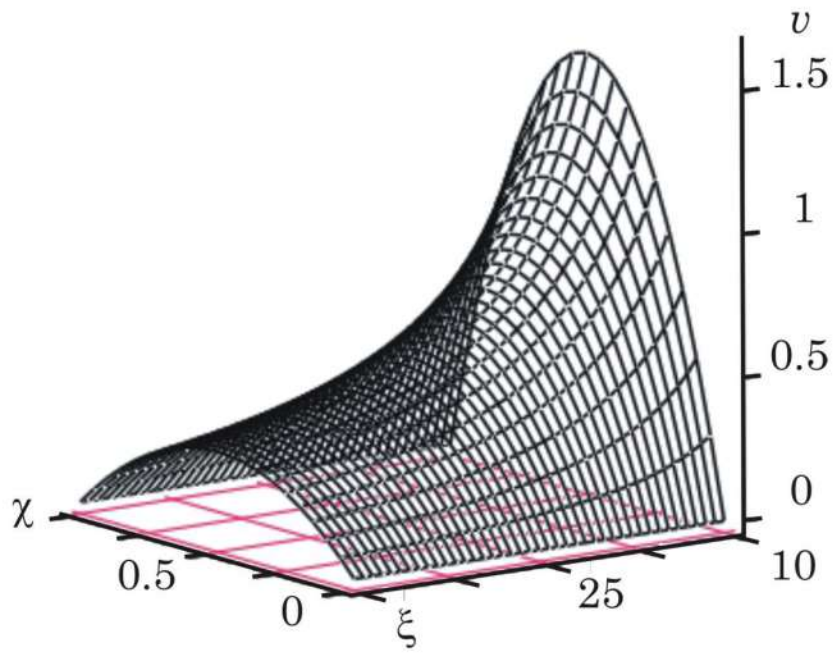


Рис. 4.2. Распределение безразмерной скорости жидкости при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины с параметрами: $\alpha = 13°$; $\xi_0 = 10$.

Заметим, что выражение (4.35) формально совпадает с выражением, определяющим максимальную скорость при одномерном движении жидкости между двумя параллельными пластинами [127], но в нашем случае в выражении (4.35) присутствует зависимость от продольной координаты ξ и полуугла раскрытия границ канала α.

Распределением скорости определяется и распределение напряжения сдвига на границах канала. Для ньютоновской жидкости эта величина для рассматриваемого течения, и учитывая (1.50), определится выражением

$$\tau_\Gamma = \mu \left.\frac{\partial V}{\partial \chi}\right|_{\chi=\begin{cases}0\\h\end{cases}}, \qquad (4.36)$$

или в безразмерной записи эта величина будет характеризоваться безразмерной скоростью сдвига на границе канала

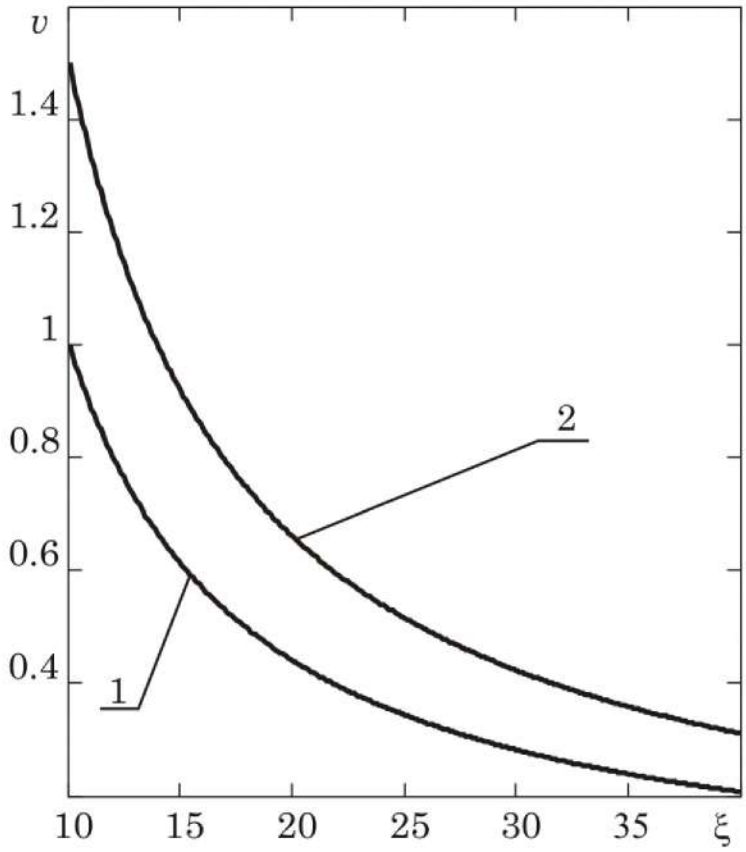


Рис. 4.3. Распределение вдоль течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины с параметрами: $\alpha = 13°$; $\xi_0 = 10$. 1 – безразмерной средней по площади поперечного сечения скорости; 2 – максимального значения безразмерной скорости в поперечном сечении канала координатной поверхностью.

$$\left|\dot{\gamma}_\Gamma\right| = \left|\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}\right|_{\chi=\begin{cases}0\\1\end{cases}}\right| = 6\bar{\upsilon}\,. \qquad (4.37)$$

Напряжения сдвига на границах канала максимальны в начале течения, и с уменьшением $\bar{\upsilon}$ вдоль течения они также снижаются. Очевидно, что и градиент давления должен вести себя аналогично (4.24). Максимальное значение модуль безразмерного градиента давления имеет у входа в канал, а затем его абсолютная величина уменьшается (рис. 4.4).

Безразмерное давление более существенно изменяется также в начале течения, но в целом, изменение $\Pi(\xi)$ более плавное, чем у других рассмотренных здесь величин, поскольку средняя безразмерная скорость в зависимости $\Pi(\overline{v})$ стоит под знаком логарифма (рис. 4.5).

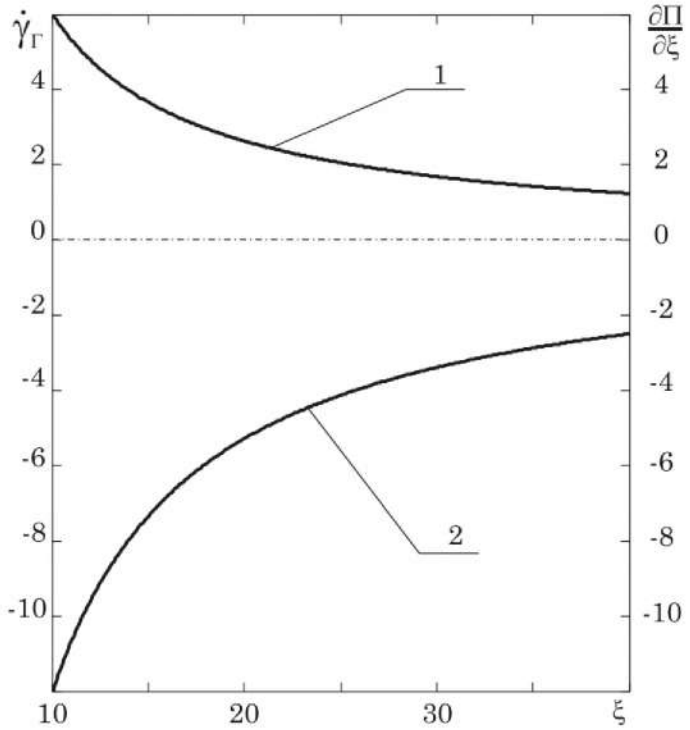


Рис. 4.4. Распределение вдоль течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины с параметрами: $\alpha = 13°$; $\xi_0 = 10$. 1 – модуля безразмерной скорости сдвига на границах канала; 2 – безразмерного градиента давления.

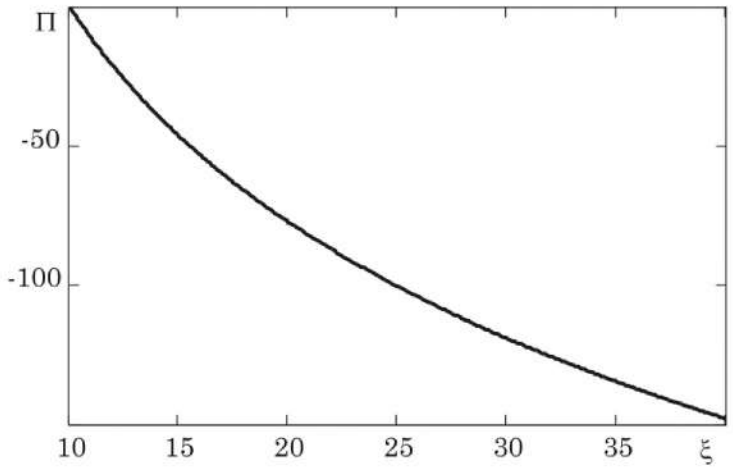


Рис. 4.5. Распределение безразмерного давления вдоль соосного конического диффузора постоянной ширины с параметрами: $\alpha = 13°$; $\xi_0 = 10$.

4.5. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора постоянной ширины при ползущем течении

...венец научной работы есть предсказание.

Н.А. Умов

Для того, чтобы получить расходно-напорную характеристику соосного конического канала постоянной ширины h и радиальными координатами входа R_0 и выхода R_1, нам достаточно перевести выражение (4.28) в размерный вид и подставить в него значение средней скорости на входе в канал V_0, выраженное через расход жидкости, в результате чего получим

$$\Delta P(Q) = \frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin\alpha} \ln \frac{2R_0 \sin\alpha - h\cos\alpha}{2R_1 \sin\alpha - h\cos\alpha}. \qquad (4.38)$$

В качестве примера рассмотрим зависимость $\Delta P(Q)$ для течения жидкости с коэффициентом динамической вязкости $\mu = 10$ Па·с в канале с $h_0 = 0.01$ м, $R_0 = 0.1$ м и $R_1 = 0.4$ м.

Зависимость $\Delta P(Q)$ для малых полууглов раскрытия граничных поверхностей более крутая, чем для больших α (рис. 4.6). Это и понятно, потому что с увеличением α увеличивается площадь

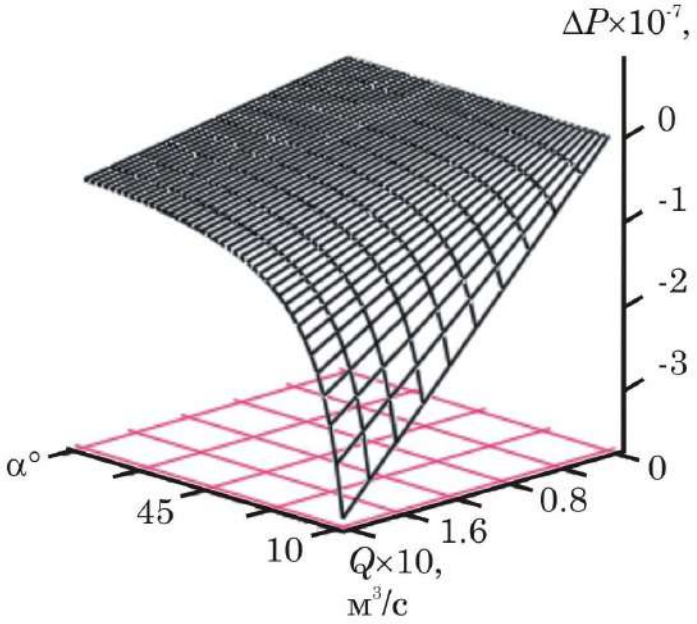


Рис. 4.6. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с геометрическими параметрами: h = 0.01м; R_0 = 0.1м; R_1 = 0.4 м, при течении жидкости с коэффициентом динамической вязкости, равным μ = 10 Па·с в зависимости от полууугла раскрытия границ канала.

поверхности поперечного сечения канала, т.е. уменьшается средняя скорость течения для равных радиальных координат R. Поэтому выражение (4.38) показывает достаточно сильную зависимость перепада давления как от расхода, так и от полуугла раскрытия конических поверхностей, формирующих канал.

4.6. Сравнение результатов, полученных для расчета течения в соосных конических каналах постоянной ширины с существующими методами расчета течения в таких каналах

Ученый все равно, что мимоза, когда замечает свою ошибку, и рычащий лев – когда обнаруживает чужую ошибку

А. Эйнштейн

Прежде чем приступить к сравнениям, сделаем несколько замечаний о выражениях, полученных нами для вычисления безразмерного давления в соосных конических каналах постоянной ширины.

Выражение (4.28), определяющее безразмерное давление, получено в безразмерных величинах, где за масштаб скорости выбрано ясное физическое значение средней скорости жидкости на входе в канал (4.3). Но это выражение зависит от полуугла раскрытия границ канала α, поэтому значения Π, вычисленные для различных α, при остальных равных параметрах будут представлены в разных масштабах давления – $\frac{\mu V_0}{h}$, поскольку V_0 зависит от α (4.5). Вообще-то говоря, мы вправе определять зависимость $\Pi(\alpha)$ при постоянных значениях других геометрических величин, но корректно сравнивать значения Π при различных α можно только переведя их в один и тот же масштаб.

Для этого мы можем выбрать в качестве масштаба скорости величину

$$V_0^* = \frac{Q}{\pi h^2}, \tag{4.39}$$

которая не зависит от α.

В этом случае, как нетрудно убедиться, используя выражение (4.39), распределение безразмерного давления в канале определится соотношением

$$\Pi^*(\xi) = -\frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{2\xi\sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi_0\sin\alpha - \cos\alpha}. \qquad (4.40)$$

Давайте, сравним распределение безразмерного давления при ползущем течении жидкости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ, вычисленного с помощью точного решения задачи, полученного в главе 2 (2.48) и решения для задачи ползущего течения в канале с эквидистантными границами (4.40). Для этого мы выполним ступенчатую аппроксимацию конической щели с общей вершиной границ соосными коническими каналами постоянной ширины (рис. 4.7).

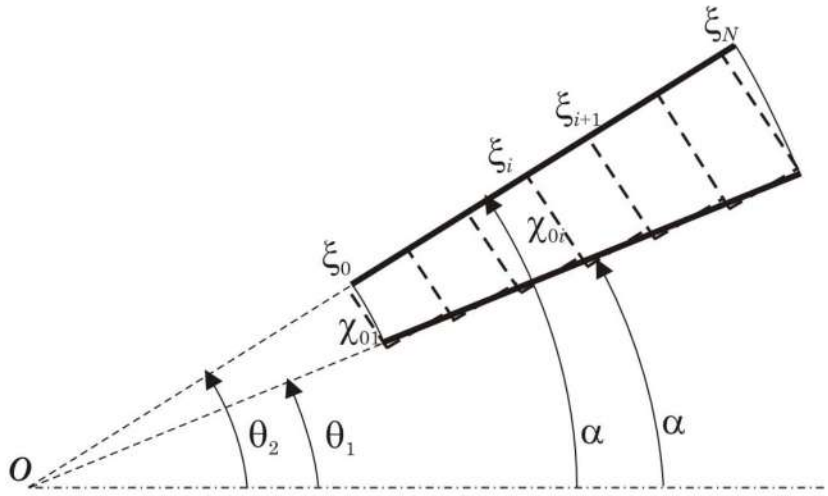


Рис. 4.7. Аппроксимация соосного конического канала с общей вершиной границ соосными коническими каналами постоянной ширины: χ_{0i} – безразмерная ширина i-го канала; ξ_i, ξ_{i+1} – безразмерные координаты входа в i-й канал и выхода из него; θ_1, θ_2 – полууглы раскрытия границ соосного конического канала с общей вершиной; α – полуугол раскрытия границ аппроксимирующих каналов, равный в данном случае θ_2.

Заметим, что предлагаемая аппроксимация не заменяет расходящееся течение прямолинейным.

Но поскольку на каждой ступени аппроксимации ширина канала χ_{0i} (рис. 4.7) индивидуальна, у нас опять возникает проблема масштабирования. Для устранения данной проблемы выберем линейный масштаб, общий для всех ступеней аппроксимации и решения, полученного в сферической системе координат. Пусть это будет начальная ширина канала h_0, определенная в главе 2. Теперь нам необходимо получить решение задачи (4.6), (4.10) в том случае, когда безразмерная ширина канала не равна 1, т.е. условие (4.12) запишется в виде

$$\upsilon = 0, \quad \chi = \chi_0, \tag{4.41}$$

где $\chi_0 = \dfrac{h}{h_0}$, а h не обязательно равно h_0.

Выполняя решение совершенно аналогичное тому, которое мы проделали в пункте 4.3 настоящей главы, получим выражения, определяющие распределение безразмерной скорости

$$\upsilon = \frac{6\left(\chi_0\chi - \chi^2\right)}{\chi_0^3\left(2\xi\sin\alpha - \chi_0\cos\alpha\right)}, \tag{4.42}$$

и безразмерного давления

$$\Pi = -\frac{6}{\chi_0^3\sin\alpha}\ln\frac{2\xi\sin\alpha - \chi_0\cos\alpha}{2\xi_0\sin\alpha - \chi_0\cos\alpha}. \tag{4.43}$$

Еще раз отметим, что в этих выражениях в качестве масштаба скорости использована величина (4.39). Для простоты вычисления выберем аппроксимацию с одинаковой длиной образующих каждой ступени, и тогда радиальные координаты входа и выхода для ступеней определяются выражением

$$\xi_{i+1} = \xi_0 + \frac{\xi_M}{M}(i-1), \tag{4.44}$$

где ξ_M – безразмерная координата выхода из канала, а безразмерная ширина i-ой ступени будет определена как

$$\chi_{0i} = \xi_i \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1). \tag{4.45}$$

И окончательно безразмерный перепад давления на выходе из соосного конического диффузора с общей вершиной границ, вычисленный с помощью ступенчатой аппроксимации кольцевыми коническими каналами постоянной ширины, запишется в виде

$$\Pi_a = -\frac{6}{\sin\alpha}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\chi_{0i}^3}\ln\frac{2\xi_{i+1}\sin\alpha - \chi_{0i}\cos\alpha}{2\xi_i\sin\alpha - \chi_{0i}\cos\alpha}. \qquad (4.46)$$

Чтобы сравнить полученное решение с точным (2.48), переведем последнее в масштаб, при котором было найдено выражение (4.46), т.е. в качестве масштабного множителя скорости мы должны использовать значение (4.39). Очевидно, что для такого перевода достаточно выражение (2.48) умножить на отношение $\frac{V_0}{V^*}$, где V_0 определяется в (2.2), и, в итоге, получим

$$\Pi_s = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{6\xi_0^2(\tau_1 - \tau_2)}\left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{\xi_0^3}\right). \qquad (4.47)$$

Сравнение величин (4.46) и (4.47) дает хорошее согласие практически во всем диапазоне возможного изменения параметров. На рисунке 4.8 показаны распределения безразмерного давления, рассчитанные по (4.46) и (4.47) для течения в канале с параметрами: $\theta_1 = 15°$, $\theta_2 = 30°$ и при числе ступеней $M = 60$.

Отметим, что с помощью предложенной ступенчатой аппроксимации можно записать выражение для расчета перепада давления в осесимметричном кольцевом канале переменного сечения с произвольной формой образующих канала

$$\Pi_a = -6\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\chi_{0i}^3\sin\alpha_i}\ln\frac{2\xi_{i+1}\sin\alpha_i - \chi_{0i}\cos\alpha_i}{2\xi_i\sin\alpha_i - \chi_{0i}\cos\alpha_i}, \qquad (4.48)$$

где $\chi_{0i} = f(\xi_i)$ и $\alpha_i = g(\xi_i)$ могут быть произвольными кусочно-непрерывными функциями.

Теперь сравним безразмерное давление на выходе из соосного конического диффузора постоянной ширины, рассчитанное по вы-

ражению (4.43) и вычисленное с помощью других, предлагаемых в настоящее время методов.

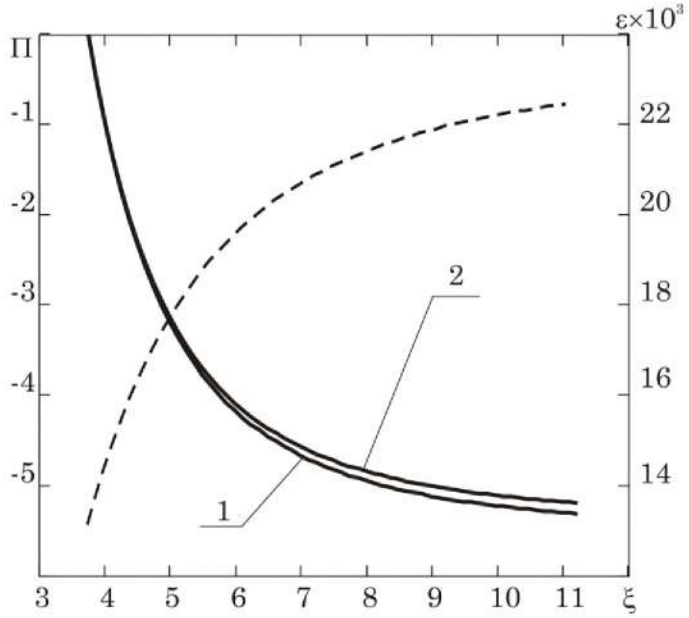


Рис. 4.8. Распределение среднего по площади поперечного сечения безразмерного давления вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ и с геометрическими параметрами, равными $\theta_1 = 15°$; $\theta_2 = 30°$ – 1; 2 – распределение безразмерного давления, полученное с помощью ступенчатой аппроксимации исходного канала соосными каналами постоянной ширины. Штриховая линия – относительное отклонение распределения 1 от распределения 2.

В работах [100] и [113] для расчета течения в соосных конических каналах предлагается их ступенчатая аппроксимация коаксиальными цилиндрическими каналами (рис. 4.9). Для ньютоновской жидкости выражения для аппроксимации запишутся в виде:

$$\Delta P = \frac{\mu Q}{k_{\text{г}}}, \tag{4.49}$$

где коэффициент геометрической формы канала определяется как:

$$k_{\text{г}} = \frac{\pi}{12\Delta l}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\left(R_{2i}-R_i\right)^3\left(R_{2i}-R_i\right)}; \tag{4.50}$$

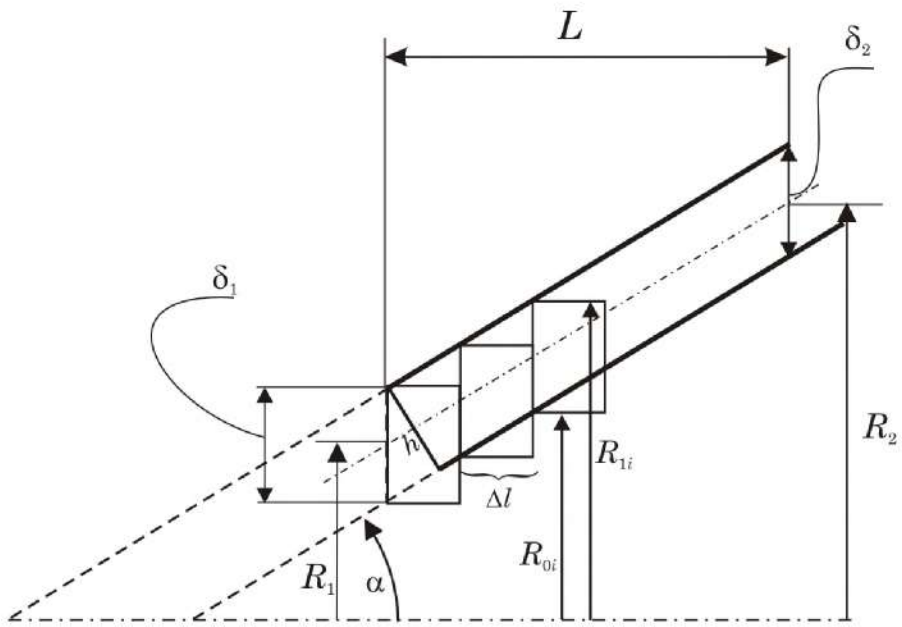


Рис. 4.9. Ступенчатая аппроксимация соосного конического канала постоянной ширины кольцевыми цилиндрическими каналами: R_1, R_2 – радиусы серединных поверхностей кольцевых каналов на входе и выходе; R_{0i}, R_{1i} – радиусы границ i-го цилиндрического канала; δ_1, δ_2 – ширина цилиндрического зазора на входе и выходе, Δl – длина цилиндрического канала

$$R_{2i} = R_1 + \frac{\delta_2}{2} + \frac{2(R_0 - R_1) + (\delta_1 - \delta_2)}{2M}(i-1); \tag{4.51}$$

$$R_{1i} = R_1 - \frac{\delta_2}{2} + \frac{2(R_0 - R_1) + (\delta_1 - \delta_2)}{2M}(i-1). \tag{4.52}$$

В нашем случае $\delta_1 = \delta_2$ (рис. 4.9) и, учитывая, что:

$$\tilde{R}_0 = \xi_0 \sin\alpha - \frac{\chi_0}{2\cos\alpha}; \tag{4.53}$$

$$\tilde{R}_1 = \xi_1 \sin\alpha - \frac{\chi_0}{2\cos\alpha}, \tag{4.54}$$

где $\tilde{R}_0$ и $\tilde{R}_1$ – безразмерные радиусы серединной поверхности на входе в канал и выходе из него, а $\Delta l = \frac{\xi_1 - \xi_0}{M}$, мы в принятых нами безразмерных переменных для (4.49) запишем

$$\Pi_{an} = \frac{24(\xi_1 - \xi_0)\cos^5\alpha}{\chi_0^3\left[(\xi_1 - \xi_0)\sin 2\alpha - 2\chi_0\right]}. \qquad (4.55)$$

Наименьшее относительное отклонение между (4.55) и (4.43) ≈ 20 % наблюдается при малых полууглах раскрытия границ канала (рис. 4.10), с ростом α относительное отклонение быстро достигает 100 %. Это связано с тем, что данная аппроксимация заменяет расходящееся диффузорное течение в соосном коническом диффузоре на прямолинейное течение в кольцевом цилиндрическом канале, и при больших значениях α такая модель физически несостоятельна.

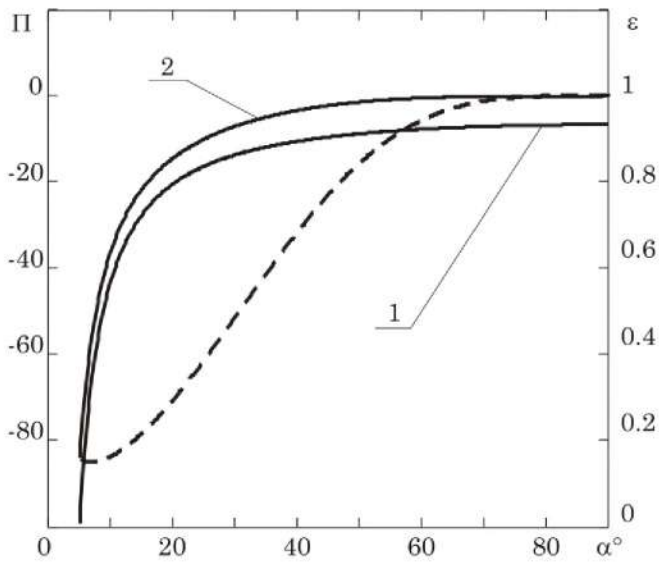


Рис. 4. 10. Зависимость безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора постоянной ширины с параметрами $\xi_0 = 15$, $\xi_1 = 45$ от полууугла раскрытия его границ – сплошные линии. 1 – расчет по формуле (4.43); 2 – распределение, полученное с помощью аппроксимации канала кольцевыми цилиндрическими каналами (4.55). Шриховая линия – распределение относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

В работах [121] и [123] предлагается метод, в котором для вычисления коэффициента геометрической формы канала $k_г$ используется аналитическое выражение:

$$k_г = \frac{\pi(R_2\delta_2 - R_1\delta_1)}{6LK}, \qquad (4.56)$$

где

$$K = \frac{2.3(R_2 - R_1)^2}{(R_2\delta_2 - R_1\delta_1)^2}\ln\frac{R_2\delta_2}{R_1\delta_1} - \frac{(R_2 - R_1)(\delta_1 - \delta_2)}{\delta_1\delta_2(R_2\delta_2 - R_1\delta_1)} - \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{2\delta_1^2\delta_2^2}, \qquad (4.57)$$

а L – высота усеченного конуса верхней конической поверхности канала (рис. 4.9).

Определяя коэффициент геометрической формы (4.57) для канала постоянной ширины и подставляя его в (4.49), получим:

$$\Delta P = \frac{13.8\mu Q \cos^4\alpha}{\pi h^4 \sin\alpha} \ln \frac{2\xi_0 \sin\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha}}{2\xi_1 \sin\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha}}. \qquad (4.58)$$

Сравнение результатов расчета по (4.58) и (4.38) показывает, что вычисленные перепады давления совпадают только для одного полуугла раскрытия границ канала $\alpha = 15°$, а для остальных возможных значений α наблюдается большое отличие (рис. 4.11). Видимо выражения (4.56) и (4.57) были определены только для одного конкретного значения полуугла раскрытия границ конической щели.

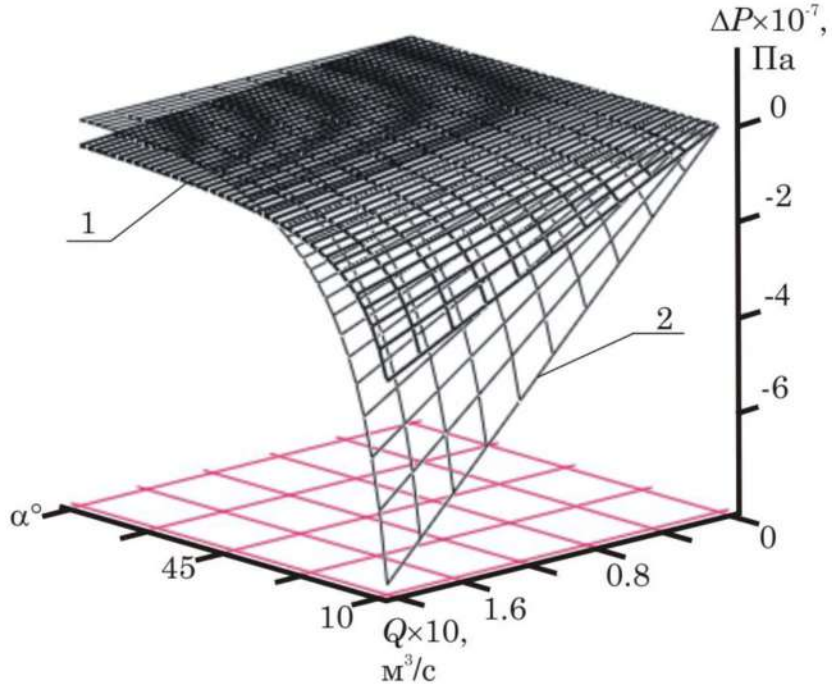


Рис. 4..11. Расходно-напор-ная характеристика соосного конического диффузора с параметрами: h = 0.01м; R_0 = 0.1м; R_1 = 0.4 м при течении жидкости с коэффициентом динамической вязкости, равным μ = 10 Па·с в зависимости от полуугла раскрытия границ канала. 1 – зависимость (4.38), 2 – зависимость (4.58).

4.7. Некоторые особенности распределения безразмерного давления при ползущем течении в соосных конических диффузорах

Уравнение позволяет овладеть опытом.

А. Де Сент-Экзюпери

Проанализируем зависимость перепада давления в распределительном устройстве экструзионной головки от полуугла раскрытия коаксиального конического канала постоянной ширины в том случае, когда диаметр гильзы шнекового канала не изменяется, т.е. изменение α происходит при повороте образующих канала вокруг точки A (рис. 4.12). Поскольку мы будем исследовать перепад давления в канале в зависимости от α, воспользуемся для этого выражением (4.43).

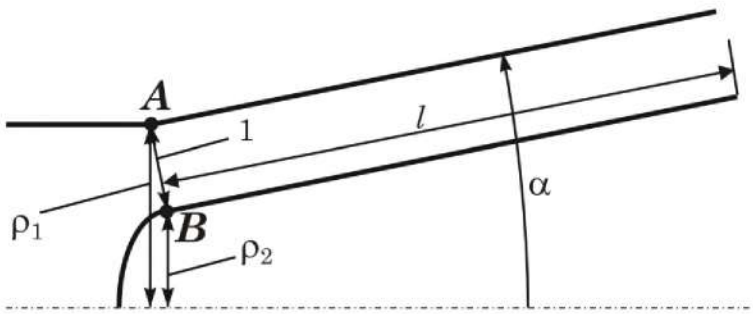


Рис. 4. 12. Распределительный участок экструзионной головки: ρ_1 – радиус внешней границы на входе в соосный конический канал (радиус втулки); ρ_2 – радиус внутренней границы на входе в канал (радиус торпеды или дорна).

Из геометрических соображений при постоянном значении ρ_1 мы можем записать:

$$\xi_0 = \frac{\rho_1}{\sin\alpha}; \quad \xi_1 = \frac{\rho_1 + l\sin\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4.59}$$

и тогда в этом случае безразмерное давление на выходе из канала определится следующим выражением

$$\Pi^* = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin\alpha} \ln\left|1 - \frac{2l\sin\alpha}{\chi_0 \cos\alpha - 2\rho_1}\right|. \tag{4.60}$$

Рассмотрим также случай, когда постоянным остается начальный радиус внутренней поверхности канала, т.е. изменение α происходит при вращении образующих относительно точки B (рис. 4.12). В этом случае мы можем определить безразмерные радиальные координаты входа в канал и выхода из него как:

$$\xi_0 = \frac{\rho_2 + \cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \xi_1 = \frac{\rho_2 + \cos\alpha + l\sin\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4.61}$$

после чего определим выражение для вычисления безразмерного давления на выходе из канала

$$\Pi^* = -\frac{6}{\chi_0^3 \sin\alpha} \ln\left|1 + \frac{2l\sin\alpha}{\chi_0 \cos\alpha - 2\rho_2}\right|. \tag{4.62}$$

Заметим, что расчеты выполнялись для $\chi_0 = 1$, т.е. в качестве масштаба длины выбрана ширина канала. Безразмерные значения ρ_1 и ρ_2 при $\alpha = 15°$ равны $\rho_1 = 2{,}59$, $\rho_2 = 1{,}62$, а безразмерная длина канала равна $l = 5$.

При малых значениях полуугла раскрытия граничных поверхностей α в первом случае абсолютная величина безразмерного давления, а значит и перепада размерного давления, на выходе из канала больше, чем во втором (рис. 4.13). Это происходит вследствие того, что при вращении с постоянным ρ_1, ρ_2 будет меньше, чем при изменении α при постоянном ρ_2, поскольку мы определили эти величины при $\alpha = 15°$ (рис. 4.12), а ширина канала остается постоянной, и поэтому в первом случае площадь поверхности поперечного сечения канала для одинаковых ξ меньше, чем во втором, а значит, средняя скорость течения и перепад давления будут большими в первом случае.

Во втором случае зависимость безразмерного давления на выходе из канала немонотонна. При увеличении α модуль П также, как и в первом случае для малых α, уменьшается, достигает на некотором значении α минимальной величины и затем начинает увеличиваться, в то время как в первом случае П монотонно растет с ростом α (рис. 4.13).

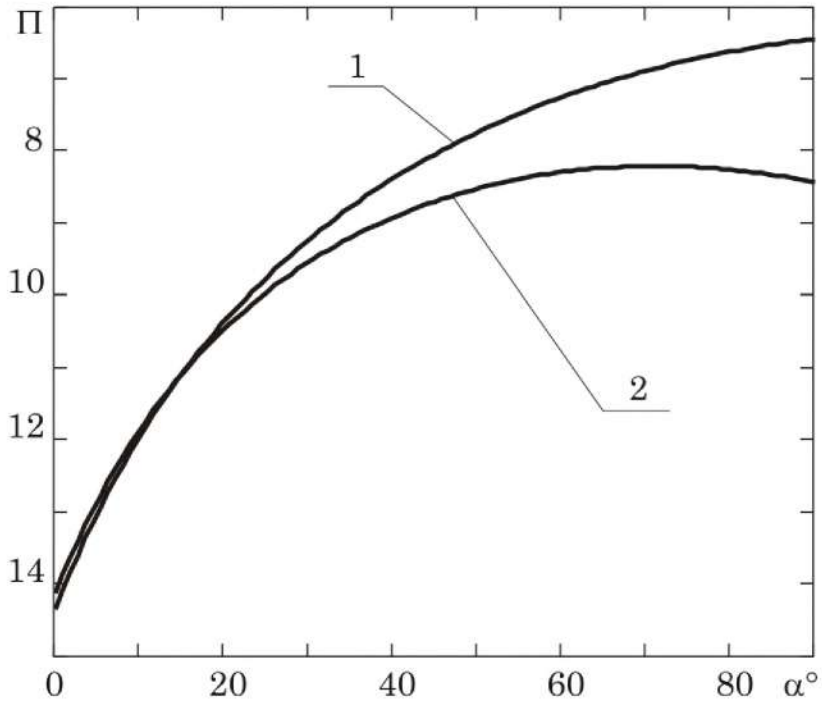


Рис. 4.13. Распределение безразмерного давления на выходе из соосного конического распределительного канала экструзионной головки в зависимости от полуугла раскрытия его границ: 1 – при постоянном безразмерном радиусе $\rho_1 = 2.59$; 2 – при постоянном $\rho_2 = 1.62$.

Происходит это вследствие того, что на некотором значении α во втором случае площадь поверхности поперечного сечения вблизи входа в канал начинает уменьшаться, что приводит к увеличению скорости и более значительному падению давления именно у входа в канал, где скорость течения наибольшая во втором случае по сравнению с первым случаем течения (рис. 4.14). В итоге и общий перепад давления при $\rho_2 = \text{const}$ для больших значений α будет больше, чем при $\rho_1 = \text{const}$. Понятно, что этот эффект может отчетливо наблюдаться только для достаточно коротких каналов, поскольку при увеличении длины канала относительный вклад начального участия течения, на котором $\bar{v}$ увеличивается с ростом α, в общий перепад давления уменьшается.

В заключение данной главы выполним еще один предельный переход. Возьмем одно из выражений для безразмерного давления,

которое использовалось для анализа течения в распределительном участке (рис. 4.12), например, (4.62) и устремим $\alpha \to 0$, т.е. вычислим предел

$$\lim_{\alpha\to 0} \Pi^* = \lim_{\alpha\to 0} -\frac{6}{\chi_0^3 \sin\alpha} \ln\left(1+\frac{2l\sin\alpha}{\chi_0\cos\alpha\text{-}2\rho_2}\right) = \tag{4.63}$$

$$= -\frac{12l}{\chi_0^3\left(2\rho_2+\chi_0\cos\alpha\right)} = -\frac{12l}{\chi_0^2\left(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2\right)},$$

где $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ – безразмерные радиусы границ цилиндрической щели.

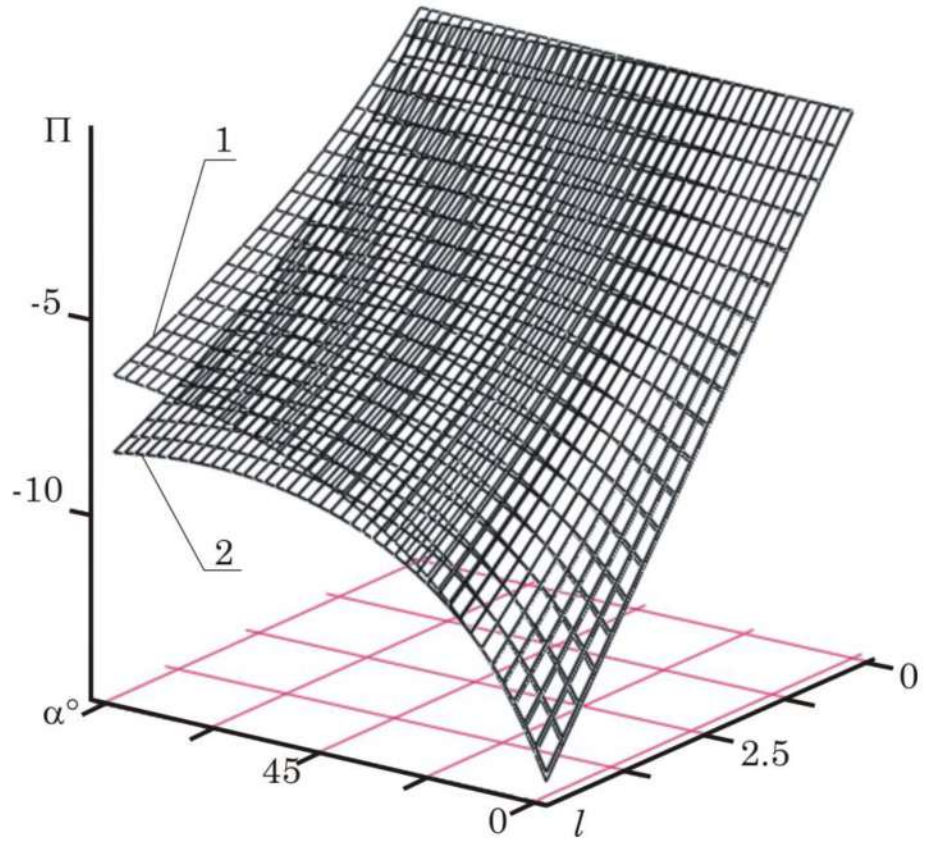


Рис. 4.14 Распределение безразмерного давления в соосном коническом канале распределительного участка экструзионной головки; 1 – распределение, полученное с помощью (4.60); 2 – (4.62).

Полученное нами выражение есть не что иное, как выражение для определения распределения безразмерного давления при течении в узкой кольцевой трубе. Но если ширина кольцевой трубы достаточно мала по сравнению с радиусом, то (4.63) можно переписать в виде

$$\Pi^* = -\frac{6l}{\chi_0^3 r}, \tag{4.64}$$

где r – безразмерный радиус трубы. Выражение (4.64) совпадает со значением, приведенным в работе [128].

При использовании безразмерных переменных (4.5), т.е. если в качестве линейного масштаба выбрать ширину щели, выражение (4.64) несколько упрощается и может быть записано как

$$\Pi = -6\frac{L}{R}, \tag{4.65}$$

где L и R – размерные значения длины и внешнего радиуса трубы.

Итак, мы получили еще один предельный переход, что еще раз подтверждает справедливость нашего решения.

В окончании настоящей главы заметим, что, зная напорно-расходную зависимость, мы можем определить функциональную зависимость мощности, необходимой для обеспечения заданного расхода жидкости через соосный конический диффузор [120]

$$N = \left|\Delta P(Q)\right| \times Q, \tag{4.66}$$

где ΔP – перепад давления в диффузоре, определяемый выражением (4.38).

ГЛАВА 5

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КОНФУЗОРЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Привлекательность такого вывода – в красивой симметрии между фазой расширения и фазой сжатия.

С. Хокинг

5.1. Краткая историческая справка о ранних работах

Перед вами пусть встают прошлого примеры...

Б. Окуджава

Пытаясь рассказать о ранних научных работах, выполненных с целью систематического исследования конфузорного ползущего течения в соосных конических каналах постоянной ширины, мы должны были бы дословно повторить написанное о конфузорных течениях в конических щелях с общей вершиной границ в разделе 3.1 данной монографии. Отметим здесь только то, что проблемы указанного течения кратко обсуждались в работах автора данной монографии [30, 34, 67]. По крайней мере, в этих работах были приведены решения задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины.

Заметим, что специально ползущие конфузорные течения ни в одной из указанных работ не рассматривались, но в работе [30] при анализе медленного конфузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины как предельный случай исследовано и течение в каналах постоянной ширины. В работе [34] при анализе течения с ненулевыми числами Рейнольдса, также как

предельный случай рассмотрено и ползущее течение, а в [67] приведено решение гидродинамической задачи для такого течения при постановке задачи конвективного теплообмена.

5.2. Математическая формулировка задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины

Для меня важнее уравнения, потому что политика нужна настоящему, а уравнения – это для вечности.

А. Эйнштейн

Также, как и при изучении различных внутренних конических течений в предыдущих главах мы для определения наиболее общих закономерностей ползущих конфузорных течений в соосных конических каналах постоянной ширины будем решать задачу, используя безразмерные координаты и параметры, которые с учетом (1.66) определим следующими выражениями:

$$t = \frac{T}{h_0} = \xi_1 - \xi ; \xi = \frac{R}{h_0} ; \upsilon = \frac{V}{V_0} ; \Pi = \frac{(P - P_0)h}{\mu V_0} ; \mathrm{Re} = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}, \qquad (5.1)$$

где h – линейный масштабный множитель, использующийся для обезразмеривания переменных в уравнениях движения жидкости, $\xi_1 = \frac{R_1}{h_0}$ – безразмерная координата входа в канал (рис. 4.1), V_0 – средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал скорость жидкости, которая определяется выражением

$$V_0 = \frac{Q}{S_1}, \qquad (5.2)$$

где S_1 – площадь поперечного сечения канала координатной поверхностью на его входе

$$S_1 = \pi h\left(2R_1 \sin\alpha - h\cos\alpha\right). \tag{5.3}$$

Текущая средняя по площади поперечного сечения канала скорость, очевидно, определится выражением

$$\bar{V} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi h\left[2\left(R_1 - T\right)\sin\alpha - h\cos\alpha\right]}. \tag{5.4}$$

Используя введенные здесь безразмерные переменные (5.1) и учитывая оценки приведенные для ползущего течения в соосных конических каналах (1.1) запишем уравнения, описывающие ползущее течение в соосных конических конфузорах (1.57) и (1.56), в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\sigma'\frac{\partial v}{\partial \chi}\right); \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma' v\right) = 0, \tag{5.6}$$

где

$$\sigma' = \left(\xi_1 - t\right)\sin\alpha - \cos\alpha. \tag{5.7}$$

Также, как и при решении задачи ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины мы для решения задачи в случае конфузорного течения будем использовать не уравнение неразрывности (5.6), а непротиворечивое ему условие постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала (см. также п. 4.2).

В размерном виде данное условие для конфузорного течения запишется в виде

$$2\pi\int_0^h \left[\left(R_1 - T\right)\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right] V d\mathrm{X} = Q. \tag{5.8}$$

Используя введенные безразмерные переменные (5.1) и определение (5.2), перепишем (5.8) в безразмерном виде

$$\int_0^1 \sigma' \upsilon d\chi = \frac{1}{2}\left(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha\right). \qquad (5.9)$$

Граничные условия для нахождения однозначного решения уравнения (5.9), которые ранее были записаны в размерном виде (1.70) – (1.72) в выбранных безразмерных переменных, примут вид:

$$\upsilon = 0, \quad \chi = 0; \qquad (5.10)$$

$$\upsilon = 0, \quad \chi = 1; \qquad (5.11)$$

$$\Pi = 0, \quad t = 0. \qquad (5.12)$$

Итак, мы дали математическую формулировку ползущего течения неньютоновской жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины, которая выражается системой уравнений (5.5), (5.9) – (5.12).

5.3. Аналитическое решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины

Я не потому не пользуюсь этой машиной, что ее не знаю, а потому, что стыжусь это делать.

Чжуан Цзы

Анализ условий течения в соосных конических каналах постоянной ширины был сделан в разделе 3 четвертой главы, и при рассмотрении конфузорного течения мы будем считать условие (4.14) выполненным, что справедливо для большинства технических приложений. Указанное условие позволяет упростить выражение для σ' и принять приближенное равенство $\sigma' = (\xi_1 - t)\sin\alpha$. Благодаря этому уравнение движения жидкости (5.5) примет вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \chi^2}. \qquad (5.13)$$

Замечания, приведенные в разделе 4.3 по поводу использования условия постоянства расхода вместо уравнения неразрывности, остаются в силе и при нашем рассмотрении конфузорного ползущего течения в конической щели с эквидистантными границами.

С помощью соотношения (4.1) мы можем определить безразмерную площадь поверхности поперечного сечения канала

$$s(t)=\pi\left[2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha\right]. \tag{5.14}$$

Для определения интенсивности изменения площади поверхности поперечного сечения канала введем относительную площадь поперечного сечения канала

$$\tilde{s}=\frac{S}{S_0}=\frac{2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha}{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}. \tag{5.15}$$

Распределение вдоль канала безразмерной средней по площади поперечного сечения скорости жидкости определится с помощью определений (5.2) и (5.4) соотношением

$$\overline{v}=\frac{\overline{V}}{V_0}=\frac{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}{2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1}{\tilde{s}}. \tag{5.16}$$

Поскольку вид уравнения (5.13) полностью совпадает с записью уравнения (4.15), совпадают и граничные условия для скорости – условия прилипания, (4.11), (4.12) и (5.16), (5.11), поэтому, следуя выражению (4.21), запишем решение, определяющее скорость через градиент давление, и для настоящего случая течения как

$$v=\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\left(\chi^2-\chi\right). \tag{5.17}$$

Далее подставим это выражение в условие постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала координатной поверхностью

$$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\int_0^1\left[(\xi_1-t)\sin\alpha-\chi\cos\alpha\right]d\chi=\frac{1}{2}\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right). \qquad (5.18)$$

Выполняя интегрирование в левой части (5.18) и разрешая уравнение относительно производной $\frac{d\Pi}{dt}$, найдем выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления вдоль ползущего конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины

$$\frac{d\Pi}{dt}=-12\frac{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}{2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha}. \qquad (5.19)$$

Данное выражение, учитывая (5.16), можно записать в виде

$$\frac{d\Pi}{dt}=-12\overline{v}. \qquad (5.20)$$

Подставляя найденное выражение для безразмерного градиента давления в (5.17), получим соотношение, определяющее распределение безразмерной скорости ползущего течения ньютоновской жидкости в коаксиальном коническом конфузоре

$$v=6\overline{v}\left(\chi-\chi^2\right)=6\frac{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}{2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha}\left(\chi-\chi^2\right). \qquad (5.21)$$

Чтобы получить явную зависимость безразмерного давления от безразмерной радиальной координаты t, проинтегрируем выражение (5.19) вдоль t

$$\begin{aligned}\Pi(t)&=-12\int\frac{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}{2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha}dt=\\&=6\frac{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\ln\left[2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha\right]=C,\end{aligned} \qquad (5.22)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования, которую определяем с помощью начального условия (5.12), а затем, подставляя в (5.22), находим выражение, описывающее распределение безраз-

мерного давления при конфузорном ползущем течении в соосном коническом канале

$$\Pi(t)=\frac{6(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\ln\frac{2(\xi_1-t)\sin\alpha-\cos\alpha}{2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha}, \qquad (5.23)$$

или с учетом (5.10)

$$\Pi(t)=6(\operatorname{ctg}\alpha-2\xi_1)\ln\bar{v}\,. \qquad (5.24)$$

Заметим, что если в найденных нами выражениях (5.19), (5.21) и (5.23) положить $\alpha = 90°$, то мы получим формулы, описывающие распределение безразмерного давления, его градиента и безразмерной скорости при конфузорном ползущем радиальном течении между двумя параллельными пластинами:

$$\frac{d\Pi}{dt}=-12\frac{\xi_1}{\xi_1-t}; \qquad (5,25)$$

$$v=6\frac{\xi_1}{\xi_1-t}\left(\chi-\chi^2\right); \qquad (5.26)$$

$$\Pi=12\xi_1\ln\frac{\xi_1-t}{\xi_1}. \qquad (5.27)$$

5.4. Анализ решения задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

К. Прутков

Распределение безразмерной скорости жидкости, полученное нами в результате решения задачи ползущего течения в соосном

коническом конфузоре, отличается от распределения скорости при диффузором течении (4.25) только масштабным множителем, представляющем отношение масштабов скорости, выбранных при решении задач в конфузоре и диффузоре, т.е. отношения средних скоростей на входе в канал (5.2) и (4.3). Это следует из постановки задачи, поэтому мы при анализе решения задачи в конфузоре лишь кратко остановимся на описании полученных распределений и их отличиях от распределений, полученных для ползущего течения в диффузоре. При этом, конечно же, необходимо учитывать, что выход из диффузора является входом в конфузор.

Прежде всего, отметим, что средняя по поверхности сечения канала скорость жидкости при течении в конфузоре (5.16) вследствие уменьшения площади поверхности поперечного сечения канала будет возрастать вдоль канала по абсолютной величине, поэтому и все остальные переменные, которые определяются средней скоростью (5.20), (5.24) будут увеличиваться по абсолютному значению. Будет увеличиваться, и модуль скорости сдвига на границе канала вдоль течения

$$\left|\dot{\gamma}_{\Gamma}\right\|_{\chi=\substack{0\\1}} = 6\bar{v}\,. \tag{5.28}$$

Модуль градиента давления также будет линейно возрастать с увеличением $\bar{v}$ вдоль течения (5.20), поэтому абсолютная величина безразмерного давления вдоль течения будет расти вдоль течения нелинейно (рис. 5.1).

Для того, чтобы получить расходно-напорную характеристику ползущего течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины h и радиальными координатами входа R_1 и выхода R_0, нам достаточно, используя определения (5.1), перевести выражение (5.23) в размерный вид и подставить в него значение средней скорости на входе в канал (5.2) V_0, выраженное через расход жидкости, в результате чего получим

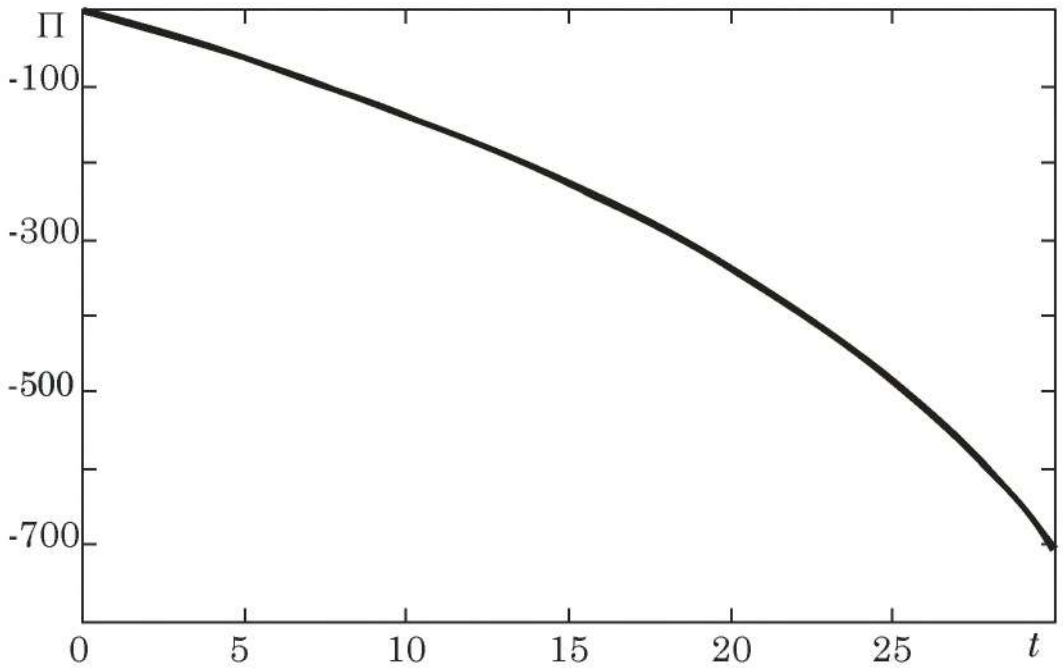


Рис. 5.1. Распределение безразмерного давления при течении в соосном коническом конфузоре с геометрическими параметрами: $\alpha = 15°$, $\xi_1 = 40$.

$$\Delta P(Q) = \frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin\alpha} \ln \frac{2R_0 \sin\alpha - h\cos\alpha}{2R_1 \sin\alpha - h\cos\alpha}. \qquad (5.29)$$

Расходно-напорная характеристика соосного конического канала постоянной ширины при конфузорном течении будет совпадать с характеристикой диффузорного течения для этого же канала. Это следует из выражений, определяющих распределение безразмерного давления в канале (4.28) и (5.23). Если привести их к размерному виду и записать перепад давления на длине канала, то выражения совпадут.

Если в (5.29) положить $\alpha = 0$, то получим выражение, определяющее расходно-напорную характеристику сходящегося ползущего течения между плоскими параллельными дисками

$$\Delta P(Q) = \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln \frac{R_0}{R_1}. \qquad (5.30)$$

Очевидно, что (5.30) будет определять расходно-напорную характеристику и при расходящемся течении между дисками.

Заметим, что, зная напорно-расходную зависимость, мы можем определить функциональную зависимость мощности [120], необходимой для обеспечения заданного расхода жидкости через соосный конический конфузор постоянной ширины

$$N = \Delta P(Q) \times Q, \qquad (5.31)$$

где ΔP – перепад давления в конфузоре, определяемый выражением (529) либо выражением (5.30).

ГЛАВА 6

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Он вещества не укорял
За медленность и постоянство

С. Городецкий

6.1. Краткий обзор ранних работ

От Ромула до наших дней

А.С. Пушкин

В разделе 4.1. было кратко рассказано о ранних работах, посвященных диффузорным течениям в соосных конических каналах, не имеющих общей вершины их границ. И хотя рассматривали там мы только течение в каналах с эквидистантными границами, часть упомянутых там работ можно отнести и к соосным коническим каналам переменной ширины. Особенно это касается работ, в которых для расчета параметров течения использовался ступенчатый метод аппроксимации канала, но с уже сделанными нами в разделе 4.6 замечаниями.

Специально ползущее диффузорное течение в соосных каналах переменной ширины автором исследовалось в работе [24] с помощью использования биконической системы координат. В работе [40] автором получено приближенное решение в биконических координатах задачи диффузорного ползущего течения в соосном коническом канале с общей вершиной его границ.

В настоящей главе мы более подробно и систематически рассмотрим ползущее течение в соосных конических диффузорах с переменной шириной канала, основываясь на методах и идеях, пред-

ставленных автором данной монографии в двух последних работах, на которые были сделаны ссылки.

6.2. Формулировка задачи ползущего диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с переменной вдоль течения шириной

Так как во всяком учении о природе имеется науки в собственном смысле лишь столько, сколько имеется в ней априорного познания, то учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена в нем математика.

И. Кант

Учитывая оценки членов в уравнениях гидродинамики, выполненные нами в главе 1, запишем для рассматриваемых каналов уравнения движения и неразрывности для аксиально-симметричного течения (1.56)–(1.58) с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \mu \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} \left(\Omega \frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}} \right); \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}} = \mu \frac{\cos\alpha}{\Omega} \frac{\partial V}{\partial R}; \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V) = 0, \tag{6.3}$$

где V – радиальная скорость жидкости, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, текущей в диффузоре.

В работах [28, 32] автором показано (см. также гл. 21), что, когда выполняется условие $R \geq 2{,}22 h_0 \mathrm{ctg}\alpha$, которое справедливо для большинства практически интересных случаев рассматриваемых течений, влиянием различия в кривизне граничных поверхностей в уравнениях гидродинамики можно пренебречь, т.е. указанное условие позволяет упростить систему (6.1)–(6.3), записав для Ω выраже-

ние $\Omega \approx R\sin\alpha$, и получить следущие оценки величин для производных давления: $\frac{\partial P}{\partial R} \approx \mu \frac{V}{h^2}$, $\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}} = \mu \frac{V}{R^2 \mathrm{tg}\alpha}$. И, поскольку, как правило, в практически интересных случаях выполняется неравенство $R \gg h$, что соответствует условию пренебрежения разностью в кривизне граничных поверхностей, упомянутому выше, откуда получаем порядковое соотношение $\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}} = o\left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)$, что позволяет упростить уравнения движения (6.1), (6.2) и записать их в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{X}^2}; \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}} = 0. \tag{6.5}$$

Условиями однозначности для определения распределения скорости жидкости, текущей в канале, будут условия прилипания на границах канала:

$$V = 0,\ \mathrm{X} = 0; \tag{6.6}$$

$$V = 0,\ \mathrm{X} = h(R), \tag{6.7}$$

где $h(R)$ – функция, определяющая изменение ширины канала вдоль течения.

Поскольку, как отмечалось в главе 1, в большинстве технических приложений границами соосных конических поверхностей являются круговые конусы с прямолинейными образующими, то в качестве функции $h(R)$ в дальнейшем будем использовать, если это не будет специально оговорено, линейную функцию

$$h(R) = h_0 + b(R - R_0), \tag{6.8}$$

показывающую зависимость расстояния по оси X от внешней конической поверхности до внутренней поверхности (рис. 6.1). В том случае, когда конические границы канала раскрываются в одну сторо-

ну (см. рис. 1.3), параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ канала (рис. 6.1), т.е.

$$b = \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1), \tag{6.9}$$

и, следовательно, из геометрических соображений он должен удовлетворять условию

$$b > \frac{h_0}{R_0 - R_1}. \tag{6.10}$$

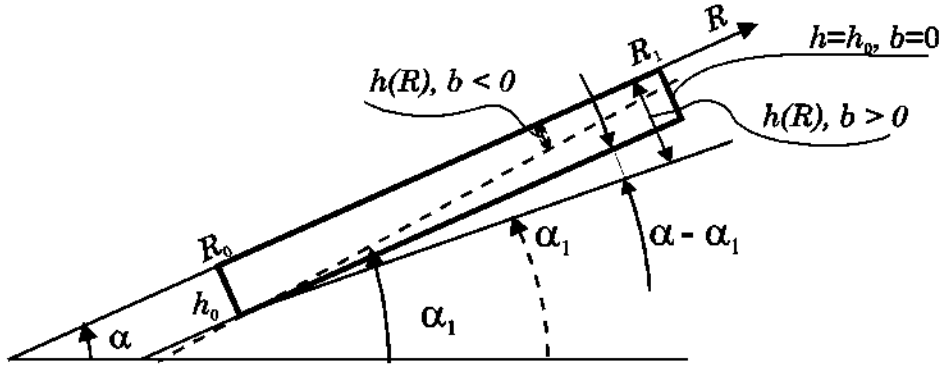


Рис. 6.1. Продольный разрез соосного конического диффузора с линейно изменяющейся шириной канала вдоль течения: $h(R)$ – ширина канала; b – коэффициент, определяющий линейную зависимость $h(R)$; h_0 – ширина канала на входе в него; R, R_0, R_1 – текущая радиальная координата, радиальная координата входа в канал и выхода из него; α – полуугол раскрытия внешней конической поверхности; α_1 – внутренней.

В настоящей главе мы рассмотрим ползущее течение как в каналах с раскрытием границ в одну сторону, т.е. каналы, для которых величина b не превосходит значения $\mathrm{tg}\alpha$, т.е. $b \le \mathrm{tg}\alpha$, и, значит, $\alpha_1 \ge 0$, так и в каналах с раскрытием границ навстречу друг другу, о чем будет сказано отдельно.

Для давления условием однозначности будет заданная величина давления на входе в канал

$$P = P_0, \;\; R = R_0. \tag{6.11}$$

В последнем условии важно иметь ввиду, что значение давления P_0 является относительной величиной, от которой мы можем описывать падение давления вдоль канала при ламинарном тече-

нии в коаксиальном коническом диффузоре, т.е. вычислять значение $\Delta P = P - P_0$, где P – текущее давление. Подстановка ΔP в уравнение (6.4) вместо P не изменяет самого уравнения, и поэтому при решении поставленной задачи мы можем определить распределения перепада давления и градиента давления вдоль канала. Определение перепада давления в канале является важной задачей, поскольку позволяет построить расходно-напорную характеристику канала $\Delta P(Q)$, которая используется при конструировании промышленных аппаратов, например, для производства полимеров [7, 61, 123].

При формулировке данной задачи мы уже использовали закон сохранения вещества, записанный в дифференциальной форме уравнения неразрывности (6.3), а в дальнейшем, при решении поставленной задачи, будем применять интегральную формулировку данного закона, т.е. условие постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала, которое с учетом несжимаемости жидкости запишется в биконических координатах в виде

$$2\pi \int_0^{h_0+b(R-R_0)} (R\sin\alpha - X\cos\alpha)V dX = Q, \qquad (6.12)$$

где Q – объемный расход жидкости, м^3/с.

6.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины



Ш. Кобылински

Для того, чтобы определить наиболее общие свойства течений вязких ньютоновских жидкостей в соосных конических диффузорах, не связанных с конкретными значениями реологических парамет-

ров и абсолютных размеров канала, полученную систему уравнений (6.4)–(6.12) будем исследовать в безразмерной записи.

Для этого нам необходимо выбрать масштабные множители, с помощью которых будет осуществлено обезразмеривание уравнений (6.4)–(6.12). В качестве линейного масштаба мы можем выбрать значение ширины канала на его входе, т.е. h_0. В качестве масштаба скорости будем использовать величину средней по площади поперечного сечения канала скорости на его входе – $V_0 = V(R_0)$. Чтобы определить значение V_0 нам необходимо вычислить значение площади поверхности поперечного сечения канала на его входе, но нам также понадобится значение площади поперечного сечения канала при любом значении продольной координаты R, поэтому определим сначала зависимость $S(R)$, откуда затем сможем получить значение $S_0 = S(R_0)$.

Дифференциал площади для поверхности поперечного сечения соосного конического канала в биконической системе координат (рис. 6.2) запишется как

$$dS = \left(R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right)d\mathrm{X}, \tag{6.13}$$

и тогда для определения площади поперечного сечения канала и ее зависимости от R мы можем записать

$$S(R) = 2\pi \int_0^{h_0+b(R-R_0)} \left(2R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right)d\mathrm{X} = \tag{6.14}$$

$$= \pi\left[h_0 + b\left(R - R_0\right)\right]\left\{2R\sin\alpha - \left[h_0 + b\left(R - R_0\right)\right]\cos\alpha\right\}.$$

Из (6.14), полагая $R = R_0$, получим для площади поперечного сечения на входе в канал значение

$$S_0 = \pi h_0\left(2R_0\sin\alpha - h_0\cos\alpha\right). \tag{6.15}$$

Теперь мы можем записать выражение, определяющее среднюю по поперечному сечению скорость на входе в канал

$$V_0 = \frac{Q}{S_0} = \frac{Q}{\pi h_0\left(2R_0\sin\alpha - h_0\cos\alpha\right)}. \tag{6.16}$$

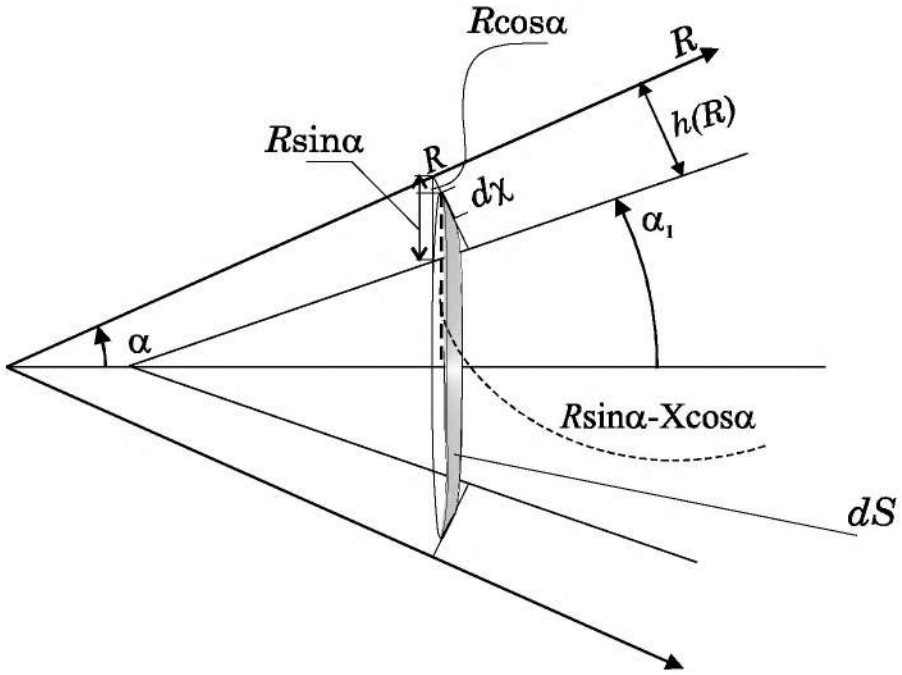


Рис. 6.2. К определению площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала с переменной, вдоль течения, шириной в биконической системе координат: *h(R)* – ширина канала; *R* – текущая радиальная координата; *dS* – площадь элемента конической поверхности поперечного сечения канала; α, α_1 – полууглы раскрытия внешней и внутренней поверхностей канала.

Аналогично можно записать выражение, определяющее распределение вдоль течения размерной средней по площади поперечного сечения канала скорости

$$\bar{V}(R)=\frac{Q}{S}=\frac{Q}{\pi\left[h_0+b\left(R-R_0\right)\right]\left\{2R_0\sin\alpha-\left[h_0+b\left(R-R_0\right)\right]\cos\alpha\right\}}. \quad (6.17)$$

Поскольку, как уже отмечалось, в данной монографии мы исследуем изотермические течения ньютоновской жидкости, значение коэффициента динамической вязкости μ будет постоянным в пределах всего канала, и мы можем ввести безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{R}{h_0};\ \chi=\frac{X}{h_0};\ \upsilon=\frac{V}{V_0};\ \Pi=\frac{\left(P-P_0\right)h_0}{\mu V_0}, \quad (6.18)$$

при использовании которых уравнения (6.4)–(6.8), (6.11) и (6.12) примут вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \chi^2}; \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0; \tag{6.20}$$

$$\upsilon = 0, \ \chi = 0; \tag{6.21}$$

$$\upsilon = 0, \ \chi = 1 + b(\xi - \xi_0); \tag{6.22}$$

$$\tilde{h}(\xi) = 1 + b(\xi - \xi_0); \tag{6.23}$$

$$\Pi = 0, \ \xi = \xi_0; \tag{6.24}$$

$$\int_0^{1+b(\xi-\xi_0)} (\xi \sin\alpha - \chi \cos\alpha)\upsilon d\chi = \frac{1}{2}(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha). \tag{6.25}$$

Мы также можем определить относительную безразмерную площадь поверхности поперечного сечения канала как

$$\tilde{s} = \frac{S(R)}{S_0} = \frac{\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\left\{2\xi - \left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\mathrm{ctg}\alpha\right\}}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha}, \tag{6.26}$$

а безразмерную среднюю по поперечному сечению канала скорость как

$$\bar{\upsilon} = \frac{\bar{V}}{V_0} = \frac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha}{\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\left\{2\xi - \left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\mathrm{ctg}\alpha\right\}}, \tag{6.27}$$

и тогда для соотношения между величинами $\bar{\upsilon}$ и $\tilde{s}$ имеем выражение

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{\tilde{s}}. \tag{6.28}$$

Далее, дважды проинтегрировав (6.19) по координате χ, получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\chi^2 = \upsilon + C_1\chi + C_2, \tag{6.29}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования, которые определяем, подставляя (6.29) в (6.21) и (6.22)

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right], \quad C_2 = 0. \tag{6.30}$$

И тогда для υ из (6.29) получим выражение

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\left\{\chi^2 - \left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\chi\right\}. \tag{6.31}$$

Формулу, определяющую распределение безразмерного градиента давления вдоль течения, получим с помощью условия постоянства расхода (6.25). Для этого подставим (6.31) в левую часть (6.25) и проинтегрируем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\int_0^{1+b(\xi+\xi_0)}\left(\xi\sin\alpha - \chi\cos\alpha\right)\left\{\chi^2 - \left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\chi\right\}d\chi = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\left\langle \xi\sin\alpha\int_0^{1+b(\xi-\xi_0)}\left\{\chi^2 - \left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\chi\right\}d\chi - \right. \\
&\left. -\cos\alpha\int_0^{1+b(\xi-\xi_0)}\left\{\chi^3 - \left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\chi^2\right\}d\chi\right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\left\langle \xi\sin\alpha\left\{\frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{2}\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\chi^2\right\}\Bigg|_0^{1+b(\xi-\xi_0)} - \right. \\
&\left. -\cos\alpha\left\{\frac{1}{4}\chi^4 - \frac{1}{3}\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\chi^3\right\}\Bigg|_0^{1+b(\xi-\xi_0)}\right\rangle = \\
&= \frac{1}{24}\frac{d\Pi}{d\xi}\left\{\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]^4\cos\alpha - 2\xi\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]^3\sin\alpha\right\}.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Далее, подставляя результат, полученный в (6.32) в (6.25), определим безразмерный градиент давления

$$\frac{d\Pi}{d\xi}=\frac{12\left(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha\right)}{\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^4\operatorname{ctg}\alpha-2\xi\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^3}. \qquad (6.33)$$

Принимая во внимание (6.27), мы выражение (6.33) можем записать в виде

$$\frac{d\Pi}{d\xi}=-12\frac{\bar{v}(\xi)}{\tilde{h}^2(\xi)}, \qquad (6.34)$$

т.е. безразмерный градиент давления прямо пропорционален средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости и обратно пропорционален квадрату ширины канала. Очевидно, что данное соотношение пропорциональности сохранится и для размерных величин.

Подставляя выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления в канале (6.33) в (6.31), получим формулу, определяющую распределение безразмерной скорости в случае диффузорного течения в соосном коническом канале с линейно изменяющейся шириной вдоль течения

$$v(\xi,\,\chi)=\frac{6\left(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha\right)\left\{\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]\chi-\chi^2\right\}}{2\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^3\xi-\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^4\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (6.35)$$

Для определения явного вида зависимости безразмерного давления от безразмерной продольной координаты, проинтегрируем (6.33) вдоль ξ с учетом начального условия (6.24), но сначала преобразуем интеграл от (6.33) к более удобному для интегрирования виду

$$\Pi(\xi)=12\left(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha\right)\int\frac{d\xi}{\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^3\left\{\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]\operatorname{ctg}\alpha-2\xi\right\}}= \qquad (6.36)$$

$$= \frac{12(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)}{(1-b\xi_0)\operatorname{ctg}\alpha}\int \frac{d\xi}{\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]^3\left[1+\dfrac{b\operatorname{ctg}\alpha-2}{\operatorname{ctg}\alpha(1-b\xi_0)}\xi\right]}.$$

Выполняя в (6.36) замену независимой переменной

$$y = g\left[1+b(\xi-\xi_0)\right], \tag{6.37}$$

где $g = \dfrac{b\operatorname{ctg}\alpha - 2}{2(1-b\xi_0)}$, получим выражение более удобное для интегрирования

$$\Pi(y) = \frac{6(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)g^2}{(1-b\xi_0)}\int \frac{dy}{y^3(1+y)}. \tag{6.38}$$

Выполняя интегрирование, находим

$$\Pi(y) = \frac{6(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)g^2}{(1-b\xi_0)}\left(\ln\frac{y}{1+y} + \frac{2y-1}{y} + C\right), \tag{6.39}$$

где C – постоянная интегрирования.

Возвращаясь в (6.39) к первоначальным безразмерным координатам и определяя значение постоянной интегрирования из начального условия (6.24), найдем выражение, описывающее распределение безразмерного давления при ползущем диффузорном течении в соосном коническом канале

$$\Pi(\xi) = \frac{6(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)}{1-b\xi_0}\left\{\frac{(b\operatorname{ctg}\alpha - 2)^2}{4(1-b\xi_0)^2}\ln\frac{(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)\tilde{h}(\xi)}{2\xi - \tilde{h}(\xi)\operatorname{ctg}\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{b(\xi-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi)}\left[\frac{2-b\operatorname{ctg}\alpha}{1-b\xi_0} + \frac{1+\tilde{h}(\xi)}{\tilde{h}(\xi)}\right]\right\}. \tag{6.40}$$

Заметим, что если в (6.40) положить $\alpha = 90°$, то мы получим выражение, описывающее распределение безразмерного давления при радиальном даффузорном течении между плоскостью и круг-

лым конусом с осью, перпендикулярной плоскости, и вершиной, не расположенной на плоскости (рис. 6.3)

$$\Pi(\xi)=\frac{12\xi_0}{1+b\xi_0}\left\{\frac{1}{(1-b\xi_0)^2}\ln\frac{\xi_0}{\xi}\tilde{h}(\xi)+\frac{b(\xi-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi)}\left[\frac{2}{1-b\xi_0}+1+\frac{1}{\tilde{h}(\xi)}\right]\right\}. \quad (6.41)$$

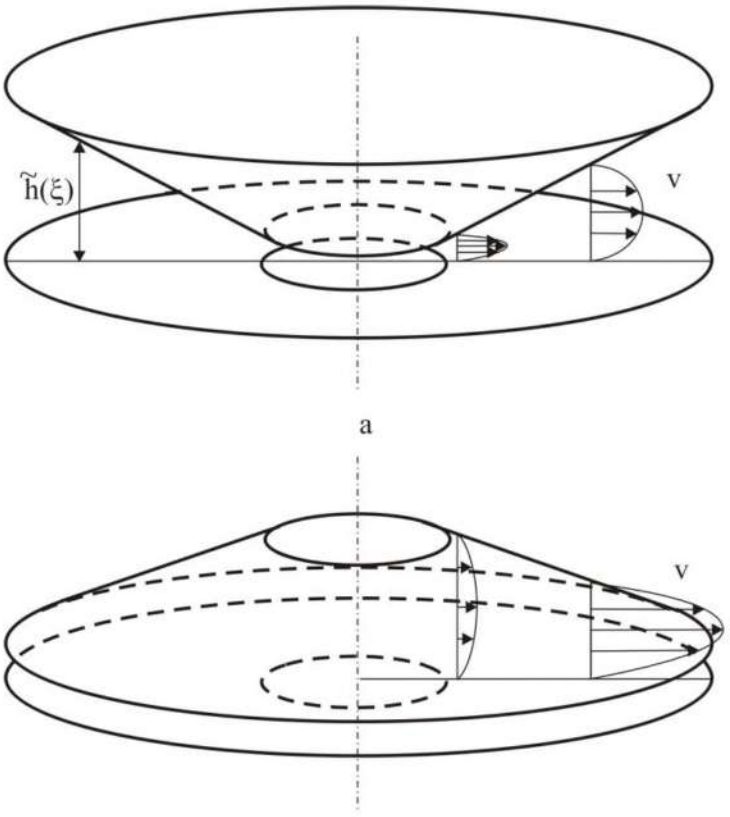


Рис. 6.3. Геометрия расходящегося течения между плоскостью и конической поверхностью, расположенной над ней. Ось конуса перпендикулярна плоскости а его вершина не лежит на данной плоскости. а – течение в канале с увеличивающейся шириной; б – с уменьшающейся шириной вдоль течения.

Легко видеть, что в полученных нами выражениях выполняется предельный переход к решению задачи ползущего течения в канале с постоянной шириной. Действительно, полагая в (6.33), (6.34), (6.35) и (6.40) $b=0$, мы получим выражения, описывающие

течение в соосном коническом диффузоре постоянной ширины (4.23), (4.25), (4.28) и (4.32) соответственно.

Используя решение (6.40), определяющее распределение безразмерного давления вдоль канала и определение безразмерных переменных (6.18), запишем выражение, определяющее расходно-напорную характеристику ползущего течения в соосном коническом канале переменной вдоль течения ширины

$$\Delta P(Q)=\frac{6\mu Q}{\pi h_0^3(1-b\xi_0)\sin\alpha}\left\{\frac{(b\,\mathrm{ctg}\alpha-2)^2}{4(1-b\xi_0)^2}\ln\frac{(2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)\tilde{h}(\xi_1)}{2\xi_1-\tilde{h}(\xi_1)\mathrm{ctg}\alpha}+\right. \tag{6.42}$$

$$\left.+\frac{b(\xi_1-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi_1)}\left[\frac{2-b\,\mathrm{ctg}\alpha}{1-b\xi_0}+\frac{1+\tilde{h}(\xi_1)}{\tilde{h}(\xi_1)}\right]\right\}$$

Зная напорно-расходную зависимость, мы можем определить функциональную зависимость мощности, необходимой для обеспечения заданного расхода жидкости через соосный конический диффузор с помощью выражения (4.66) т.е. $N=\Delta P(Q)\times Q$.

Далее в настоящей главе мы еще не один раз будем возвращаться к обсуждению расходно-напорных характеристик ползущего течения в соосных конических каналах переменной ширины.

Полученные нами выражения (6.33), (6.35) и (6.40) определяют решение задачи медленного ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с линейно изменяющейся шириной вдоль течения. Решение существует практически для всего возможного диапазона изменения параметра b (6.10), за исключением одного значения, при котором выражение (6.40) обращается в бесконечность. Это возможно, когда знаменатель в (6.40) обращается в ноль, т.е. при значении b, равном

$$b=\frac{1}{\xi_0}. \tag{6.43}$$

Как видно из рисунка 6.4, данное значение b соответствует случаю, когда канал формируется соосными коническими поверх-

ностями с общей вершиной. Очевидно, что в этом случае ширина канала будет увеличиваться вдоль течения при любых возможных значениях α и α_1.

6.4. Решение задачи ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах, образованных коническими поверхностями с общей вершиной в биконическом приближении

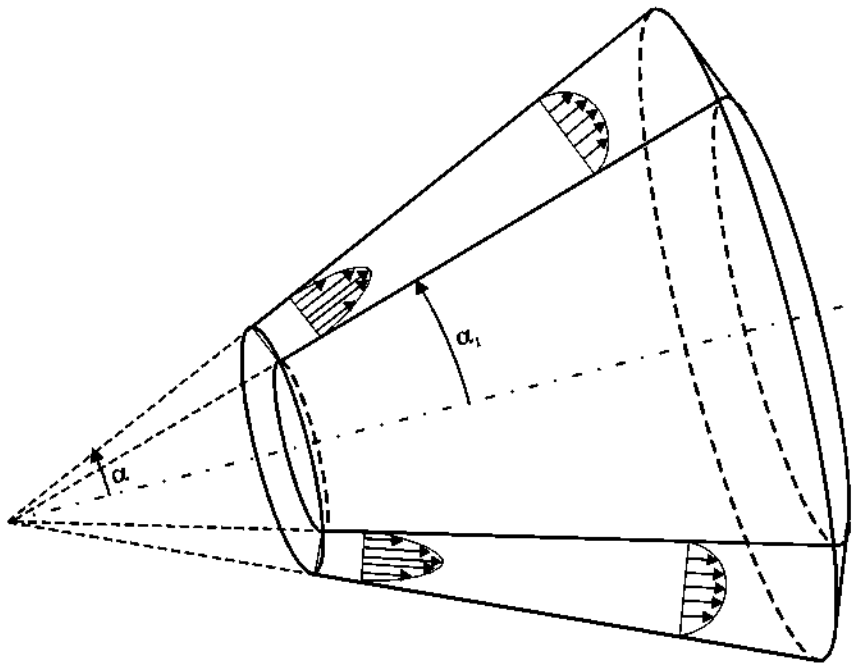
Человек стремится каким-то адекватным способом создавать в себе простую и ясную картину мира...

А. Эйнштейн

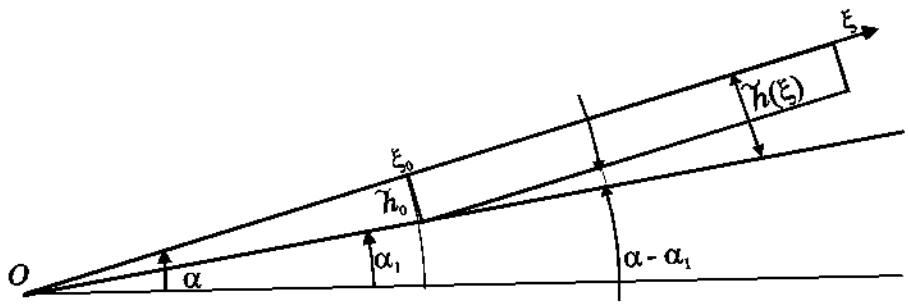
В главе 2 мы получили точное решение задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ в сферических координатах. Определение распределения скорости и вычисление давления в канале, образованном соосными коническими поверхностями, которые имеют общую вершину, с помощью решения, полученного нами в главе 2, требует достаточно большого объема вычислений, и пользоваться им без наличия вычислительной техники не всегда удобно. Поэтому сейчас рассмотрим медленное ламинарное течение в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ в биконических координатах с частичным учетом кривизны конических поверхностей, образующих канал, и сравним его с решением, полученным нами ранее в главе 2, которое учитывало все геометрические особенности канала.

При анализе геометрии соосного конического канала, образованного коническими поверхностями с общей вершиной (рис. 6.4), мы с помощью выражения (6.23) и значения для параметра b, которое в данном случае определяется выражением (6.43), получим изменение безразмерной ширины канала, образованного конусами с общей вершиной в биконических координатах

$$\tilde{h}(\xi) = \frac{\xi}{\xi_0}. \qquad (6.44)$$



а



б

Рис. 6.4. Геометрия соосного конического диффузора переменной ширины, образованного коническими поверхностями с общей вершиной – а: α, α_1 – полууглы раскрытия внешней и внутренней поверхностей канала; б – представление радиального сечения соосного конического канала, образованного коническими поверхностями с общей вершиной в биконической системе координат $\tilde{h}_0$ – безразмерная ширина канала на его входе; $\tilde{h}(\xi)$ – текущая безразмерная ширина канала; ξ_0, ξ – безразмерные координаты входа и текущая.

Изменение относительной безразмерной площади поверхности поперечного сечения вдоль канала в этом случае выразится формулой, получаемой из (6.26) подстановкой $b = 1/\xi_0$:

$$\tilde{s}_{\text{com}}(\xi) = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2, \tag{6.45}$$

или, используя (6.44), запишем (6.45) в виде

$$\tilde{s}(\xi) = \tilde{h}(\xi)^2, \tag{6.46}$$

а средняя по поперечному сечению канала безразмерная скорость в рассматриваемом случае примет вид

$$\overline{v}_{com}(\xi) = \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{s}_{com}}, \tag{6.47}$$

и с учетом (6.46) $\overline{v}_{com}$ может быть определена как

$$\overline{v}_{com}(\xi) = \frac{1}{\tilde{h}^2(\xi)}. \tag{6.48}$$

Заметим, что выражения (6.45) и (6.47) полностью совпадают с аналогичными зависимостями, полученными для безразмерной средней скорости и относительной площади поверхности поперечного сечения соосного конического диффузора в сферических координатах (2.16), (2.18).

Далее, подставляя значение параметра b (6.43) в (6.35), получим распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ

$$v_{com}(\xi,\ \chi) = -6\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\left[\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)\chi^2 - \chi\right] = \frac{6}{\tilde{h}^4}\left(\chi - \tilde{h}\chi^2\right). \tag{6.49}$$

Непосредственно из (6.40) мы не можем получить распределение безразмерного давления в рассматриваемом канале, поскольку, подставив (6.43) в (6.40), мы получим бесконечность. Более того, именно благодаря расхождениям решения $\Pi(\xi)$ при $b = 1/\xi_0$ мы пришли к возможности решения задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ, используя биконическую систему координат. Действительно,

подставив (6.43) в (6.33) мы получили выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления вдоль рассматриваемого канала

$$\frac{d\Pi_{com}}{d\xi} = -12\frac{\xi_0^4}{\xi^4}, \tag{6.50}$$

или, принимая во внимание (6.47), запишем (6.50) в виде

$$\frac{d\Pi_{com}}{d\xi} = -12\bar{v}_{com}^2 = -\frac{12}{\tilde{h}_{com}^4}. \tag{6.51}$$

Интегрируя (6.50) с начальными условиями (6.24), получаем распределение безразмерного давления при медленном ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной у границ

$$\Pi_{com} = 4\xi_0\left[\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3 - 1\right], \tag{6.52}$$

или, используя (6.44), можно записать

$$\Pi_{com} = \frac{4\xi_0}{\tilde{h}^3}\left(1-\tilde{h}^2\right). \tag{6.53}$$

Теперь мы можем записать, что выражения (6.33), (6.35) и (6.40) для $b \neq \frac{1}{\xi_0}$ и выражения (6.49), (6.50) и (6.52) для $b = \frac{1}{\xi_0}$ полностью определяют решение поставленной задачи ползущего диффузорного течения в соосном коническом канале с линейно изменяющейся шириной вдоль течения.

6.5. Анализ ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах с границами без общей вершины

Природа с красоты своей покрова снять не позволяет,
И ты машинами не выудешь у ней, чего твой дух не угадает.

В. Соловьев

В рассматриваемом случае решение определяется тремя параметрами: безразмерной координатой входа – ξ_0, полууглом рас-

крытия внешней границы канала – α и параметром b, характеризующим интенсивность изменения ширины канала вдоль течения. Рассмотрим, как влияют указанные параметры на основные характеристики течения, т.е. распределение скорости, давления и его градиента.

Сразу отметим различие соосных конических каналов с $b>0$ и $b<0$. Каналы с $b>0$ могут иметь бесконечно большую длину (рис. 6.1), в то время, как у соосных конических диффузоров с параметром $b<0$, т.е. с уменьшающейся шириной вдоль течения, длина ограничена, и, очевидно, не может превышать величину, равную $-\frac{1}{b}$.

Указанные геометрические особенности соосных конических диффузоров переменной ширины канала вдоль течения позволяют сразу определить и некоторые особенности в распределении безразмерного давления вдоль течения, а соответственно и перепада размерного давления.

Если при $b > 0$ устремить $\xi \to \infty$ и вычислить предел выражения (6.40) при $\xi \to \infty$, то получим значение

$$\Pi(\infty)=\lim_{\xi\to\infty}\Pi(\xi)=\frac{3(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{(1-b\xi_0)^2}\left[\frac{(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2}{2(1-b\xi_0)}\ln\frac{b(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{2-b\operatorname{ctg}\alpha}+\right.$$

$$\left.+3-b(\xi_0+\operatorname{ctg}\alpha)\right]. \qquad (6.54)$$

Заметим, что выражение (6.54) в случае расходящегося от оси течения в канале, образованном плоскостью и конусом, расположенном над ней (рис. 6.3а), т.е. при $\alpha = 90°$, запишется как

$$\Pi_{\alpha=90^\circ}(\infty)=\frac{6\xi_0}{(1-b\xi_0)^2}\left(\frac{2}{1-b\xi_0}\ln b\xi_0+3-b\xi_0\right). \qquad (6.55)$$

Выражения (6.54) и (6.55) говорят, что безразмерное давление на выходе из бесконечно длинного соосного конического диффузора всегда будет конечной величиной, а это значит, что перепад размерного давления при диффузорном течении в соосном коническом

канале с увеличивающейся вдоль течения шириной при стремлении длины канала (радиальной координаты R) к ∞ будет стремиться к постоянной величине в отличии от ранее рассмотренного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины, в котором $\Pi(\infty) = \infty$ (см. гл. 4), а это значит, что и перепад размерного давления также стремится к бесконечному значению. Различие пределов перепада давления в бесконечно длинных каналах с постоянной и увеличивающейся шириной связано с различием в распределении скорости в каналах, обусловленном их геометрией. Если в канале постоянной ширины $\overline{v} \sim \frac{1}{\xi}$ (4.18), а $\frac{d\Pi}{d\xi} \sim -\overline{v}$ (4.24), то исходя из второй теоремы сравнения для несобственных интегралов с бесконечными интервалами интегрирования, интеграл $\int\limits_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\Pi}{d\xi} d\xi$ будет расходящимся [129], что вытекает непосредственно из (4.43). В канале с увеличивающейся шириной вдоль течения модуль безразмерного градиента давления пропорционален величине $\frac{\overline{v}}{\xi^2}$ (6.34), а $\overline{v} \sim \frac{1}{\xi^2}$ (6.27), т.е. $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right| \sim \frac{1}{\xi^4}$, и по второй теореме сравнения интеграл будет сходиться для любых возможных значений α_2, т.е. для $0 < \alpha_2 < \alpha$, и значение этого интеграла мы уже вычислили (6.54).

Заметим, что значение безразмерного давления $\Pi(\infty)$ (6.54) на бесконечно большом удалении от входа является функцией трех аргументов: угла раскрытия конической щели, который определяется параметром b, полууглом раскрытия внешней конической поверхности – α и безразмерной координатой входа в канал – ξ_0.

Наиболее существенным образом $\Pi(\infty)$ зависит от параметра b (рис. 6.5), что вполне понятно, т.к. с увеличением b средняя по поперечному сечению безразмерная скорость $\overline{v}$ будет более интенсивно уменьшаться вдоль течения, а ширина канала $\tilde{h}$ – увеличиваться. Количественно данное утверждение будет проиллюстрировано ниже. Поэтому в соответствии с (6.54) изменение безразмерного

давления на бесконечности с увеличением b будет уменьшаться (рис. 6.5). Зависимость от полуугла раскрытия внешней конической поверхности α практически отсутствует, а вот зависимость от ξ_0 достаточно сильная. Увеличение ξ_0 на 10 единиц с 10 до 20 приводит к изменению $\Pi(\infty)$ на 50 %, с другой стороны, участок канала с безразмерной длиной в 10 единиц – величина слишком незначительная по сравнению с бесконечно большой длиной. А это означает, что основное изменение безразмерного давления происходит вблизи входа в канал, где средняя безразмерная скорость еще имеет наибольшую величину.

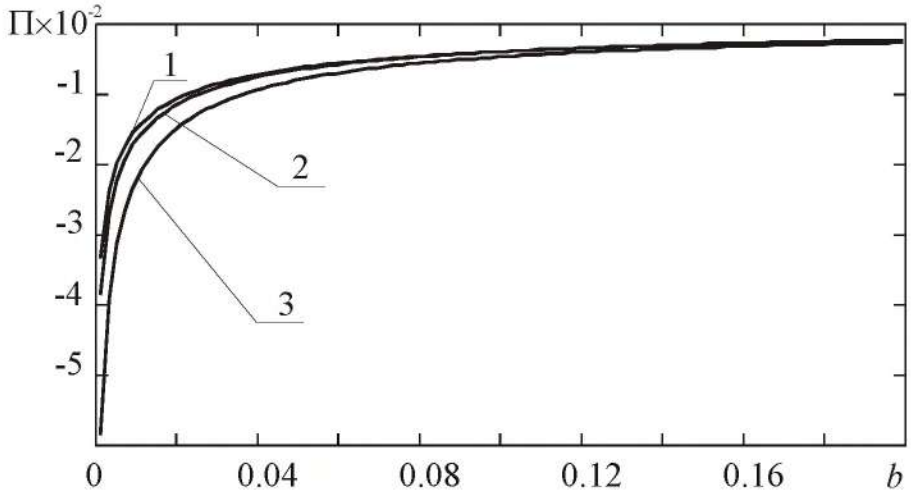


Рис. 6.5. Зависимость безразмерного давления на бесконечности при ползущем течении в соосном коническом диффузоре от величины параметра b: 1 – течение в канале с параметрами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$; 2 – $\alpha = 90°$, $\xi_0 = 10$; 3 – $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 20$.

Посмотрим, на каком расстоянии от входа безразмерное давление при ползущем течении в соосном коническом диффузоре достигает значения 99 % от $\Pi(\infty)$, т.е. решим уравнение

$$\frac{\Pi(\xi)}{\Pi(\infty)} - 1 = 0.01, \tag{6.56}$$

откуда мы можем определить ξ_∞ как функцию параметра b (рис. 6.6). Мы видим, что функция $\xi_\infty(b)$ подобна гиперболической

зависимости, т.е. при малых значениях b стремительно падает, а затем после величины $b = 0.02$ изменяется слабо (рис. 6.6).

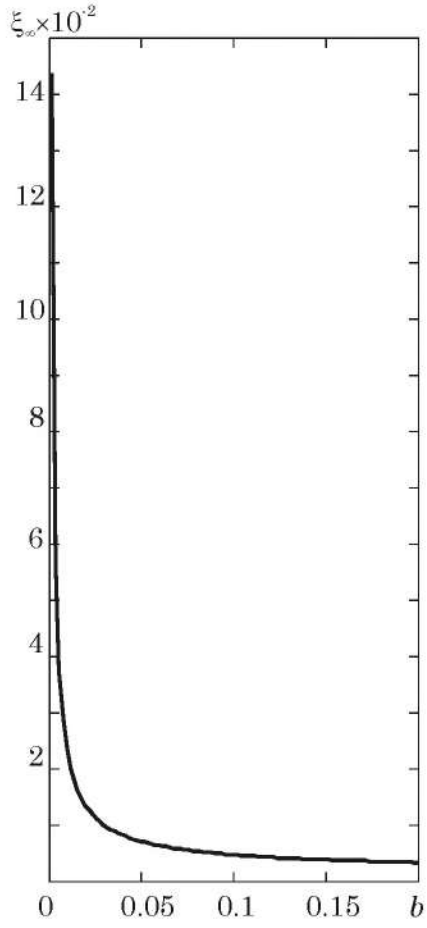


Рис. 6.6. Зависимость безразмерной радиальной координаты ξ_∞, на которой перепад давления достигает 99 % своей максимальной величины от параметра b при ползущем течении в соосном коническом диффузоре с параметрами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$

Проанализировав влияние значения безразмерной координаты входа ξ_0 на величину $\Pi(\infty)$, рассмотрим более общую зависимость $\xi_\infty(b, \xi_0)$, которую также получим из уравнения (6.56). Мы видим, что при больших значениях b увеличение ξ_0 от 10 до 35 приводит к росту значения ξ_∞ в два раза (рис. 6.7), что вполне понятно, поскольку, увеличивая ξ_0, мы тем самым уменьшаем участок, на котором наблюдаются наибольшие значения $\bar{v}$, а это означает, что для достижения предельного значения $\Pi(\infty)$ при меньших значениях $\bar{v}$ потребуется большее расстояние. Понятно, что зависимость $\xi_\infty(\xi_0)$ не такая прямая, поскольку $\Pi(\infty)$ также зависит от ξ_0, но тенденция проявляется (рис. 6.7).

При малых значениях b величина ξ_∞ увеличивается на большую абсолютную величину при одинаковом изменении в ξ_0, чем при больших значениях b, но относительное изменение ξ_∞ здесь меньше.

Определим предельное значение безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с уменьшающейся шириной канала вдоль течения. Поскольку в этом случае канал имеет ограниченную длину, мы не можем устремить координату $\xi \to \infty$, т.к. при стремлении длины канала к максимально возможному значению его ширина

будет стремиться к 0 (рис. 6.1). Эта особенность геометрии канала дает нам возможность определить значение предела $\lim_{\tilde{h}(\xi_1)\to 0} \Pi(\xi_1)$ для любого возможного значения безразмерной координаты выхода из канала – ξ_1.

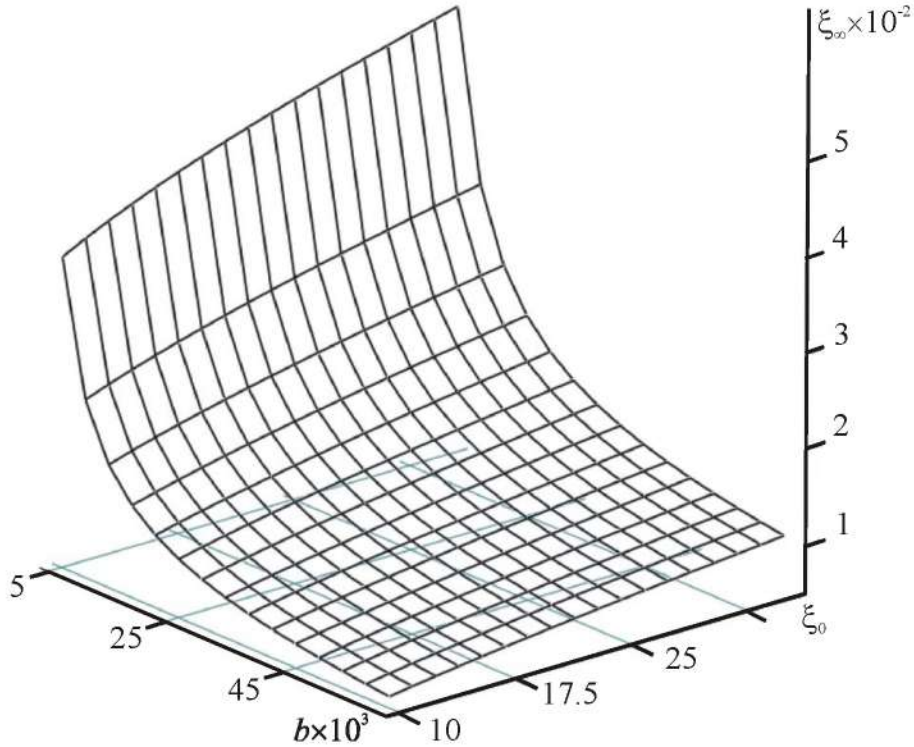


Рис. 6.7. Зависимость безразмерной радиальной координаты ξ_∞, на которой безразмерное давление достигает 99 % своего значения на бесконечности от параметра b и безразмерной координаты входа в канал ξ_0 при ползущем диффузором течении в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной и $\alpha = 15°$.

Действительно, вычисляя значение b как (рис. 6.1)

$$b = \frac{\tilde{h}(\xi_1) - 1}{\xi_1 - \xi_0}, \tag{6.57}$$

подставим его в (6.40) и, вычисляя предел при $\tilde{h}(\xi_1) \to 0$, получим

$$\lim_{\tilde{h}(\xi_1)\to 0} \Pi(\xi_1) = \infty. \tag{6.58}$$

Этот результат почти очевиден, поскольку при $\tilde{h}(\xi_1) \to 0$, вследствие выполнения постоянства расхода, скорость течения жидкости стремится к бесконечности, что и влечет за собой бесконечно большой перепад давления в канале.

Теперь перейдем к рассмотрению свойств ползущих, диффузорных течений в соосных конических каналах, геометрию которых можно отнести к геометрии каналов, которые находятся между каналами, ранее уже нами рассмотренными, и сравним решение, полученное в настоящем разделе с решениями, полученными ранее.

Сначала сравним результаты расчета распределения безразмерного давления в канале по формуле (6.40) с результатами расчета, выполненного с помощью выражения, полученного нами в главе 4 для ступенчатой аппроксимации течения в соосных конических каналах переменной ширины соосными коническими каналами постоянной ширины (см. также работы автора [22, 23, 69])

$$\Pi = -6\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\chi_{0i}^3}\ln\frac{\chi_{0i} - 2\xi_{i+1}\operatorname{tg}\alpha}{\chi_{0i} - 2\xi_i\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (6.59)$$

где $\chi_{0i} = \chi_{0i-1} + b\left(\xi_i - \xi_{i-1}\right)$, а $\xi_i = \xi_0 + \frac{\xi_M}{M}$, M – здесь число ступеней (см. рис. 4.7). Данное выражение, в значительной мере, может служить критерием адекватности решения, полученного нами в настоящем разделе монографии для ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины, поскольку результаты, полученные с помощью (6.59) для диффузорного течения между соосными конусами с общей вершиной, отличаются от точного решения не более, чем на 0.5 % уже при $M \geq 60$ (см. гл. 4 и [23]).

Рассмотрим течение в соосном коническом диффузоре с координатой входа $\xi_0 = 10$ и полууглом раскрытия внешней конической поверхности, равном $\alpha = 15°$, для четырех разных значений параметра b : $b_1 = 0.02$, $b_2 = -0.02$, $b_3 = 0.005$, $b_4 = -0.005$.

Еще раз заметим, что максимально возможная безразмерная длина соосного конического диффузора с уменьшающейся шириной, при заданном значении параметра b, определяется величиной

$$\Delta\xi = \xi_1 - \xi_0 = -\frac{1}{b}, \tag{6.60}$$

и тогда для b_2 значение $\Delta\xi = 50$, а для b_4 $\Delta\xi = 200$.

Из выражения (6.60) мы легко можем определить максимально возможное значение безразмерной координаты для диффузорного соосного конического канала при заданном значении параметра b

$$\xi_{max} = \xi_0 - \frac{1}{b}. \tag{6.61}$$

Сравнение результатов, полученных по (6.40) и по (6.59), показывает, что во всей области изменения параметров задачи относительное отклонение безразмерного давления (6.40) от безразмерного давления, полученного с помощью ступенчатой аппроксимации, не превышает 3 % (рис. 6.8, рис. 6.9).

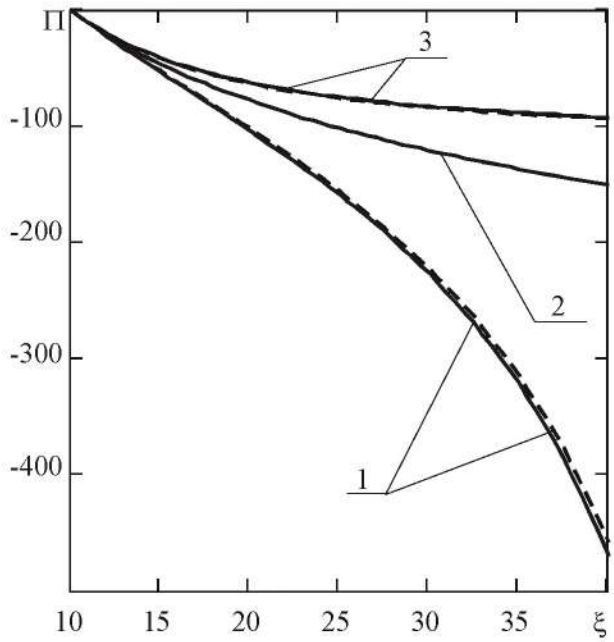


Рис. 6.8. Распределение безразмерного давления П вдоль соосного конического диффузора с геометрическими параметрами: $\alpha = 15°$; $\xi_0 = 10$. 1 – течение в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, $b = -0.02$; 2 – течение в канале постоянной ширины $b = 0$; 3 – течение в канале с увеличивающейся шириной, $b = 0.02$. Сплошные линии представляют зависимость (6.40); штрихованные – расчет с помощью ступенчатой аппроксимации (6.59).

Характер изменения безразмерного давления вдоль течения полностью определяется геометрией канала. Площадь поперечного сечения канала с увеличивающейся вдоль ξ шириной возрастает интенсивнее, чем растет площадь поперечного сечения в канале по-

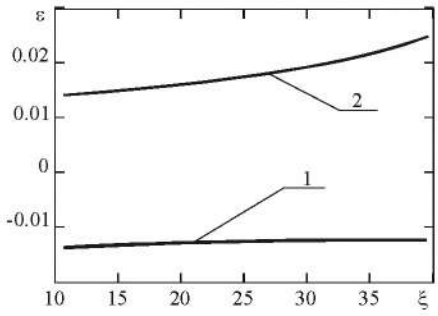


Рис. 6.9. Распределение вдоль канала относительного отклонения безразмерного давления (перепада давления), рассчитанного по зависимости (6.40) от безразмерного давления (перепада давления), полученного с помощью ступенчатой аппроксимации (6.59). 1 – для течения в канале с увеличивающейся шириной, b = 0.02; 2 – течение в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, b = -0.02.

стоянной ширины (рис. 6.10), что приводит к более значительному уменьшению средней скорости течения жидкости вдоль канала (рис. 6.11). А поскольку градиент давления в канале с увеличивающейся шириной также, как и в канале с постоянной шириной прямо пропорционален $\overline{v}$, но еще и обратно пропорционален ширине канала, это приводит к более значительному уменьшению градиента давления вдоль течения в канале с увеличивающейся шириной по сравнению с каналом постоянной ширины (рис. 6.12). Поэтому абсолютная величина безразмерного давления в канале с $b > 0$ значительно меньше, чем в канале с $b = 0$ (рис. 6.8), и стремится безразмерное давление в рассматриваемом канале при увеличении ξ_1 к своему предельному значению (6.53) $\Pi(\infty)$ = -287.5 (рис. 6.8), в то время как безразмерное давление в канале постоянной ширины стремится к минус бесконечности (рис. 6.8).

Увеличение абсолютной величины параметра b в сторону отрицательных значений ведет к существенному изменению характера течения, которое связано с изменением распределения площади поперечного сечения канала вдоль течения. При отрицательных значениях b ширина канала вдоль течения уменьшается (рис. 6.10), вследствие этого площадь поперечного сечения канала увеличивается вдоль течения на меньшую величину по сравнению с увеличением последней в канале постоянной ширины (рис. 6.10). Это приводит к более плавному уменьшению средней скорости течения жидкости в случае с $b < 0$ по сравнению с ранее рассмотренными здесь случаями (рис. 6.11), а большая величина средней скорости жидкости $\overline{v}$ ведет к большей абсолютной величине безразмерного градиента давления (рис. 6.12). Поэтому изменение безразмерного давления, а значит и размерный перепад давления в этом случае значительно больше (рис. 6.8).

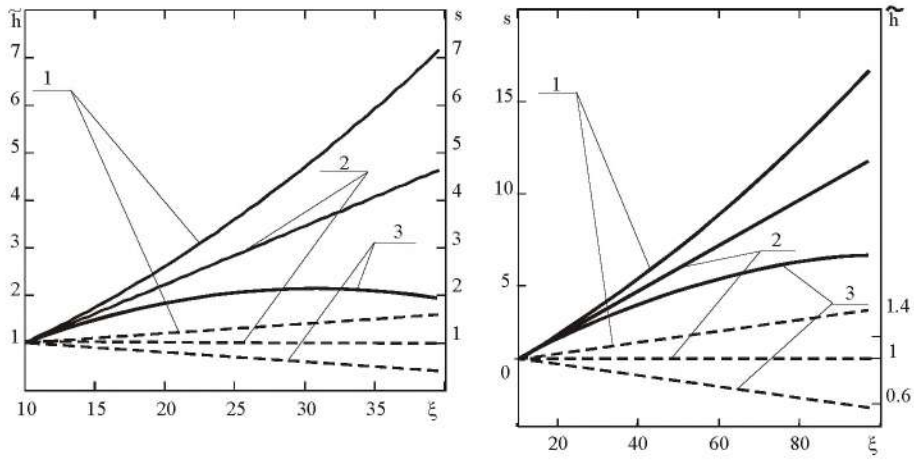


Рис. 6.10. Распределение вдоль канала безразмерных значений ширины канала $\tilde{h}$ – штриховые линии и безразмерного значения площади поверхности поперечного сечения – сплошные линии: а) 1 – в канале с увеличивающейся шириной , b = 0.02; 2 – течение в канале постоянной ширины b = 0; 3 – для течения в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, b = -0.02: б) 1 – в канале с b = 0.005; 2 – при b = 0; 3 – при b = -0.005. Полуугол раскрытия внешней конической поверхности во всех случаях равен $\alpha = 15°$.

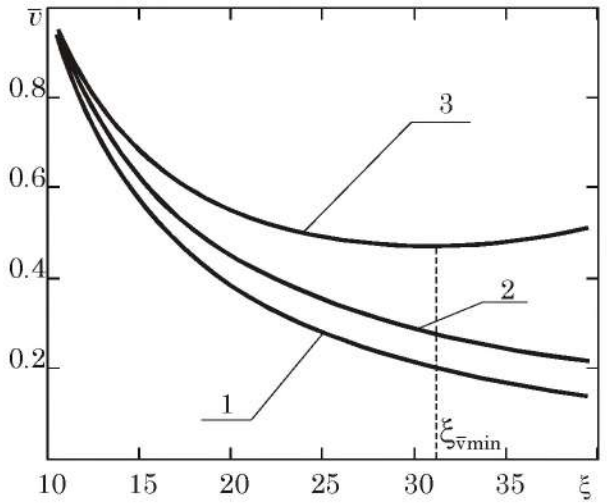


Рис. 6.11. Распределение безразмерной средней по поверхности поперечного сечения скорости в соосном коническом диффузоре с размерами: ξ_0 = 10; $\alpha = 15°$. 1 – при течении в канале с увеличивающейся шириной, b = 0.02; 2 – при течении с b = 0; 3 – при b = -0.02. $\xi_{\bar{v}\,min}$ – безразмерная координата локализации минимального значения $\bar{v}$ при течении в канале с уменьшающейся шириной.

При достижение некоторого значения параметра b при его уменьшении распределение площади поверхности поперечного сечения вдоль соосного конического диффузора становится немонотонным (рис. 6.10), т.е. на некотором безразмерном расстоянии ξ от входа в канал площадь поверхности поперечного сечения канала достигает своего максимального значения и дальше, за счет уменьшения ширины канала, начинает уменьшаться.

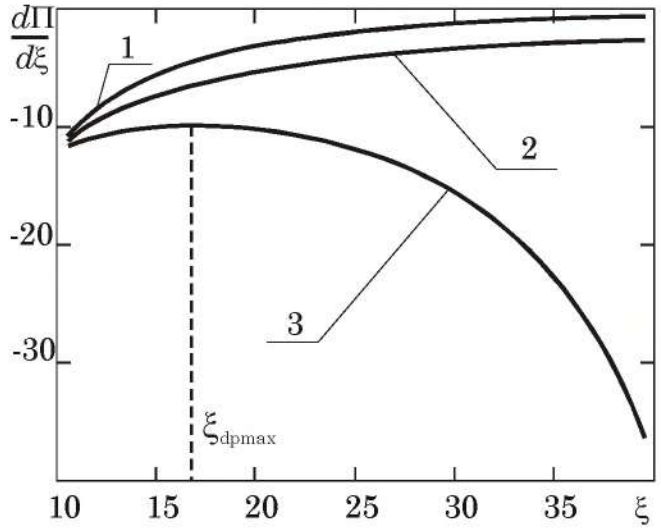


Рис. 6.12. Распределение безразмерного градиента давления вдоль соосного конического диффузора при ламинарном течении в канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\alpha = 15°$. 1 – при течении в канале с увеличивающейся шириной, $b = 0.02$; 2 – течение в канале постоянной ширины $b = 0$; 3 – течение в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, $b = -0.02$. ξ_{dpmax} – безразмерная координата локализации максимального значения градиента давления.

Введем, по аналогии с [130], эквивалентный гидравлический диаметр соосного конического канала как:

$$d_Э = \frac{4S(R)}{\mathrm{Per}(R)}, \tag{6.62}$$

где $S(R)$ – функция, определяющая распределение площади поперечного сечения канала вдоль течения, $\mathrm{Per}(R)$ – распределение величины смачиваемого периметра вдоль канала.

Для соосного конического диффузора с постоянной шириной вдоль течения площадь поперечного сечения определится выражением (4.1), а величина смачиваемого периметра, как следует из рис. 6.13, определится соотношением

$$\mathrm{Per}(R) = 2\pi R\sin\alpha + 2\pi(R\sin\alpha - h\cos\alpha) = 2\pi\sin\alpha(2R - h\,\mathrm{ctg}\alpha), \quad (6.63)$$

или в безразмерном виде

$$\mathrm{per}(\xi) = 2\pi\sin\alpha(2\xi - \mathrm{ctg}\alpha), \quad (6.64)$$

и тогда эквивалентный диаметр соосного конического диффузора определится как

$$d_{\text{Э}} = \frac{4\pi h\sin\alpha\left(2R - h\,\mathrm{ctg}\alpha\right)}{2\pi\sin\alpha\left(2R - h\,\mathrm{ctg}\alpha\right)} = 2h, \quad (6.65)$$

и является величиной постоянной.

Очевидно, что в выбранных безразмерных координатах эквивалентный диаметр для канала постоянной ширины будет равен - $\tilde{d}_{\text{Э}} = 2$.

Распределение площади поперечного сечения в соосном коническом диффузоре переменной вдоль течения ширины определяется выражением (6.14), а смачиваемый периметр, как следует из рис. 6.13, определится соотношением

$$\mathrm{Per}(R) = 2\pi\sin\alpha\,\{2R - [h_0 + b(R - R_0)]\mathrm{ctg}\alpha\}, \quad (6.66)$$

и в безразмерно виде

$$\mathrm{per}(\xi) = 2\pi\sin\alpha\,\{2\xi - [1 + b(\xi - \xi_0)]\mathrm{ctg}\alpha\}, \quad (6.67)$$

и, следовательно, для канала с переменной вдоль течения шириной эквивалентный диаметр определится соотношением

$$d_{\text{Э}} = 2h_0[1 + b(\xi - \xi_0)] = 2h(\xi), \quad (6.68)$$

т.е. распределение эквивалентного диаметра будет прямо пропорционально изменению ширины канала вдоль координаты ξ. В безразмерном виде (6.68) запишется как

$$\tilde{d}_{\text{Э}}(\xi) = 2\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right] = 2\tilde{h}(\xi). \quad (6.69)$$

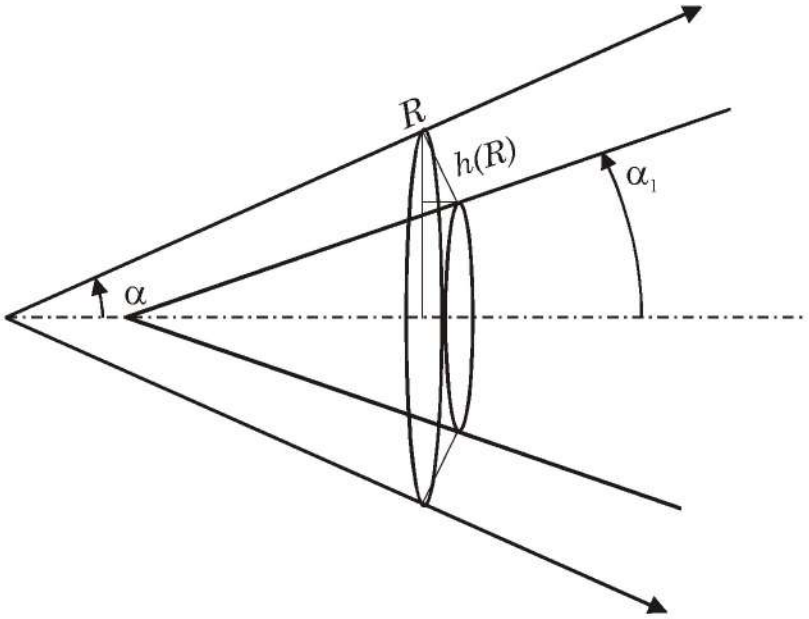


Рис. 6.13. К определению смачиваемого периметра соосного конического канала. α – полуугол раскрытия внешней конической поверхности; α_1 – внутренней; R – радиальная координата; $h(R)$ – ширина канала.

Теперь мы можем записать распределение площади поверхности поперечного сечения в рассматриваемых диффузорах как

$$S(R)=\frac{1}{4}d_{\Э}(R)\mathrm{Per}(R), \tag{6.70}$$

или в безразмерном виде в соответствие с (6.26)

$$\tilde{s}(\xi)=\frac{1}{4}\tilde{d}_{\Э}(\xi)\mathrm{per}(\xi). \tag{6.71}$$

Выражение (6.71) показывает, что в каналах постоянной ширины, для которых $\tilde{d}_{\Э}=2$, значение $\tilde{s}(\xi)$ линейно увеличивается с ростом ξ (6.64). В соосном коническом диффузоре при $b > 0$ площадь поперечного сечения увеличивается как за счет увеличения смачиваемого периметра, так и за счет увеличения эквивалентного диаметра.

В канале с $b < 0$ вблизи входа, где абсолютная величина уменьшения эквивалентного диаметра незначительна, преобладает

увеличение площади поперечного сечения канала за счет увеличения смачиваемого периметра (6.67), вследствие чего, несмотря на уменьшение ширины канала с ростом ξ, поверхность поперечного сечения здесь может увеличиваться (рис. 6.10). Затем на некотором расстоянии от входа в канал $\tilde{s}(\xi)$ достигает своего максимума, а дальше вниз по течению ее величина снижается за счет того, что здесь преобладает в изменении площади поверхности поперечного сечения канала уменьшение его эквивалентного диаметра вдоль ξ. Итак, конкурирующее изменение значений $\tilde{d}_э$ и per с увеличением ξ приводит к немонотонной зависимости $\tilde{s}(\xi)$, которая в свою очередь приводит к немонотонной зависимости безразмерной средней по поперечному сечению канала скорости жидкости от ξ (6.27). Действительно, в том месте канала, где локализуется максимальная площадь поперечного сечения, очевидно будет наблюдаться минимальная средняя скорость течения жидкости (рис. 6.11).

Значение безразмерной координаты $\xi_{\bar{v}\min}$, при котором локализуется минимальное значение средней скорости жидкости в соосном коническом диффузоре, можно определить из условия $\frac{d\bar{v}}{d\xi} = 0$

$$\xi_{\bar{v}\min} = \frac{(1 - b\xi_0)(b\operatorname{ctg}\alpha - 1)}{b(2 - b\operatorname{ctg}\alpha)}. \qquad (6.72)$$

В рассматриваемом случае при b_2 = -0.02, ξ_0 = 10 и α = 15° значение $\xi_{\bar{v}\min}$ будет равно $\xi_{\bar{v}\min} = 31.08$ (рис. 6.11). Более подробно влияние геометрии соосного конического диффузора на распределение безразмерной средней по поперечному сечению канала скорости жидкости мы исследуем в главе 10, где дополнительно будут также рассмотрены инерционные эффекты течения и свойства распределения скорости сдвига на границе канала в зависимости от параметров задачи.

Немонотонная зависимость $\bar{v}(\xi)$ приводит к немонотонной зависимости градиента давления от ξ при $b < 0$ (рис. 6.12). В начале течения, где уменьшение средней безразмерной скорости наиболее

интенсивно, а относительная безразмерная ширина канала (6.26) еще близка к 1, модуль безразмерного градиента уменьшается, достигает своего минимального значения и далее вниз по течению модуль безразмерного градиента давления начинает расти. Локализацию экстремального значения градиента давления можно определить из условия

$$\frac{d^2\Pi}{d\chi^2} = 0, \tag{6.73}$$

что приводит к выражению

$$\overline{v}'(\xi)\tilde{h}(\xi) - 2\overline{v}(\xi)\tilde{h}'(\xi) = 0, \tag{6.74}$$

откуда видно, что координаты экстремальных значений средней безразмерной скорости (6.72) и безразмерного градиента давления будут различны. Координата расположения $\Pi'_{\max}$ определится выражением

$$\xi_{d\Pi\max} = \frac{(2b\operatorname{ctg}\alpha - 1)(b\xi_0 - 1)}{2b(b\operatorname{ctg}\alpha - 2)}, \tag{6.75}$$

и в рассматриваемом случае будет составлять величину $\xi_{d\Pi\max}$ = 16.6.

Заметим, что в случае расходящегося течения между плоскостью и конической поверхностью, расположенной над ней (рис. 6.3б), выражение (6.72) примет вид

$$\xi_{\overline{v}\min} = \frac{b\xi_0 - 1}{2b} = \frac{\xi_0}{2} - \frac{1}{2b}, \tag{6.76}$$

а выражение (6.75) в этом случае запишется как

$$\xi_{d\Pi\max} = \frac{1}{2}\xi_{\overline{v}\min}. \tag{6.77}$$

Используя определение (6.61) и соотношения (6.76) и (6.77), мы можем записать очень простые соотношения для вычисления значений $\xi_{\overline{v}\min}$ и $\xi_{d\Pi\max}$ в случае ламинарного диффузорного течения жидкости между плоскостью и конусом, расположенным над ней с осью, перпендикулярной плоскости (рис. 6.3б), а именно:

$$\xi_{\bar{v}\min} = \frac{\xi_{\max}}{2}; \tag{6.78}$$

$$\xi_{d\Pi\max} = \frac{\xi_{\max}}{4}. \tag{6.79}$$

И поскольку величина $\xi_{\max}$ не зависит от значения полуугла раскрытия внешней конической поверхности α, то с помощью (6.78) и (6.79) мы можем достаточно просто оценить значения координат, на которых локализуются экстремальные значения безразмерной средней по поперечному сечению канала скорости и безразмерного градиента давления.

Более детальное изучение влияния геометрических параметров канала на распределение безразмерной средней по площади поперечного сечения канала скорости будет проведено в разделе 10.4 при анализе влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерных величин давления и его градиента вдоль течения.

Совершенно очевидно, что условие (6.73) определяет локализацию точки перегиба функции $\Pi(\xi)$.

На отрезке соосного конического диффузора с уменьшающейся шириной от входа в канал и до $\xi_{d\Pi\max}$ модуль градиента давления уменьшается так же, как и в каналах с $b \geq 0$ (рис. 6.12). Здесь зависимость $\Pi(\xi)$ для канала с $b < 0$ аналогична зависимости $\Pi(\xi)$ в канале с $b \geq 0$ (рис. 6.8). Функция $\Pi(\xi)$ в пределах указанного интервала выпукла вниз. Затем, далее по течению, вследствие стабилизации средней скорости (рис. 6.11) и уменьшения ширины канала, модуль градиента давления, достигнув своего минимального значения, начинает увеличиваться, и вследствие этого зависимость $\Pi(\xi)$ становится более крутой, а ее выпуклость за точкой перегиба $\xi_{d\Pi\max}$ направлена вверх (рис. 6.8).

Распределение безразмерной скорости для рассмотренных геометрических параметров соосных конических диффузоров показано на рис. 6.14. Заметим, что между областями определения скорости на рис. 6.14 и продольным разрезом канала переменной ши-

рины, приведенным на рисунке 6.1, при $b \neq 0$ существует изоморфное соответствие, определяемое преобразованием

$$\xi' = \xi;\ \chi' = \frac{\chi}{1 + b(\xi - \xi_0)}. \tag{6.80}$$

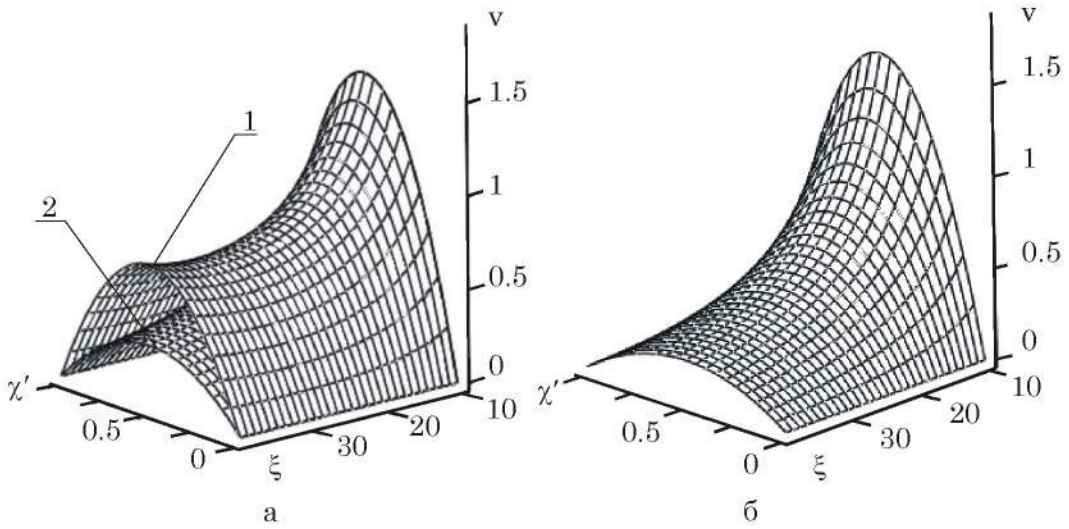


Рис. 6.14. Распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре с геометрическими параметрами: $\xi_0 = 10$, $\alpha = 15°$. а) 1 – течение в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, $b = -0.02$; 2 – для течения в канале с постоянной шириной $b = 0$; б) – для течения в канале с увеличивающейся шириной, $b = 0.02$.

В соосных конических каналах с параметром $b \geq 0$ распределение безразмерной скорости v, оставаясь параболическим поперек канала, уменьшается по величине вдоль течения. Для течения с $b < 0$ вследствие немонотонности зависимости площади поверхности поперечного сечения от продольной координаты ξ распределение скорости имеет седлообразный вид (рис. 6.14).

Увеличение полуугла раскрытия внешней границы канала вплоть до значения $\alpha = 90°$ не приносит качественных изменений в решение, полученное для прежних значений остальных параметров.

Вследствие параболического профиля скорости (рис. 6.14) максимальная ее величина в поперечном сечении будет наблюдать-

ся на серединной конической поверхности канала, определяющейся соотношением

$$\chi = \frac{1}{2}\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]. \tag{6.81}$$

Подставляя (6.81) в (6.35), получаем выражение, определяющее распределение максимальной в поперечном сечении канала безразмерной скорости вдоль течения

$$\upsilon_{\max} = \frac{3}{2}\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\left\{2\xi - \left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\operatorname{ctg}\alpha\right\}}, \tag{6.82}$$

или с учетом (6.27) мы можем записать $\upsilon_{\max} = \frac{3}{2}\overline{\upsilon}$, что формально совпадает с выражением (4.35), полученном для течения в соосных конических каналах постоянной ширины. Поэтому распределение максимального значения безразмерной скорости в соосном коническом канале переменной ширины будет полностью повторять распределение средней безразмерной скорости с коэффициентом пропорциональности 3/2 (рис. 6.15)

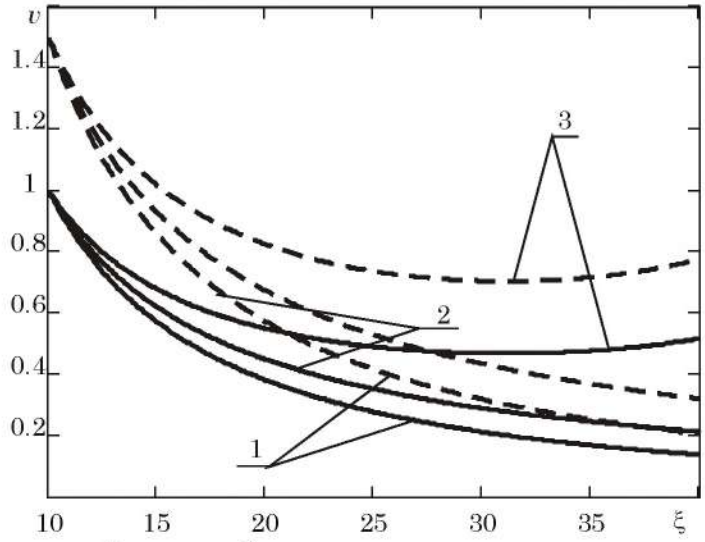


Рис. 6.15. Распределение вдоль течения безразмерных величин средней по площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала – сплошные линии и наибольшей в поперечном сечении скорости – штриховая линия. 1 – при течении в канале с увеличивающейся шириной, b = 0.02; 2 – при течении с b = 0; 3 – при b = -0.02.

Если выбрать меньшее по модулю значение параметра b, например, для положительных величин b, значение b = 0.005, то в начале течения, при тех же значениях ξ, что и в ранее рассмотрен-

ных случаях, отклонение площади поперечного сечения канала от площади соосного конического диффузора постоянной ширины несколько меньше, чем в предыдущем случае течения в диффузоре с положительным значением b (рис. 6.14), поэтому и отклонение безразмерной средней скорости в этом случае от безразмерной средней скорости при течении в канале постоянной ширины незначительно (рис. 6.16). Отличие в распределении градиента давления в рассматриваемом случае уже достаточно существенно, поскольку $\frac{d\Pi}{dS}$

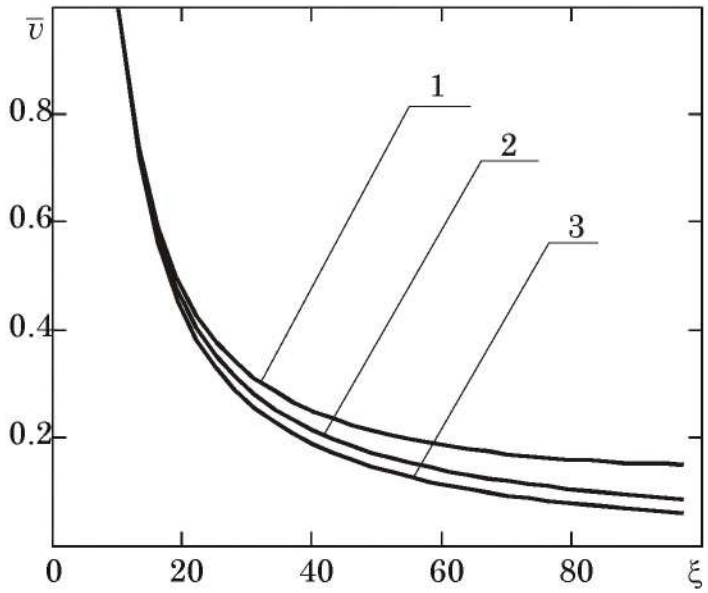


Рис. 6.16. Распределение безразмерной, средней по площади поверхности поперечного сечения скорости при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с геометрическими параметрами: $\xi_0 = 10$, $\alpha = 15°$:1 – при течении в канале с увеличивающейся шириной, $b = 0.005$; 2 – для течения в канале с постоянной шириной $b = 0$; 3 – течение в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, $b = -0.005$.

зависит как от $\overline{v}$, так и от $\tilde{h}$, и это отличие также меньше, чем в предыдущем случае (рис. 6.17). Поэтому безразмерное давление в диффузоре с $b = 0.005$ на той же безразмерной длине, что и в диффузоре с $b = 0.02$ будет отличаться от безразмерного давления в диффузоре постоянной ширины на меньшее значение (рис. 6.8), (рис. 6.18).

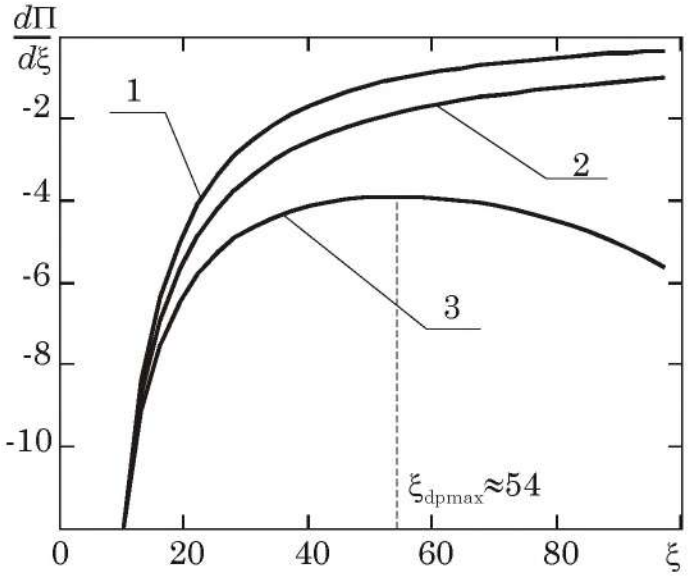


Рис. 6.17. Распределение безразмерного градиента давления вдоль соосного конического диффузора при ламинарном течении в канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\alpha = 15°$. 1 – при течении в канале с увеличивающейся шириной, $b = 0.005$; 2 – течение в канале постоянной ширины $b = 0$; 3 – течение в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль канала, $b = -0.005$. ξ_{dpmax} – безразмерная координата локализации максимального значения градиента давления.

Рассмотрим течение с малым по абсолютной величине отрицательным значением $b = -0.005$. Раньше мы уже отмечали, что в этом случае максимальная длина канала увеличивается в 4 раза по сравнению с каналом при $b = -0.02$, и в соответствии с (6.76) и (6.77) безразмерные координаты локализации экстремальных значений средней безразмерной скорости и безразмерного градиента давления значительно увеличивается. Поэтому в пределах длины ранее рассмотренного канала величины $\tilde{s}$, $\overline{v}$ и Π' в данном случае будут изменяться монотонно (рис. 6.14, рис. 6.17). Но в пределах всего возможного диапазона изменения безразмерной координаты ξ, в данном случае, изменение величин $\tilde{s}$, $\overline{v}$, Π' и Π будет аналогично изменению указанных величин в ранее рассмотренном случае, т.е. при значении $b = -0.02$ (рис. 6.14–рис. 6.18).

Отсюда мы можем сделать вывод, что при течении в соосном коническом канале с уменьшающейся шириной канала вдоль течения всегда будет существовать возможность выбрать длину канала

так, чтобы средняя по поперечному сечению скорость жидкости и градиент давления в ее пределах имеют немонотонный характер.

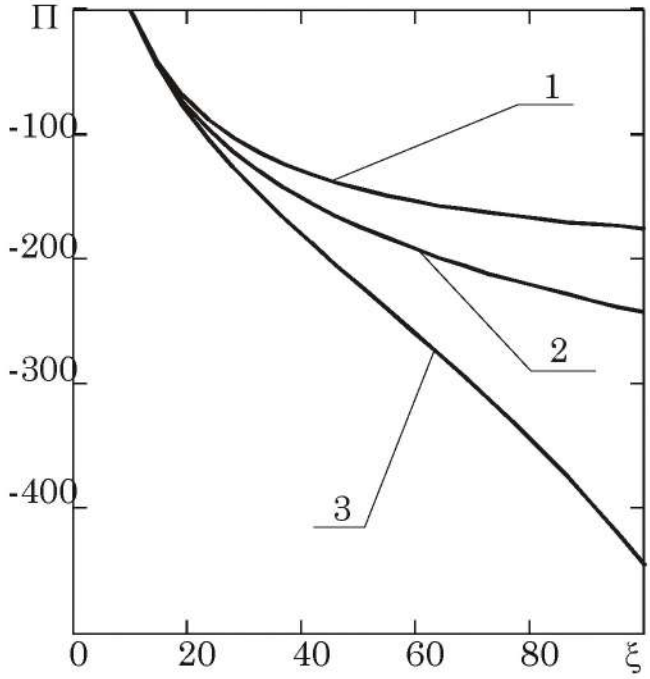


Рис. 6.18. Распределение безразмерного давления П при ламинарном течении вдоль соосного конического диффузора с геометрическими параметрами: $\alpha = 15°$; $\xi_0 = 10$: 1 – при течении в канале с линейно увеличивающейся шириной, $b = 0.005$; 2 – для течения в канале с постоянной шириной $b = 0$; 3 – течение в диффузоре с линейно уменьшающейся шириной вдоль канала, $b = -0.005$.

6.6. Анализ приближенных выражений для расчета распределения безразмерного давления в соосном коническом диффузоре переменной ширины

– Ну да, неизвестно, – послышался все тот же дрянной голос из кабинета, – подумаешь, бином Ньютона!

М.А. Булгаков

Используя математическое описание диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины, полученное в текущей главе монографии, мы можем упростить выражения для вычисления безразмерного давления при малых значениях абсолютной величины параметра b, т.е. таких, при которых удовлетворяют-

ся неравенства $|\xi_0 b|<1$ и $|(\xi_1-\xi_0)|b<1$. При выполнении приведенных неравенств мы можем для упрощения полученных выражений, определяющих решение задачи, воспользоваться разложением Тейлора для биноминальной функции при $b \ll 1$ [131]

$$(1\pm b\xi)^n = 1\pm nb\xi + O\left[(b\xi)^2\right] \approx 1\pm nb\xi . \qquad (6.83)$$

Используя (6.83) и условие $R \geq 2.22 h_0 \mathrm{ctg}\alpha$ [28, 32] (см. также главу 21), мы можем упростить выражение для расчета безразмерного давления (6.40) и, опуская несложные выкладки, запишем

$$\Pi_{a1}(\xi) = 12\xi_0 \left[\frac{1-b\,\mathrm{ctg}\alpha}{1-3b\xi_0}\ln\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right) + \frac{3b(\xi-\xi_0)}{1+b(2\xi-7\xi_0)}\right]. \qquad (6.84)$$

С помощью (6.83) мы можем также преобразовать и выражение для градиента давления (6.33). В результате получим

$$\frac{d\Pi_{a2}}{d\xi} = \frac{12(2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)}{\left[1+3b(\xi-\xi_0)\right]\left\{\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]\mathrm{ctg}\alpha - 2\xi\right\}}. \qquad (6.85)$$

Интегрирование (6.85) с условием (6.24) приведет к выражению

$$\Pi_{a2} = -\frac{6(2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)}{b(3\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)-1}\ln\frac{\left[1+3b(\xi-\xi_0)\right](2\xi_0-\mathrm{ctg}\alpha)}{2\xi-h(\xi)\mathrm{ctg}\alpha}, \qquad (6.86)$$

и, далее применяя условие $\xi \geq 2.22\mathrm{ctg}\alpha$, получим еще более простое выражение

$$\Pi_{a3} = \frac{12\xi_0}{1-3b\xi_0}\ln\frac{\xi_0}{\xi}\left[1+3b(\xi-\xi_0)\right]. \qquad (6.87)$$

Заметим, что для расходящегося от оси ламинарного течения в канале, образованном плоскостью и конической поверхностью, расположенной над ней с осью, перпендикулярной плоскости, и вершиной, на ней не лежащей, т.е. при $\alpha = 90°$, зависимость (6.84) запишется в виде

$$\Pi_{\alpha 1} = \frac{12\xi_0}{1-3b\xi_0}\ln\frac{\xi_0}{\xi} + \frac{36b\xi_0(\xi-\xi_0)}{1+b(2\xi-7\xi_0)}, \qquad (6.88)$$

а зависимость (6.86) в этом случае преобразуется в выражение (6.87).

Сравним распределение безразмерного давления, рассчитанного с помощью выражения (6.40) и с помощью аппроксимирующих соотношений (6.84) и (6.87). Сразу необходимо отметить некоторую ограниченность полученных результатов. Действительно, выражение (6.84) расходится при $b = \frac{1}{3\xi_0}$ и для некоторых значений b, принадлежащих интервалу $\left[\frac{1}{5\xi_0}, -\frac{1}{2\xi_1 - 7\xi_0}\right]$. Аппроксимирующее выражение (6.86) расходится при $b = \frac{1}{3\xi_0 - \mathrm{ctg}\alpha}$ и в том случае, когда b принадлежит интервалу $\left[\frac{1}{3(\xi_1-\xi_0)}, \mathrm{tg}\alpha\right]$, а приближение (6.87) расходится при $b = \frac{1}{3\xi_0}$ и когда b принадлежит уже упомянутому интервалу $\left[\frac{1}{3(\xi_1-\xi_0)}, \mathrm{tg}\alpha\right]$. Мы уже отмечали, что максимально возможным допустимым значением b при исследовании диффузорного течения в соосных конических каналах с линейно изменяющейся вдоль течения шириной и границами, раскрывающимися в одну сторону, равно величине $b_{\max} = \mathrm{tg}\alpha$ (см. стр.185).

Сравним распределение безразмерного давления, рассчитанного для течения жидкости в соосном коническом диффузоре переменной ширины, полученное с помощью выражения (6.40), с распределениями, вычисленными по приближенным зависимостям (6.85)–(6.87).

Для небольших значений полуугла раскрытия α и параметра $b = \pm 0.005$ и при незначительной длине канала все выражения дают довольно хорошее приближение (рис. 6.19). Вводя относитель-

ное отклонение аппроксимационных выражений от зависимости (6.40), как отношение

$$\varepsilon_i = \frac{\Pi_{ai} - \Pi}{\Pi} = \frac{\Pi_{ai}}{\Pi} - 1, \qquad (6.89)$$

видим, что относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного по зависимости (6.86) как для канала с увеличивающейся шириной, так и для канала с уменьшающейся шириной вдоль течения не превосходит 2 % на отрезке от входа в канал и до координаты $\xi = 40$ (рис. 6.20). У двух остальных приближений относительное отклонение на выбранном участке достигает 10 %. При

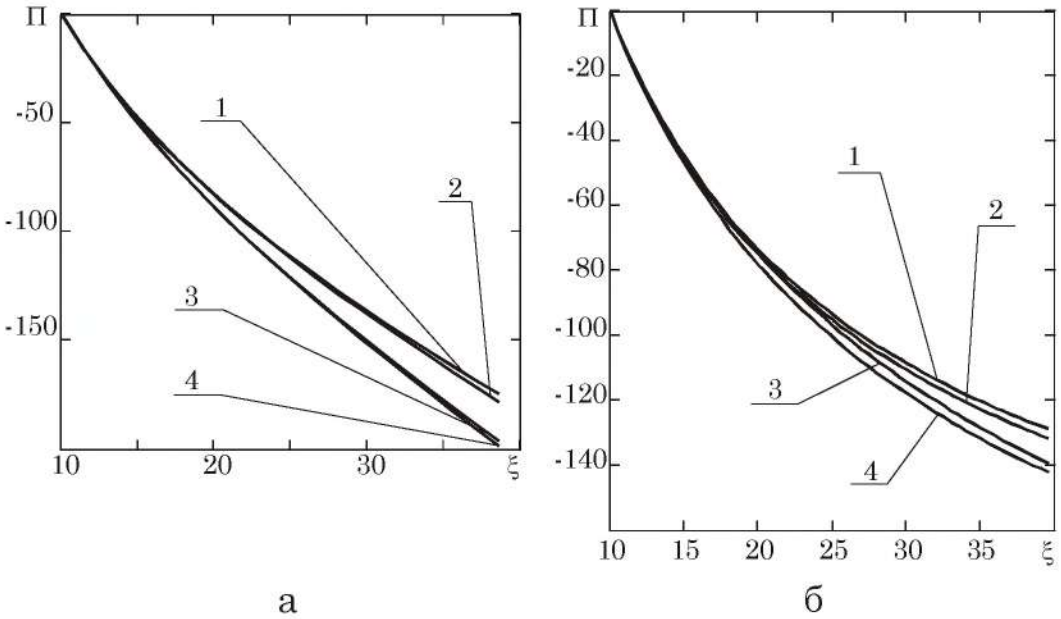


Рис. 6.19. Сравнение распределения значений безразмерного давления, вычисленного для ламинарного течения в соосном коническом канале переменной ширины с полууглом раскрытия внешней конической границы $\alpha = 15°$ и $\xi_0 = 10$: а – в канале с уменьшающейся шириной при $b = -0.005$; б – в канале с увеличивающейся шириной вдоль течения при $b = 0.005$. 1– давление, рассчитанное по зависимости (6.40); 2 – аппроксимация безразмерного давления выражением (6.86); 3 – по (6.84); 4 – по (6.87).

увеличении длины канала относительные отклонения полученных приближений зависимостей (6.86) и (6.87) попадают в область значений ξ, где они расходятся для отрицательных значений b

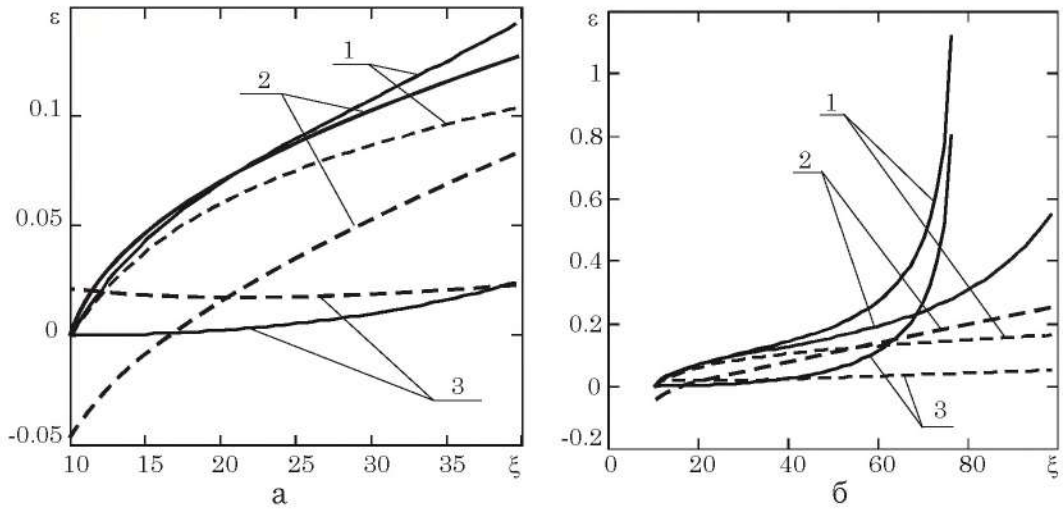


Рис. 6.20. Распределение относительного отклонения приближенных зависимостей для вычисления безразмерного давления при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре от зависимости (6.40): а – на участке канала [ξ_0, 100]; б – на участке канала [ξ_0, 100]. 1 – для зависимости (6.87); 2 – для зависимости (6.84); 3 – для зависимости (6.86). Сплошные линии для канала с уменьшающейся шириной вдоль течения при b = -0.005; штриховые для канала с увеличивающейся шириной вдоль течения при b = 0.005.

(рис. 6.21а), т.е. для достаточно длинных соосных конических диффузоров зависимости (6.86) и (6.87) не дают адекватного приближения выражения (6.40). Здесь, по крайней мере, до безразмерной координаты $\xi \approx 20$ можно с 20 %-ной точностью пользоваться соотношением (6.85) (рис. 6.20б). Для каналов с увеличивающейся шириной лучшим приближением опять будет выражение (6.85) (рис. 6.20б, рис. 21б).

Если увеличить полуугол раскрытия внешней границы диффузора до $\alpha = 90°$, мы увидим, что на участке канала от входа до безразмерной координаты $\xi \approx 50$ все три зависимости (6.84), (6.86) и (6.87) дают хорошее приближение (рис. 6.22, рис. 6.23). При этом выражения (6.86) и (6.89) становятся идентичными, и для достаточно длинных (т.е. таких, длина которых близка к максимально возможной (6.60)) диффузорных каналов с уменьшающейся шириной имеют область, где их значения расходятся (рис. 6.23). И опять для каналов с увеличивающейся шириной эти выражения дают наилучшее приближение (6.40).

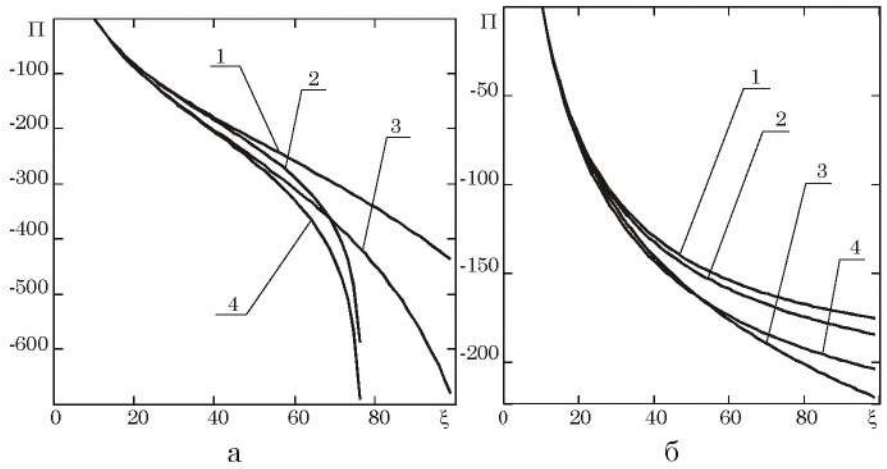


Рис. 6.21. Распределение значений безразмерного давления, вычисленного по зависимости (6.40) и ее приближениям для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с геометрическими параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 15°$: а – для течения в канале с линейно уменьшающейся шириной вдоль канала, b = -0.005; б – для течения в канале с линейно увеличивающейся шириной вдоль течения при b = 0.005. 1 – зависимость (6.40); 2 – зависимость (6.86); 3 – зависимость (6.84); 4 – (6.87).

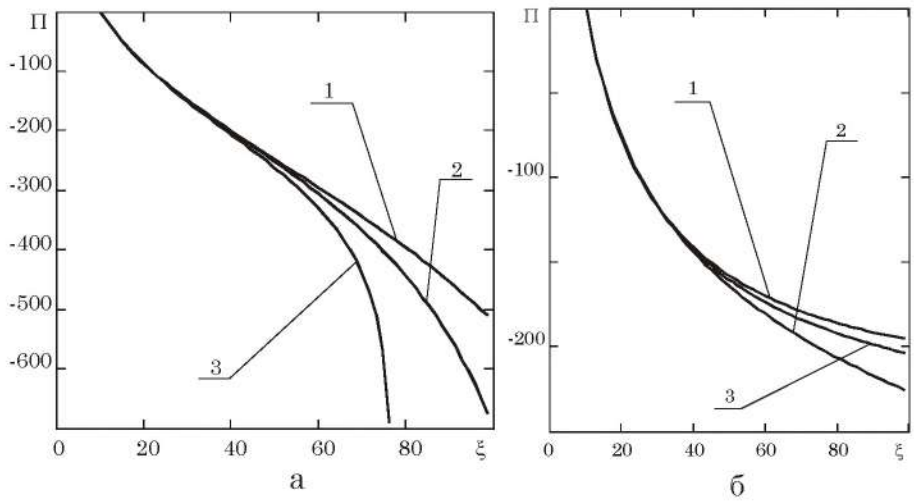


Рис. 6.22. Распределение безразмерного давления при ползущем течении на участке канала, образованного плоскостью и расположеным над ней конусом с вершиной, не лежащей на плоскости и осью, перпендикулярной к последней, при параметрах канала: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 100$, $\alpha = 90°$. а – для течения в канале с линейно уменьшающейся шириной вдоль канала, b = -0.005; б – для течения в канале с линейно увеличивающейся шириной вдоль течения при b = 0.005. 1 – зависимость (6.41); 2 – зависимость (6.88); 3 – зависимость (6.87).

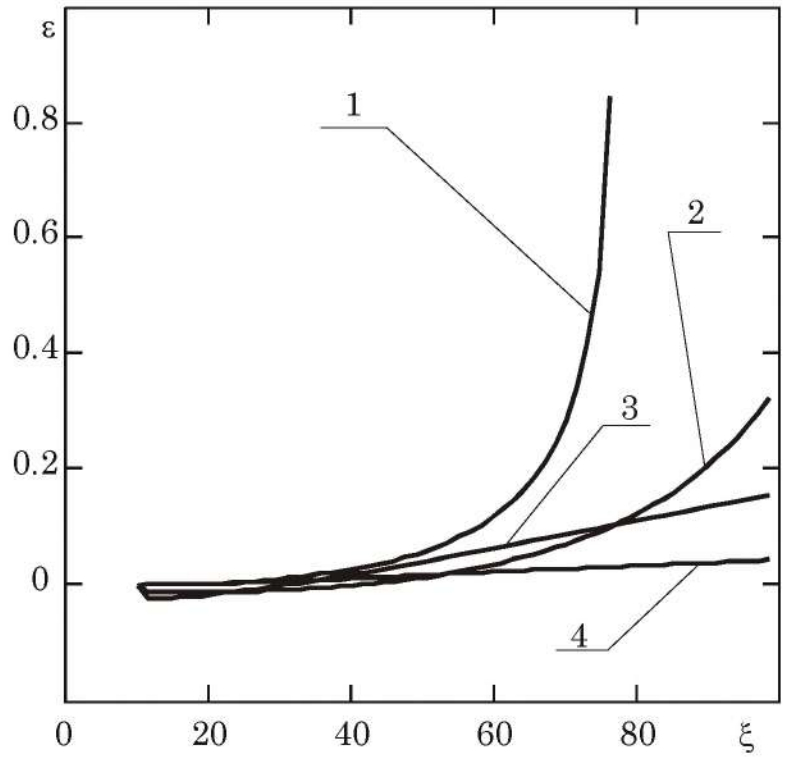


Рис. 6.23. Распределение вдоль ползущего течения в соосном коническом диффузоре с полууглом раскрытия внешней границы $\alpha = 90°$ относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного по аппроксимационному выражению (6.87) от зависимости (6.41) при b = -0.005 – 1; 2 – для зависимости (6.88) от (6.41) в канале с b = -0.005; 3 – для зависимости (6.88) от (6.41) в канале с увеличивающейся шириной вдоль течения при b = 0.005; 4 – для зависимостей (6.87) и (6.41) в канале с b = 0.005.

Рассмотрим относительное отклонение аппроксимационных зависимостей (6.84), (6.86) и (6.87) от (6.40) для значений параметра b, угла α и безразмерных координат входа в канал и выхода из него, при которых не наблюдается расходимостей в полученных результатах. Выберем значения координат равными $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$. Параметр b изменяется в пределах интервала [–0.01, 0.01], а полуугол раскрытия внешней границы $\alpha \in [10°, 90°]$. Относительное отклонение приближения (6.84) от (6.40) показано на рис. 6.24. В выбранных пределах изменения параметров решения относительное отклонение рассматриваемых величин не превосходит 20 %

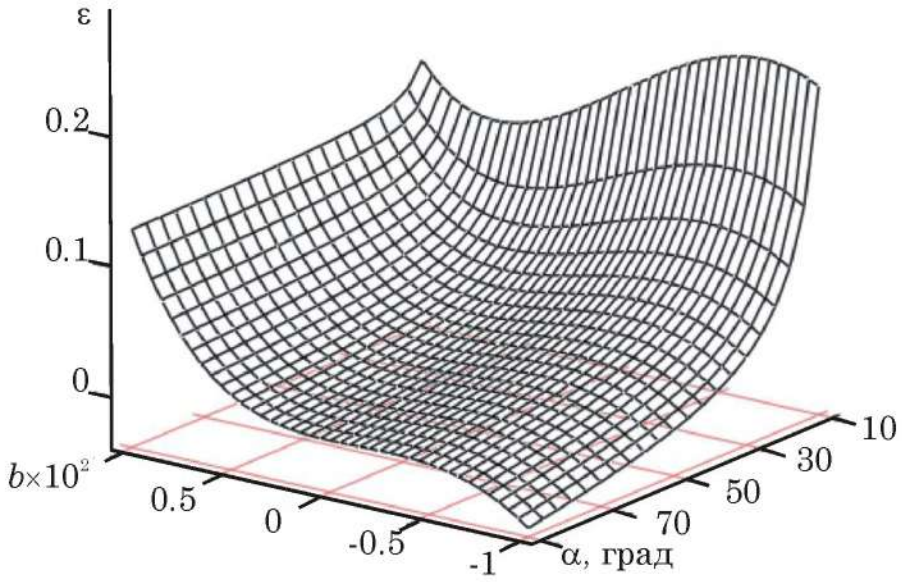


Рис. 6.24. Распределение относительного отклонения безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора с геометрическими параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, вычисленного с помощью приближения (6.84) от зависимости (6.40) в области определения: $b \in [-0.01, 0.01]$, $\alpha \in [10°, 90°]$.

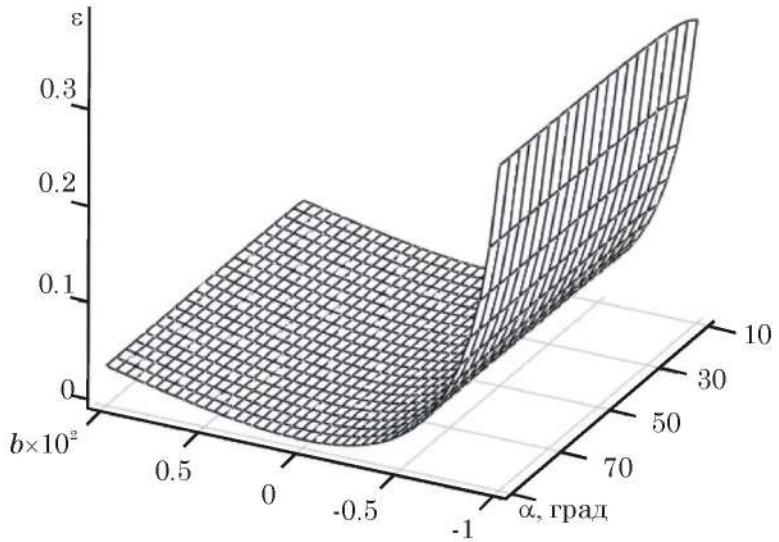


Рис. 6.25. Распределение относительного отклонения безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора с геометрическими параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, вычисленного с помощью приближения (6.86) от зависимости (6.40) в области определения: $b \in [-0.01, 0.01]$, $\alpha \in [10°, 90°]$.

(рис. 6.24). Но существует область, определяемая следующими диапазонами изменения параметров $\alpha \in [10°, 90°]$, $b \in [-0.01, 0.005]$, в которой относительное отклонение не превышает 5 % (рис. 6.24).

Относительное отклонение зависимости (6.86) от зависимости (6.40) практически не зависит от полуугла раскрытия внешней конической поверхности и при выполнении для параметра b условия $b \geq -0.005$, не превосходит 5 % (рис. 6.25). Распределение относительного отклонения зависимости (6.87) от (6.40) практически совпадает с предыдущем случаем при $\alpha \geq 20°$ (рис. 6.26).

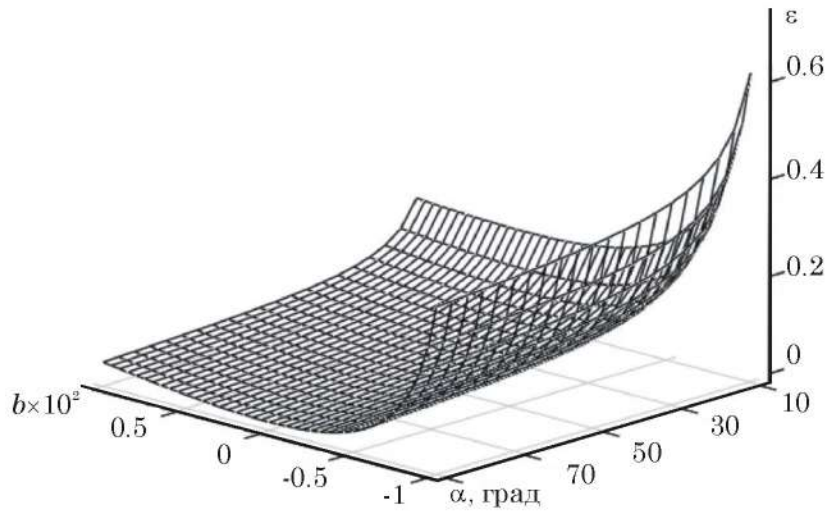


Рис. 6.26. Распределение относительного отклонения безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора с геометрическими параметрами: ξ_0 = 10, ξ_1 = 40, вычисленного с помощью приближения (6.87) от зависимости (6.40) в области определения: $b \in$ [-0.01, 0.01], $\alpha \in$ [10°, 90°].

Здесь необходимо сделать существенное замечание. Зависимость (6.84) показывает хорошее совпадение с зависимостью (6.40) в области отрицательных значений параметра b, а зависимости (6.86) и (6.87) хорошо приближают (6.40) в области положительных значений параметра b.

В результате мы можем сказать, что с помощью зависимостей (6.84), (6.86), (6.87) и (6.88) можно получить приближенное значение безразмерного давления на выходе из канала практически во всем диапазоне изменения параметров, определяющих решение за-

дачи, и только в области наименьших значений α и b точность приближения не превысит 20 %.

6.7. Анализ ползущего диффузорного течения в соосных конических диффузорах с границами, имеющими общую вершину

...Граница принадлежит им самим, будучи их границей.

Г.В.Ф. Гегель

В главе 2 мы уже рассмотрели медленные течения ньютоновской жидкости в соосных конических диффузорах с общей вершиной у границ канала. В настоящей главе мы получили достаточно простые выражения, описывающие распределение безразмерной скорости (6.49), безразмерного градиента давления (6.50) и безразмерного давления (6.52) при ползущем течении в соосных конических диффузорах с общей вершиной границ.

Раньше мы уже выяснили, что распределение относительной безразмерной площади поперечного сечения канала и средней безразмерной скорости, полученные при решении задачи в биконических координатах (6.45), (6.47) формально совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в сферических координатах (2.16) и (2.18). Эта идентичность позволяет предположить, что и в распределении безразмерного давления, его градиента и скорости в канале, полученных в биконических координатах и сферических, будет много общего.

Для этого необходимо сравнить между собой решения, полученные в различных системах координат. И, прежде всего, необходимо привести пространственные координаты к одинаковому масштабу. В главе 2 мы для исследования различных особенностей течения использовали в качестве линейного масштаба как ширину канала на его входе – h_0, так и радиальную координату входа в канал – R_0. Далее в нашей монографии при решении задачи лами-

нарных течений в соосных конических каналах мы, как правило, будем использовать для масштабирования пространственных переменных значение ширины канала на его входе h_0, если отдельно не оговариваем другой масштаб. Поэтому для обезразмеривания координат в сферической системе при сравнении решений также используем значение h_0. В качестве масштабов зависимых величин будем использовать, как и раньше, в каждой системе координат физически обоснованные значения с применением средней скорости течения жидкости на входе в канал.

Сразу отметим, что безразмерная величина координаты входа в канал ξ_0 в биконических координатах однозначно определяется значением полууглов раскрытия граничных конических поверхностей (2.58) и, как видно из рисунка 6.4, в данном случае, будет равна

$$\xi_0 = \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1). \tag{6.90}$$

Уже отмечалось, что при решении задачи ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной его границ мы получили безразмерные выражения для определения средней по поперечному сечению скорости жидкости и площади поверхности поперечного сечения (6.45), (6.47), идентичные соответствующим выражениям в сферических координатах (2.16) и (2.18), но масштабирование указанных переменных при решении задачи в разных системах координат мы использовали различное. В сферической системе координат площадь поверхности поперечного сечения рассматриваемого сейчас канала будет в размерном виде выражаться как (2.14)

$$S_c = 2\pi h_0^2 \xi^2 (\cos\alpha_1 - \cos\alpha), \tag{6.91}$$

а в биконических координатах записывается как (см. 6.26 и 6.45

$$S_b = \pi h_0^2 \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 (2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha). \tag{6.92}$$

Понятно также, что секущие канал координатные поверхности в рассматриваемых системах координат различны. Поэтому, несмотря на то, что распределение безразмерных поверхностей сечения канала вдоль течения, представленные в сферических и биконических координатах совпадают, их размерные значения будут различны. Отношение этих зависимостей составит величину

$$\frac{S_b}{S_c}=\frac{2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha}{2\xi_0^2(\cos\alpha_1-\cos\alpha)}=\frac{2\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)\sin\alpha-\cos\alpha}{2\mathrm{ctg}^2(\alpha-\alpha_1)(\cos\alpha_1-\cos\alpha)}, \qquad (6.93)$$

т.е. является постоянной величиной для каждого канала и определяется только полууглами раскрытия граничных поверхностей.

Определяя относительные отклонения площадей поверхностей поперечного сечения соосного конического диффузора с общей вершиной границ, рассматриваемых в биконических и сферических координатах как

$$\varepsilon_S=\left|\frac{S_b}{S_c}-1\right|, \qquad (6.94)$$

построим зависимость ε_S в интервале полууглов раскрытия граничных конических поверхностей $\alpha\in[5^\circ,\ 90^\circ]$ и $\alpha_1\in[4^\circ,\ 89^\circ]$. При этом будем считать, что угол раскрытия между границами канала, т.е. угол $\alpha-\alpha_1$ (рис. 6.4), изменяется в пределах от 1° и до 35°. Максимальное относительное отклонение ε_S во всем диапазоне изменения параметров незначительно превышает 15 %, а для значений $\alpha-\alpha_1<10^\circ$ не превышает и 3 % (рис. 6.27).

Распределение относительного отклонения площадей поперечных сечений в различных системах координат достаточно важно по той причине, что площадью входа в канал определяется масштаб скорости и давления. Средняя скорость в различных масштабах и различных системах координат идентична, что отображает основные особенности течения в выбранных для его математического описания системах координат, но размерные величины средних скоростей в этих системах будут различны, и относительное отклонение между ними будет определяться выражением (6.94).

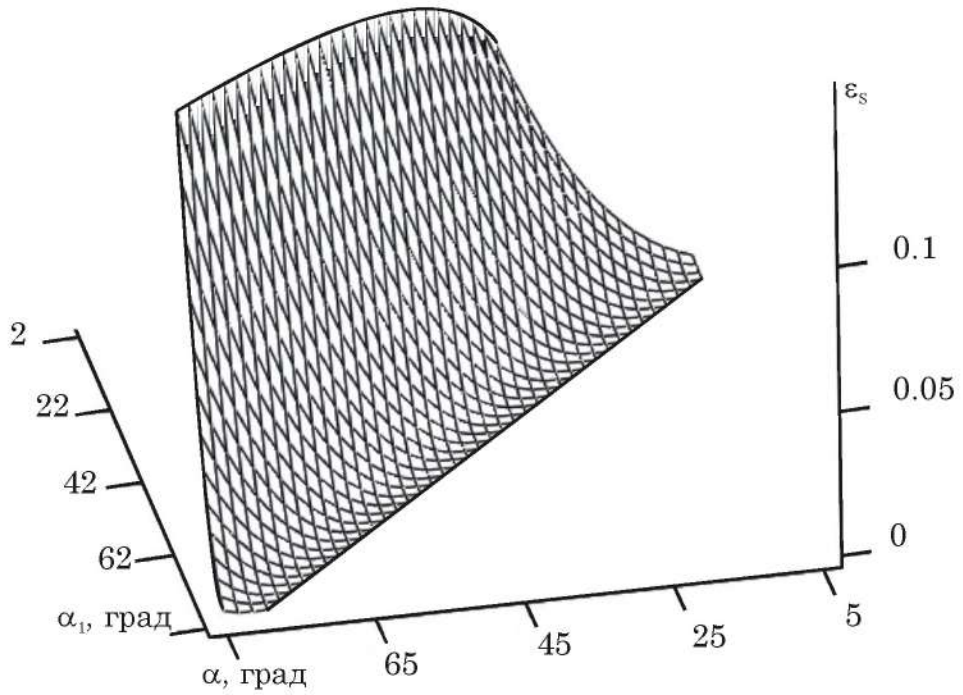


Рис. 6.27. Относительное отклонение площади поверхности поперечного сечения соосного конического канала с общей вершиной, рассчитанной в биконических координатах (6.92) от величины, полученной в сферических координатах (6.91) в области определения полууглов раскрытия граничных поверхностей: для внешней границы $\alpha \in [5°, 90°]$ и для внутренней $\alpha_1 \in [4°,89°]$.

6.8. Сравнение распределений скорости, полученных при решении задачи ползущего течения в соосных конических диффузорах с общей вершиной в сферических и биконических координатах

Происходит не просто нечто более странное, чем мы предполагали; странность происходящего превышает и то, чего мы не смогли предположить.

Л. Дж. Питер

Рассмотрим, как соотносятся между собой распределения безразмерной скорости в канале, определенные в двух используемых здесь системах координат. В биконических координатах распреде-

ление безразмерной скорости определяется выражением (6.49), а в сферических – выражениями (2.19) и (2.32). Для сравнения этих решений мы будем использовать в качестве пространственного масштаба величину h_0, и тогда в рассматриваемом случае течения значение для постоянной разделения λ (2.42) перепишется как

$$\lambda = \frac{6\,\mathrm{ctg}^2(\alpha-\alpha_1)}{C+\frac{B}{4}\left[\frac{\tau_2\left(\tau_2^2-1\right)}{\tau_1-\tau_2}\ln\frac{1+\tau_2}{1-\tau_2}-\frac{\tau_1\left(\tau_1^2-1\right)}{\tau_2-\tau_1}\ln\frac{1+\tau_1}{1-\tau_1}-D\right]-1}, \qquad (6.95)$$

где $C=\frac{A}{2}\left(\tau_2^2+\tau_1\tau_2+\tau_1^2-1\right)$, $D=2\left(\tau_2+\tau_1\right)$, а A и B определены в (2.36) и (2.37) соответственно, и, далее подставляя (6.95) в (2.32) и (2.19), можно вычислить распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре в пространственном масштабе, в котором получено выражение (6.49). Заметим еще раз, что масштабы скорости в (6.49) и (2.19) будут различны.

Для сравнения безразмерных скоростей выполним построение их значений в одном и том же масштабе на поперечных течению координатных поверхностях в канале с геометрическими параметрами, равными: $\alpha_1=10°$, $\alpha=30°$ и $\xi_1=3\xi_0$. В соответствии с (6.90) имеем $\xi_0=2.74$ и $\xi_1=8.24$.

Распределение безразмерной скорости, полученное в биконических координатах (6.49) симметрично относительно серединной поверхности канала и в любом поперечном сечении канала имеет параболический профиль (рис. 6.28а).

Решение, полученное для соосного конического диффузора в сферической системе координат (2.19) с учетом (6.95), дает несимметричное относительно серединной поверхности канала распределение безразмерной скорости (рис. 6.28б). При этом максимальное значение скорости локализуется на одной конической поверхности вдоль всего канала, которую мы определили в главе 2 с помощью выражения (2.61). По абсолютной величине значения скоростей близки, но сравнивать их нельзя, поскольку они получены для разных пространственных координат. Если взглянуть на расположение

координатных поверхностей, выполняющих роль поперечных сечений канала, то мы можем определить функциональные зависимости, описывающие координатные поверхности одной системы в другой (рис. 6.29). Так, например, координаты точки A, лежащей в сферической системе на поверхностях $\xi_c = \text{const}$ и $\theta_i = \text{const}$, т.е. точка A на плоскости (рис. 6.29) имеет сферические координаты $(\xi_c;\ \theta_i)$. В сферической системе эти координаты соответствуют окружности, но поскольку мы рассматриваем аксиально-симметричное течение, ее можно заменить одной точкой A.

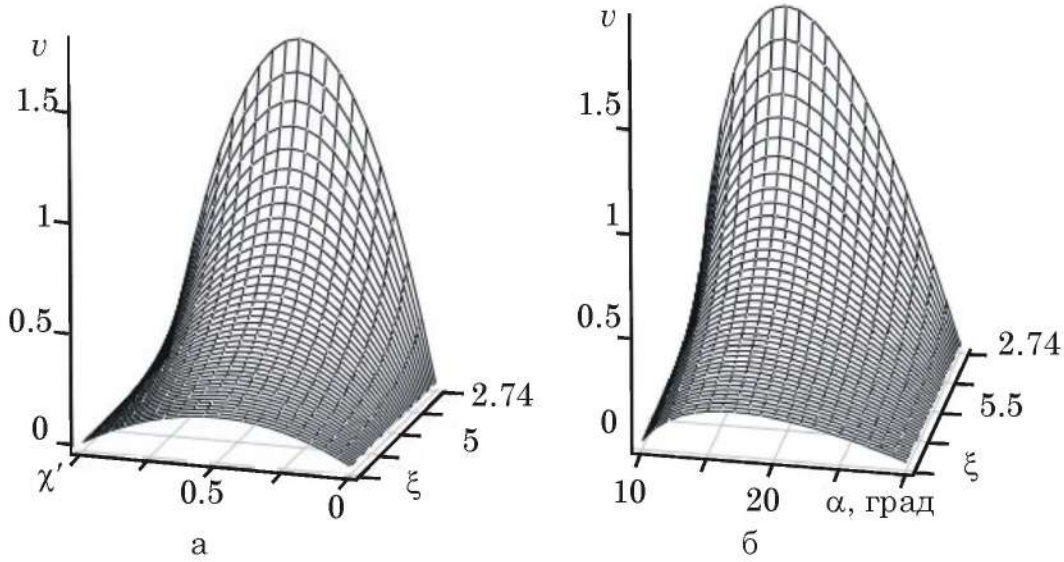


Рис. 6.28. Распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ и геометрическими параметрами: $\alpha = 30°$; $\alpha_1 = 10°$; $\xi_1 = 3\xi_0$. а – распределение, полученное в биконических координатах; б – в сферических координатах.

Зная координаты точки A в сферической системе, мы легко определяем координаты этой точки в биконической системе координат, записав из геометрических соображений (рис. 6.29):

$$\xi_i = \xi_c \cos(\alpha - \theta_i); \tag{6.96}$$

$$\chi_i = \xi_c \sin(\alpha - \theta_i). \tag{6.97}$$

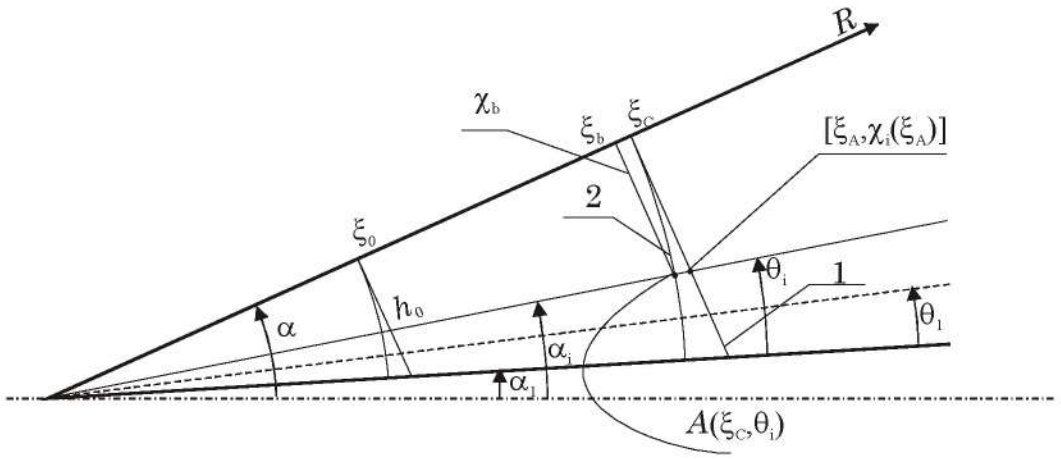


Рис. 6.29. К определению биконических координат сферических секущих поверхностей: A – точка на сферической поверхности со сферическими координатами (ξ_e, θ_i); 1 – коническая секущая поверхность в биконических координатах; 2 – сферическая секущая поверхность; (ξ_b, χ_b) – координаты точки A в биконической системе координат.

Подставляя эти значения координат в (6.49), мы вычислим распределение безразмерной скорости на координатных сферических поверхностях с помощью решения, полученного в биконических координатах. В результате расчета получаем на сферических сечениях несимметричный относительно серединной поверхности канала профиль скорости (рис. 6.30). В биконической системе такое распределение имеет достаточно простое объяснение.

Действительно, на рис. 6.29 мы видим, что сферическое поперечное сечение, имеющее ту же радиальную координату ξ_A, что и коническое поперечное сечение, вблизи внутренней конической границы канала расположено ближе к входу в канал, а на внешней границе эти сечения касаются. Поэтому величины в распределении скорости на коническом и сферическом поперечном сечении канала, полученные в биконических координатах, вблизи внешней границы будут близки, т.е. близки к значениям симметричного распределения скорости на рис. 6.28а. В направлении внутренней границы сферическое поперечное сечение отклоняется от конического в сторону входа в канал, и поэтому точки, принадлежащие сферическому поперечному сечению, находятся на конических сечениях со все меньшей радиальной координатой ξ (рис. 6.29). Нетрудно видеть,

что из преобразования (6.80) и равномерного разбиения координаты χ' при построении распределения безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре переменной ширины при использовании биконических координат следует, что координаты χ'_i с одинаковыми номерами i расположены на конических поверхностях, вершины которых совпадают с вершиной внешней конической границы канала (рис. 6.29). Поэтому безразмерная скорость в точке, лежащей на конической поверхности поперечного сечения ($\xi = \text{const}$), но с меньшим значением ξ, чем ξ_A и с i-тым номером разбиения интервала $\left[0,\ \tilde{h}(\xi)\right]$, т.е. с координатами $\left[\xi,\ \chi_i(\xi)\right]$, большее, чем значение скорости в точке с координатами $\left[\xi_A,\ \chi_i(\xi_A)\right]$.

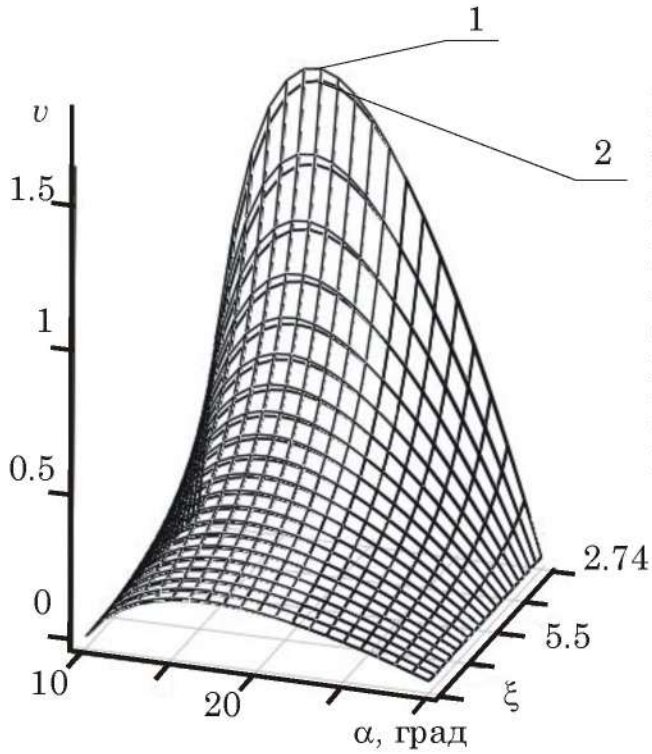


Рис. 6.30. Распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ и геометрическими параметрами: $\alpha = 30°$; $\alpha_1 = 10°$; $\xi_1 = 3\xi_0$, вычисленное на сферических координатных поверхностях. 1 – распределение, полученное в сферической системе координат; 2 – в биконической системе координат.

Еще раз отметим, что точки $\chi_i(\xi)$ и $\chi_i(\xi_A)$ лежат на одной прямой (рис. 6.29). В итоге мы получили в биконических координатах несимметричное относительно серединной поверхности распределение безразмерной скорости по сферической поверхности поперечного сечения при диффузорном ламинарном течении в соосном

коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной. Данное распределение безразмерной скорости вполне согласуется с распределением безразмерной скорости, полученной при точном решении уравнений движения, записанных в приближении ползущего течения (2.19), (2.32) в сферической системе координат (рис. 6.30). Распределение безразмерных скоростей на рис. 6.30 представлены в одном масштабе, выбранном для решения задачи в биконических координатах. Для этого распределение (2.19) мы умножили на отношение масштабов скорости

$$\frac{V_{0C}}{V_{0b}} = \frac{S_{0b}}{S_{0C}} = \frac{(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha}{2(\tau_1 - \tau_2)\xi_0^2}. \qquad (6.98)$$

Относительное отклонение безразмерной скорости, полученной в биконической системе координат от безразмерной скорости, полученной в сферических координатах для каналов с разностью полууглов раскрытия до 20°, не превышает 7 % (рис. 6.31). При разности углов 10° максимальное отклонение во всем возможном диапазоне изменения полууглов раскрытия не превосходит 5 %.

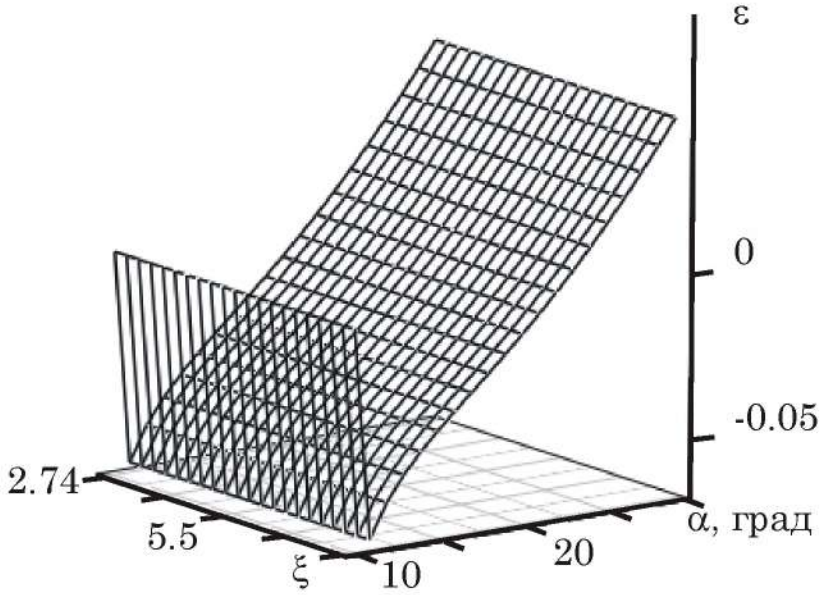


Рис. 6.31. Распределение относительного отклонения скорости в соосном коническом диффузоре, полученной в биконических координатах (6.49) от скорости, полученной в сферических координатах (2.19).

6.9. Сравнение распределений безразмерного давления при медленном ламинарном течении в соосном коническом диффузоре, образованном коническими поверхностями с общей вершиной

Кушам подвески из соцветий арджуны
Прилаживают каждая по-своему

Калидаса

При сравнении решений указанной задачи, найденных в сферической и биконической системах координат, мы получили хорошее совпадение между распределениями скорости. При этом, конечно, надо иметь ввиду, что масштабы, в которых представлены скорости, несколько различны, что в первую очередь связано с различием геометрии рассматриваемых каналов. Действительно, в сферических координатах вход и выход канала ограничен сферическими поверхностями, а в биконических – коническими поверхностями. Площади поверхностей поперечных сечений соосного конического канала, произведенных этими поверхностями, различны, и в результате получается, что средние скорости течения в начале канала различны.

При решении задачи считалось, что в каждой из выбранных систем координат скорость жидкости в каждой точке перпендикулярна координатным поверхностям, которые в свою очередь перпендикулярны границам, которые также являются координатными поверхностями, как в сферической системе или перпендикулярны одной из границ канала, как в биконической системе координат.

Данное обстоятельство будем иметь ввиду при сравнении распределений безразмерных давлений, вычисленных для медленного течения в соосном коническом диффузоре в модели течения, использующей сферические координаты, и в модели, использующей биконическую систему координат.

Распределение безразмерного давления в биконических координатах определяется выражением (6.52), а в сферических координатах – выражением (2.60). Принимая во внимание, что для соосного конического диффузора в выбранных безразмерных коорди-

натах (6.18), безразмерная координата входа определяется соотношением (6.90), запишем (6.52) в виде

$$\Pi(\xi) = 4\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)\left\{\left[\frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)}{\xi}\right]^3 - 1\right\}, \qquad (6.99)$$

а распределения безразмерного давления в сферических координатах можно записать как

$$\Pi(\xi) = \frac{\lambda + 6\operatorname{ctg}^2(\alpha - \alpha_1)}{3\operatorname{ctg}^3(\alpha - \alpha_1)}\left\{\left[\frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)}{\xi}\right]^3 - 1\right\}, \qquad (6.100)$$

где постоянная разделения λ определяется формулой (6.95).

Рассматриваемое в данном разделе течение в соосном коническом диффузоре, образованном коническими поверхностями с общей вершиной, имеет особенность, характерную для диффузорного течения в соосных конических каналах с увеличивающейся шириной, которую мы отметили при изучении ламинарного диффузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной в главе 2. Этой особенностью является конечная величина безразмерного давления при стремлении радиальной координаты *ad infinitum*.

В биконических координатах для рассматриваемых каналов при $\xi \to \infty$ из (6.98) получим

$$\Pi(\infty) = -4\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1) = -4\xi_0, \qquad (6.101)$$

а в сферических координатах мы получили

$$\Pi(\infty) = -\frac{\lambda + 6\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)^2}{3\operatorname{ctg}^3(\alpha - \alpha_1)} = -\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3\xi_0^2}. \qquad (6.102)$$

При упрощении уравнений Навье-Стокса для описания медленных течений в соосных конических диффузорах с общей вершиной их границ в главе 2 мы предположили, что разность между полууглом раскрытия внешней конической границы канала и полууглом раскрытия его внутренней границы не превышает 30–40°, по-

этому проведем сравнение распределений безразмерных давлений, полученных с помощью (6.102) и (6.100) для каналов, у которых разность полууглов раскрытия граничных поверхностей также не превышает 30°.

Рассмотрим распределение безразмерного давления при диффузорном течении в канале с полууглами раскрытия границ, равных $\alpha_1 = 10°$ и $\alpha = 40°$. Безразмерная координата входа в этом случае будет равна $\xi_0 = 1.73$, безразмерную координату выхода из канала примем равной $\xi_1 = 31.73$.

Наиболее значительное изменение безразмерного давления в обоих приближениях происходит в начале канала (рис. 6.32а), а затем, на некотором расстоянии от входа в канал, наступает стабилизация безразмерного давления, т.е. оно стремится к значению (6.101) при представлении течения в биконических координатах и (6.102) в сферических. Относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного в биконических координатах (6.99) от безразмерного давления, определенного в сферических координатах (6.100) постоянно по всей длине канала и лишь незначительно превосходит 10 % для выбранной геометрии канала (рис. 6.32б).

Используя выражения (6.99), (6.100) и (6.101), (6.102), мы можем определить значение безразмерной радиальной координаты ξ_∞, на которой безразмерное давление при диффузорном течении в соосном коническом канале будет отличаться от безразмерного давления на ∞ не более, чем на 1 %. Действительно, из условия

$$\frac{\Pi(\xi) - \Pi(\infty)}{\Pi(\infty)} = 0.01, \tag{6.103}$$

и с учетом соотношения (6.101), получим выражение для определения ξ_∞

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3 = 0.01. \tag{6.104}$$

Откуда легко получаем значение для ξ_0

$$\xi_\infty = 4.64\xi_0 = 4.64\,\mathrm{ctg}(\alpha - \alpha_1). \tag{6.105}$$

Очевидно, что соотношение (6.105) справедливо как для модели течения в биконических координатах, так и в сферических координатах. В только что рассмотренном случае $\xi_\infty = 8$, что согласуется с результатами, представленными на рисунке 6.32. При дальнейшем сравнении безразмерных давлений, рассчитанных по (6.99) и (6.100) для определения безразмерной координаты выхода из канала, мы будем использовать соотношение (6.105).

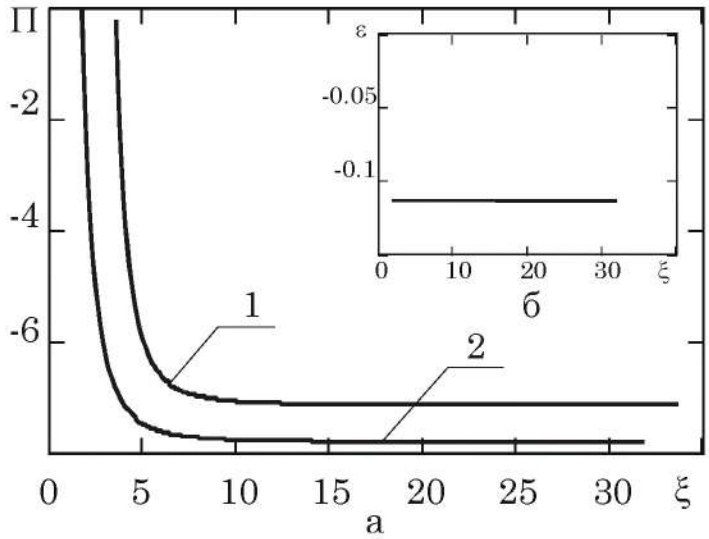


Рис. 6.32. Распределение вдоль течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и геометрическими параметрами: $\alpha = 30°$; $\alpha_1 = 40°$; $\xi_0 = 1.73$; $\xi_1 = 31.73$. а – безразмерного давления: 1 – распределение П, полученное в биконической системе координат (6.99); 2 – П, полученное в сферической системе координат (6.100): б – относительного отклонения зависимости (6.99) от зависимости (6.100).

Используя выражение для определения распределения безразмерной скорости (6.49) и (2.19), сравним распределение скоростей сдвига на границах канала в биконических и сферических координатах.

Скорость сдвига на границах канала в биконических координатах определится выражением

$$\dot{\gamma}_{b\Gamma}(\xi) = \left.\frac{\partial v_{com}}{\partial \chi}\right|_{\chi=0} = 6\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3, \qquad (6.106)$$

или принимая во внимание (6.47), можно записать для $\dot{\gamma}_{b\Gamma}$

$$\dot{\gamma}_{b\Gamma}(\xi) = 6\overline{v}_{\text{com}}^{\frac{3}{2}}. \qquad (6.107)$$

Скорость сдвига на границе соосного конического диффузора с общей вершиной границ в сферической системе координат в безразмерных величинах (2.3) была нами определена выражением (2.64), которое более детально можно представить в виде

$$\dot{\gamma}_{s\Gamma i}(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{1-\tau_i^2}}{6\xi^3}\left(A\frac{dP_2}{d\tau} + B\frac{dQ_2}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=\tau_i}, \qquad (6.108)$$

где λ определяется выражением (6.95), A и B выражениями (2.36) и (2.37) соответственно, а $P_2(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ – многочлены Лежандра первого и второго рода и второго порядка, т.е. $\frac{dP_2}{d\tau} = 3\tau$, $\frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{3}{2}\tau\ln\frac{1+\tau}{1-\tau} + \frac{P_2(\tau)}{1-\tau^2}$.

Мы помним, что при решении в биконической системе координат задачи ламинарного течения в соосных конических каналах кривизна граничных поверхностей учитывалась лишь частично, при определении градиента давления с помощью интегрирования полученного квадратичного распределения скорости по площади поперечного сечения канала (4.22), а при определении самого распределения скорости не учитывалось, поэтому скорости сдвига на разных границах канала, но на одной секущей координатной поверхности, будут равны. В сферической системе координат в силу несимметричного распределения скорости поперек канала (рис. 6.28) скорости сдвига на границах канала будут различны (рис. 6.33). Распределения же скорости сдвига, вычисленные в биконических координатах, располагаются между распределениями скоростей сдвига на границах в сферической системе координат (рис. 6.33).

Уменьшив разность между полууглами раскрытия до $\Delta\alpha = 20°$, например, выбрав $\alpha = 30°$, а $\alpha_1 = 10°$, получим значения $\xi_0 = 2.75$, а $\xi_\infty = 12.75$.

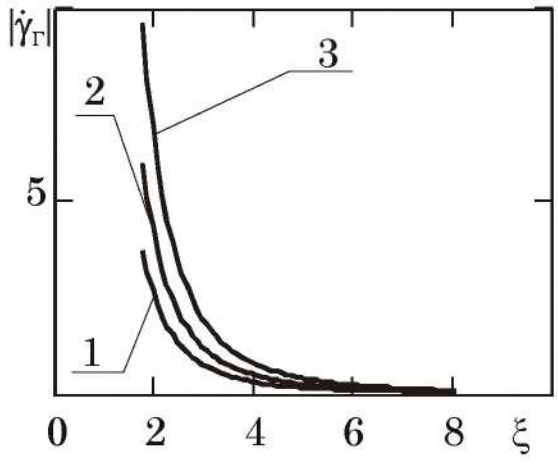


Рис. 6.33. Распределение безразмерной скорости сдвига на границах канала вдоль течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ и геометрическими параметрами: $\alpha = 30°$; $\alpha_1 = 10°$; $\xi_0 = 1.74$; $\xi_1 = 31.73$. 1 – безразмерная скорость сдвига на внешней граничной поверхности, рассчитанная в сферических координатах; 2 – $|\dot{\gamma}_\Gamma|$, полученная в биконической системе координат; 3 – зависимость $|\dot{\gamma}_\Gamma|$, полученная для внутренней граничной поверхности в сферических координатах.

При выбранном значении $\Delta\alpha$ отклонение между распределениями безразмерного давления (6.99) и (6.100) уже практически неразличимо, а относительное отклонение постоянно вдоль канала и немногим превыше 0,8 % (рис. 6.34). Распределение безразмерной скорости сдвига на границах канала аналогично предыдущему случаю (рис. 6.35). Во многих технических приложениях разность между полууглами раскрытия конических границ $\Delta\alpha$ не превосходит несколько градусов [7, 61, 123]. Выберем $\Delta\alpha=5°$, например, для $\alpha = 25°$, $\alpha_1 = 20°$, и тогда, в этом случае $\xi_0 = 11.4$, $\xi_\infty = 53.1$, а относительное отклонение между распределениями (6.99) и (6.100) составляют значение $\varepsilon = 0,3$ % вдоль всего канала.

Распределение безразмерных скоростей сдвига на границах канала в сферических координатах несколько отличается от ранее рассмотренных, но качественное соотношение между величинами безразмерных скоростей сдвига, рассчитанными в биконических и сферических координатах, остается прежним (рис. 6.36).

Заметим, что величины относительного отклонения между распределениями (6.99) и (6.100), определенные для выбранных значений $\Delta\alpha$, характерны для всего возможного диапазона изменения полууглов раскрытия конических поверхностей, ограничивающих канал.

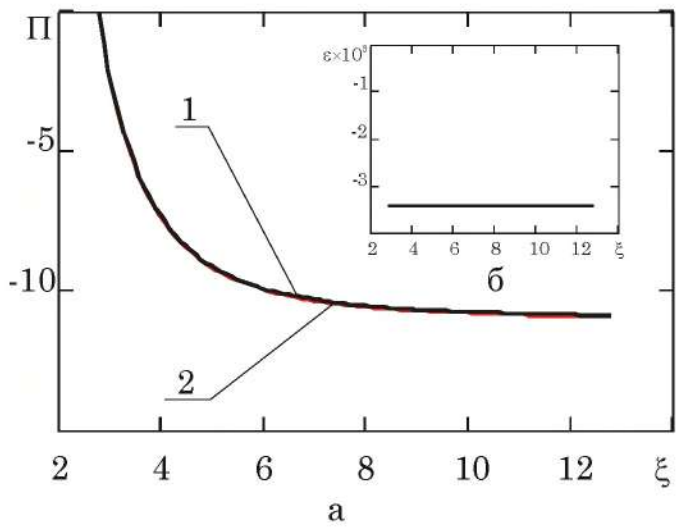


Рис. 6.34. Распределение вдоль течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной и геометрическими параметрами, равными: $\alpha = 30°$; $\alpha_1 = 10°$; $\xi_0 = 2.75$; $\xi_1 = 12.75$: а – безразмерного давления: 1 – полученного с помощью решения задачи в биконической системе координат (6.99); 2 – в сферической системе координат (6.100); б – относительное отклонение первого решения от второго.

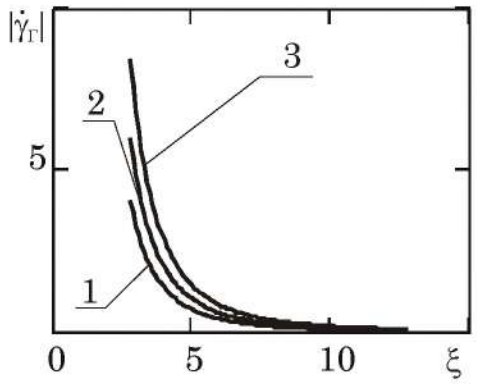


Рис. 6.35. Распределение безразмерной скорости сдвига на границах канала вдоль течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ и геометрическими параметрами: $\alpha = 30°$; $\alpha_1 = 10°$; $\xi_0 = 2.75$; $\xi_1 = 12.75$. 1 – безразмерная скорость сдвига на внешней граничной поверхности, рассчитанная в сферических координатах; 2 – $|\dot{\gamma}_\Gamma|$, полученная в биконической системе координат; 3 – зависимость $|\dot{\gamma}_\Gamma|$, полученная для внутренней граничной поверхности в сферических координатах.

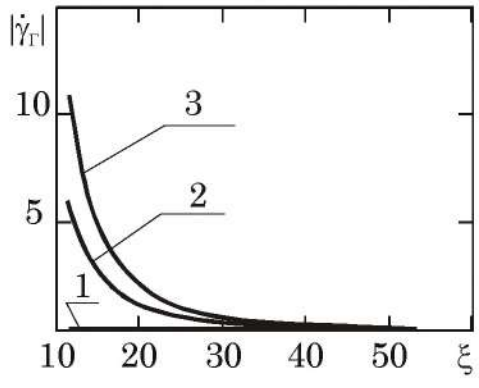


Рис. 6.36. Распределение безразмерной скорости сдвига на границах канала вдоль течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ и геометрическими параметрами: $\alpha = 25°$; $\alpha_1 = 20°$; $\xi_0 = 14.4$; $\xi_1 = 53.1$. 1 – безразмерная скорость сдвига на внешней граничной поверхности, рассчитанная в сферических координатах; 2 – $|\dot{\gamma}_\Gamma|$, полученная в биконической системе координат; 3 – зависимость $|\dot{\gamma}_\Gamma|$, полученная для внутренней граничной поверхности в сферических координатах.

Действительно, мы обнаружили, что относительное отклонение между распределениями безразмерного давления при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре, образованном коническими поверхностями с общей вершиной, полученное в рамках моделей течения, которые мы использовали для решения задачи в биконических координатах (6.99) и в сферических координатах (6.100), зависит только от полууглов раскрытия граничных поверхностей α и α_1, и не зависят от радиальной координаты ξ. Поэтому, выбрав произвольную длину, на которой изменяется безразмерная радиальная координата, например, $\Delta\xi = \xi_1 - \xi_0 = 30$, получим относительное отклонение между (6.99) и (6.100) в пределах возможного изменения полууглов раскрытия α и α_1. При этом будем учитывать, что разность между α и α_1 не должна превышать 20°. В результате мы видим, что в интересующем нас диапазоне изменения параметров максимальное отклонение между (6.99) и (6.100) не превосходит 8 %, а в случаях, наиболее интересных практически, не превосходит и 4 % (рис. 6.37).

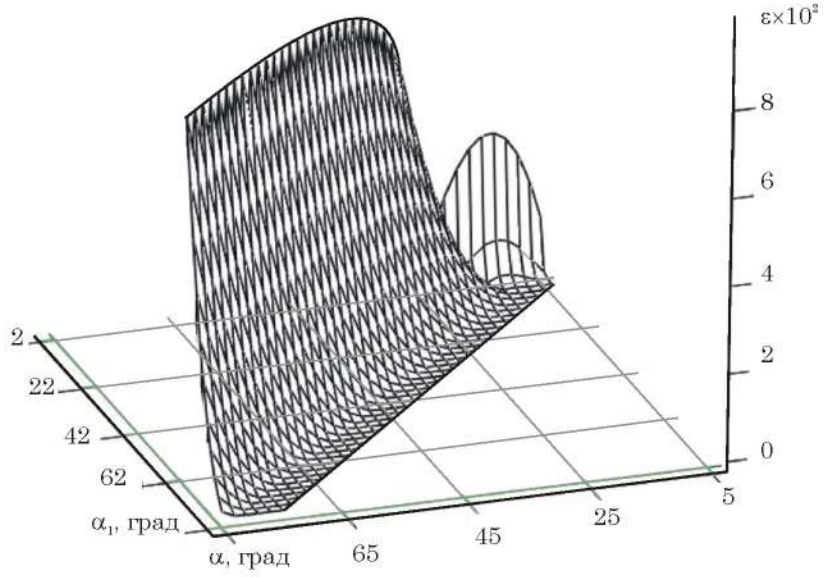


Рис. 6.37. Модуль относительного отклонения безразмерного давления при ползущем течении в соосном коническом канале, образованном поверхностями с общей вершиной, вычисленным в биконических координатах (6.99) от П, полученном в сферической системе координат (6.100) в пределах возможного изменения α и α_1 при условии, что $\alpha - \alpha_1 \le 20°$.

Заметим, что если несколько модифицировать выражение (6.100) и записать его в виде зависимости

$$\Pi_{mod}(\xi)=\frac{\lambda+6\,\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{3\,\mathrm{ctg}^3(\alpha-\alpha_1)}\left\{\left[\frac{\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\xi}\right]^3-1\right\}, \qquad (6.109)$$

и далее сравнить это распределение с зависимостью (6.99), мы увидим, что относительное отклонение между (6.99) и (6.109) не превосходит и 1 % в значительном интервале изменения полууглов раскрытия α и α_1. Например, при $\alpha=20°$, а $\alpha_1=10°$ относительное отклонение превышает 0.4 % (рис. 6.38), а при $\Delta\alpha\approx 5°$ различие между (6.109) и (6.99) практически исчезает.

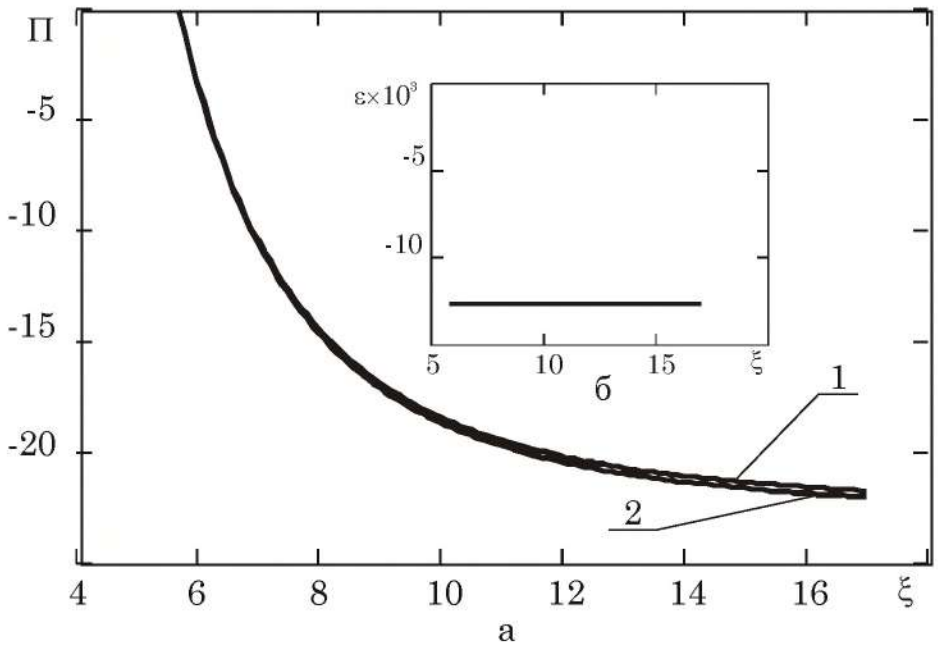


Рис. 6.38. Распределение безразмерного давления вдоль соосного конического диффузора – а: 1 – зависимость П(ξ), определяемая выражением (6.99); 2 – (6.109); б) их относительное отклонение.

Практическое совпадение зависимостей (6.99) и (6.109) для технически интересных соотношений параметров дает метод простого вычисления постоянной разделения переменных λ в сферике-

ских координатах (6.95). Действительно, приравнивая значения (6.99) и (6.109), получим для определения λ выражение

$$\lambda = 12\xi_0^4 - 6\xi_0 = 12\operatorname{ctg}^4(\alpha - \alpha_1) - 6\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1). \qquad (6.110)$$

Соотношение (6.110) показывает, что λ полностью определяется разностью полууглов между коническими поверхностями, ограничивающими канал. Относительное отклонение величины постоянной разделения, рассчитанной по (6.110) от величины, рассчитанной по (6.95) для больших значений α и в пределах изменений $\Delta\alpha = [0, 30°]$, не превышает 9 %. При этом для малых значений α мы видим значительное увеличение отклонения в конце интервала $\Delta\alpha$ (рис. 6.39), поэтому при уменьшении интервала изменения $\Delta\alpha$ до 20°, максимальное относительное отклонение для больших значений α уменьшается до 2.5 %, а для α близких к 30°– до 0.6 % (рис.6.40), что говорит о хорошем приближении λ выражением (6.109) в практически интересном интервале изменения разности полууглов раскрытия граничных поверхностей.

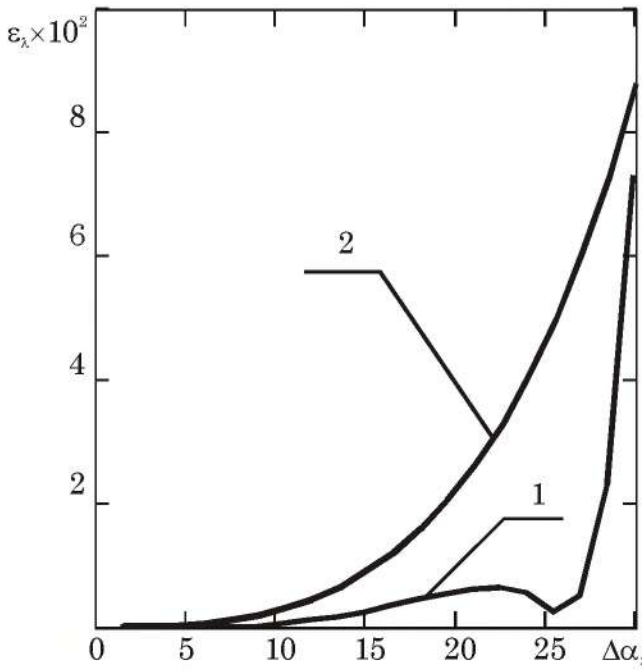


Рис. 6.39. Зависимость модуля относительного отклонения постоянной разделения λ, вычисленной по (6.110), от значений, определенных выражением (6.95) от разности полууглов раскрытия граничных поверхностей соосного конического диффузора с общей вершиной границ: 1 – для полуугла раскрытия внешней границы $\alpha = 31°$; 2 – $\alpha = 70°$.

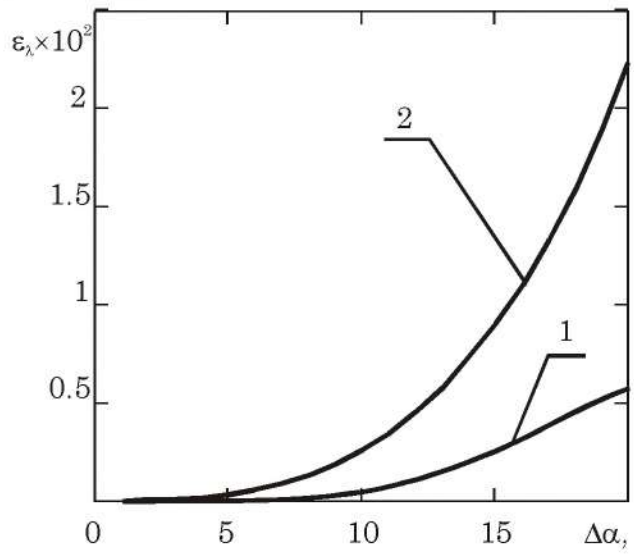


Рис. 6.40. Зависимость модуля относительного отклонения постоянной разделения λ, вычисленной по (6.110) от значений, определенных выражением (6.95) от разности полууглов раскрытия граничных поверхностей соосного конического диффузора с общей вершиной границ: 1 – для полуугла раскрытия внешней границы $\alpha = 31°$; 2 – $\alpha = 90°$.

Сравнение распределений безразмерных давлений, вычисленных с помощью выражений (6.99) и (6.100) показывает их хорошее совпадение (рис. 6.34). Приравнивая (6.99) и (6.100) получаем для вычисления λ соотношение

$$\lambda = 12\xi_0^4 - 6\xi_0^2 = 12\operatorname{ctg}^4(\alpha - \alpha_1) - 6\operatorname{ctg}^2(\alpha - \alpha_1), \qquad (6.111)$$

которое дает несколько большее относительное отклонение от точного значения для λ, как правило, не превышающее 10 %, но для оценки некоторых параметров течения, применение (6.111) является более удобным, чем использование (6.110).

6.10. Особенности расходно-напорной характеристики, полученной в биконических координатах для ползущего диффузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной границ

Недостаточно овладеть премудростью,
нужно также уметь использовать ее.

М. Т. Цицерон

Выражения, полученные для распределения безразмерного давления при решении задачи ползущего течения в соосном кони-

ческом диффузоре в биконических координатах (6.52) и (6.99), позволяют построить размерные расходно-напорные характеристики исследуемых каналов для ползущих течений в зависимости от различных значений определяющих параметров задачи. Действительно, с помощью безразмерных переменных, определенных в (6.18), запишем выражение для вычисления перепада размерного давления в соосном коническом канале с общей вершиной границ

$$\Delta P = \frac{4\mu Q \operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\pi h_0 (2R_0 \sin\alpha - h_0\cos\alpha)}\left[\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 - 1\right] = \tag{6.112}$$

$$= \frac{4\mu Q \operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\pi h_0^2 \left[2\operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)\sin\alpha - \cos\alpha\right]}\left[\left(\frac{h_0 \operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{R_1}\right)^3 - 1\right],$$

где μ – коэффициент динамической вязкости текущей в канале жидкости, Па·с Q – объемный расход жидкости, м^3/с; h_0 –ширина канала на его входе, м; R_0 – радиальная координата входа в канал, м; R_1 – радиальная координата выхода из канала, м.

Отметим, что координата R_0 определяется с помощью (6.90), как $R_0 = h_0 \operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)$.

На рис. 6.41 представлена зависимость перепада давления ΔP от объемного расхода жидкости и от разности полууглов раскрытия $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1$ для параметров: $\alpha = 33°$, $\mu = 10$ Па с, $h_0 = 0.01$ м для канала с постоянной длиной радиальной образующей канала $\Delta R = R_1 - R_0 = 0.3$ м.

Особенностью зависимости, представленной на рис. 6.41, являются увеличение перепада давления в канале при увеличении разности $\Delta\alpha$ и постоянном значении Q. Причиной этого является то, что мы сохранили постоянное значение начальной ширины входа в канал, а это, например, при малых значениях $\Delta\alpha$ приводит к большим значениям R_0 (рис. 6.42а), а значит и большему значению

площади поперечного сечения. Увеличение $\Delta\alpha$ приводит к уменьшению R_0 (рис. 6.42), за счет чего уменьшается площадь поперечного сечения канала по сравнению с каналом, имеющим большое значение R_0, и в результате увеличивается значение средней скорости в пределах всего канала и поэтому увеличивается перепад давления.

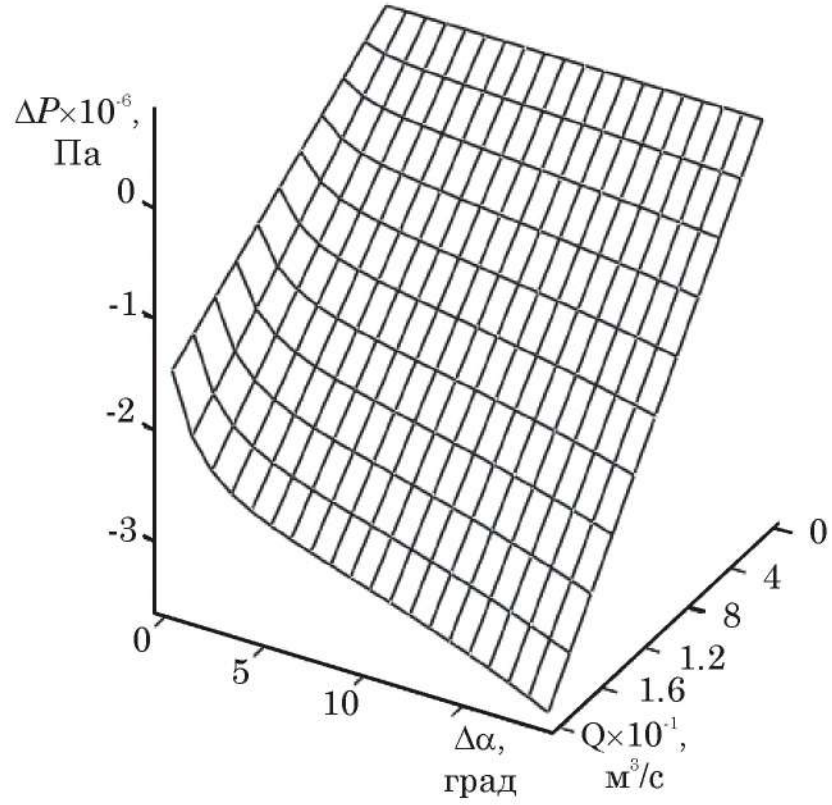


Рис. 6.41. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с постоянной длинной образующей $\Delta R = 0.3$ м в зависимости от $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1$

Мы можем построить зависимость $\Delta P(\alpha, Q)$, в которой будет сохраняться значение радиальной координаты входа R_0, а ширина входа в канал будет в этом случае определяться как $h_0 = R_0 \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1)$. Поэтому с увеличением $\Delta\alpha$ при $R_0 = \mathrm{const}$, h_0 бу-

дет увеличиваться (рис. 6.43), а зависимость, в этом случае, $\Delta P(\alpha,\ Q)$ будет выглядеть как

$$\Delta P = \frac{4\mu Q}{\pi R_0^3 \mathrm{tg}^3(\alpha-\alpha_1)\left[2\sin\alpha - \mathrm{tg}(\alpha-\alpha_1)\cos\alpha\right]}\left[\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 - 1\right]. \quad (6.113)$$

В данной зависимости наибольшие перепады давления наблюдаются при малых значениях $\Delta\alpha$, поскольку при постоянных

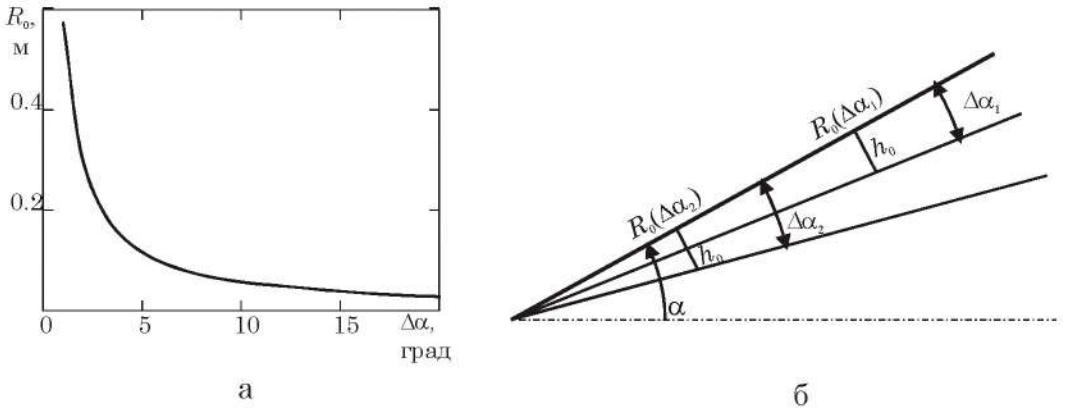


Рис. 6.42. Зависимость радиальной координаты входа в соосный конический диффузор с постоянной шириной входа h_0 от разности полууглов раскрытия граничных поверхностей $\Delta\alpha$ – а; б – рисунок, поясняющий увеличение R_0 при уменьшении $\Delta\alpha$ при h_0 = const.

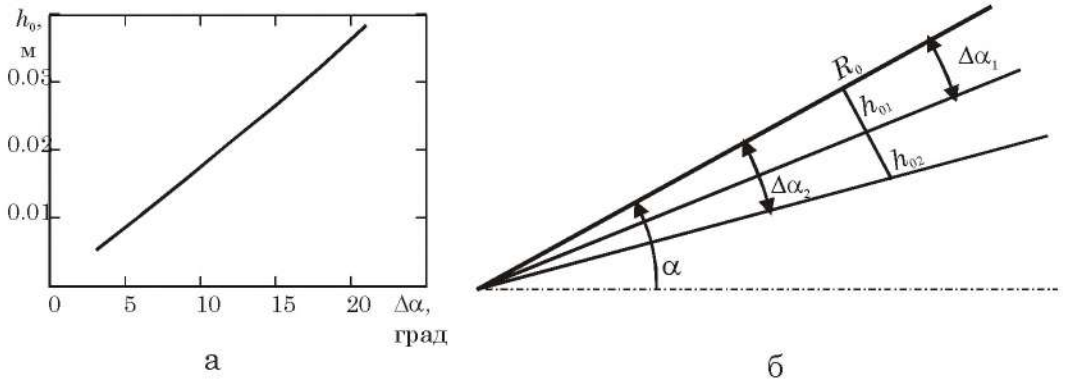


Рис. 6.43. Зависимость ширины h_0 входа в соосный конический диффузор от $\Delta\alpha$ при постоянном значении R_0 – а; б – рисунок, поясняющий увеличение h_0 с ростом $\Delta\alpha$ при R_0 = const.

здесь значениях R_0 в каналах будут наблюдаться наименьшие площади поперечного сечения и, соответственно, большие скорости, что ведет к большим перепадам давления. Увеличение $\Delta\alpha$ в данном случае ведет к значительному уменьшению перепада давления в канале (рис. 6.44).

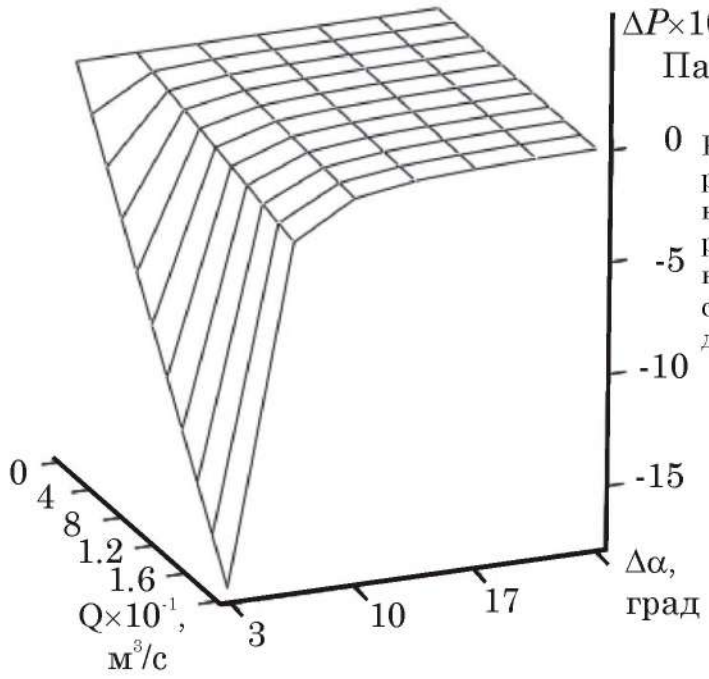


Рис. 6.44. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора при различных значениях $\Delta\alpha$ для канала с постоянным значением координаты входа R_0.

6.11. Ползущие диффузорные течения в соосных конических каналах с границами, открывающимися навстречу друг другу

Вреднее всего желание предохранить себя от ошибок

Г. В. Ф. Гегель

В главе 1, классифицируя соосные конические каналы, применяющиеся в проточных устройствах промышленных аппаратов, мы отметили, что могут существовать каналы, в которых границами служат соосные конические поверхности, раскрывающиеся навстречу друг другу (рис. 6.45).

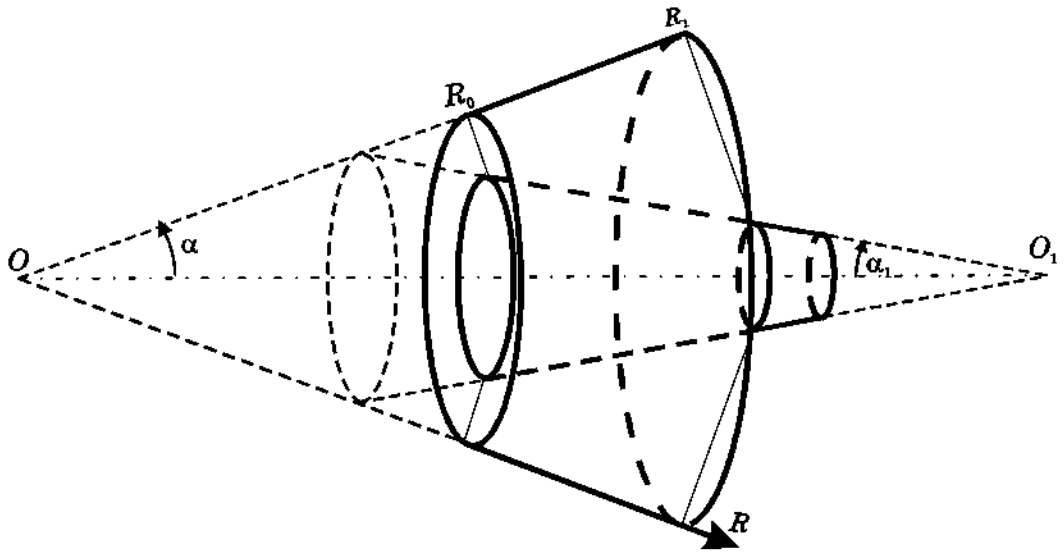


Рис. 6.45. Геометрия соосного конического канала с границами, раскрытыми навстречу друг другу. O, O_1 – вершины конических границ; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в канал и выхода из него; α, α_1 – полууглы раскрытия внешней и внутренней конических границ, соответственно.

Очевидно, что диффузорное течение в рассматриваемых каналах возможно только в сторону увеличения ширины канала. Описывать данное течение будем с помощью решения задачи ползущего течения в соосных конических каналах переменной ширины, полученного в настоящей главе (см. раздел 6.3).

Если в каналах с коническими границами, раскрывающимися в одну сторону, коэффициент b в линейной зависимости ширины канала от радиальной координаты (6.8) определялся тангенсом разности полууглов раскрытия границ (6.9), то, как следует из рисунка 6.46, в рассматриваемых здесь каналах линейная зависимость ширины канала от R: $h = h_0 + b(R - R_0)$, будет определяться коэффициентом b, равным

$$b = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_1), \tag{6.114}$$

т.е. как и в ранее рассмотренных случаях, решение задачи ползущего течения в соосных конических диффузорах переменной ширины будет определяться тремя параметрами: ξ_0, α и b или эквивалентным набором: ξ_0, α и α_1.

Существует и принципиальное отличие геометрии соосного конического диффузора с раскрытием поверхностей навстречу друг другу от геометрии диффузоров с увеличивающейся шириной вдоль течения, рассмотренных ранее. Как мы отмечали, у последних длина канала может быть неограниченной, в то время как у каналов, показанных на рисунке 6.45 существует максимально возможная величина радиальной координаты $R = R_{\max}$, ограничивающая длину канала.

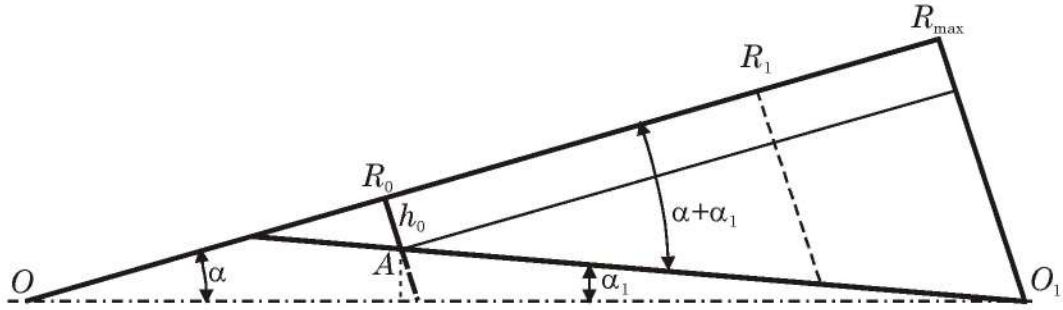


Рис. 6.46. К определению функциональной связи между параметрами соосного конического канала с границами, раскрытыми навстречу друг другу: h_0 – начальная ширина канала; O, O_1 – вершины конических границ; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в канал и выхода из него; $R_{\max}$ – максимально возможное значение радиальной координаты; α, α_1 – полууглы раскрытия внешней и внутренней конических границ, соответственно.

Для определения максимального возможного значения радиальной координаты $R_{\max}$ рассмотрим рисунок 6. 46.

Длина образующей внутреннего конуса – AO_1 из геометрических соображений может быть определена как

$$AO_1 = \frac{R_0 \sin\alpha - h_0 \cos\alpha}{\sin\alpha_1}. \qquad (6.115)$$

С другой стороны эта же величина определяется максимально возможной длиной образующей внешней конической границы

$$AO_1 = \frac{R_{\max} - R_0}{\cos(\alpha + \alpha_1)}, \qquad (6.116)$$

откуда для вычисления $R_{\max}$ получаем формулу

$$R_{\max} = R_0 + \left(R_0 \sin\alpha - h_0 \cos\alpha\right)\frac{\cos\left(\alpha + \alpha_1\right)}{\sin\alpha_1}, \qquad (6.117)$$

или в безразмерных величинах она запишется как

$$\xi_{\max} = \xi_0 + \left(\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)\frac{\cos\left(\alpha + \alpha_1\right)}{\sin\alpha_1}. \qquad (6.118)$$

Определив соотношения между геометрическими параметрами в изучаемых в настоящем разделе каналах, рассмотрим, как будут изменяться параметры течения в пределах интервалов возможного изменения геометрических параметров.

Предположим, что течение происходит в соосном коническом диффузоре с геометрическими параметрами, равными: $\alpha = 15°$, $\alpha_1 = 8°$, $\xi_0 = 10$. В данном случае максимальное значение безразмерной радиальной координаты может достигать величины $\xi_{\max} = 20.73$, поэтому при анализе течения мы можем ограничить длину канала на координате $\xi_1 = 20$.

Как следует из рисунка 6. 45, увеличение относительной площади поверхности поперечного сечения канала в рассматриваемых случаях течения, т.е. при определении параметра b выражением (6. 106), будет заведомо больше вдоль ξ, чем в ранее рассмотренных случаях, т.е. в тех случаях, когда параметр b определяется выражением (6.9). Очевидно, что для этих случаев величины α и ξ_0 должны быть одинаковыми.

Поэтому и уменьшение безразмерной средней по поперечному сечению скорости в соосных конических каналах с границами раскрытыми навстречу друг другу будет более интенсивным вдоль течения, чем в уже рассмотренных случаях. В представленном случае $\bar{v}$ изменяет свое значение на длине течения более, чем в 5 раз (рис. 6.47). Для такого же изменения средней скорости в соосных конических каналах с раскрытием границ в одну сторону необходимы более длинные каналы (рис. 6.11), (рис. 6.16). Очевидно, что аналогичное распределение будет иметь и безразмерная максимальная в поперечном сечении скорость (6.82) (рис. 6.47).

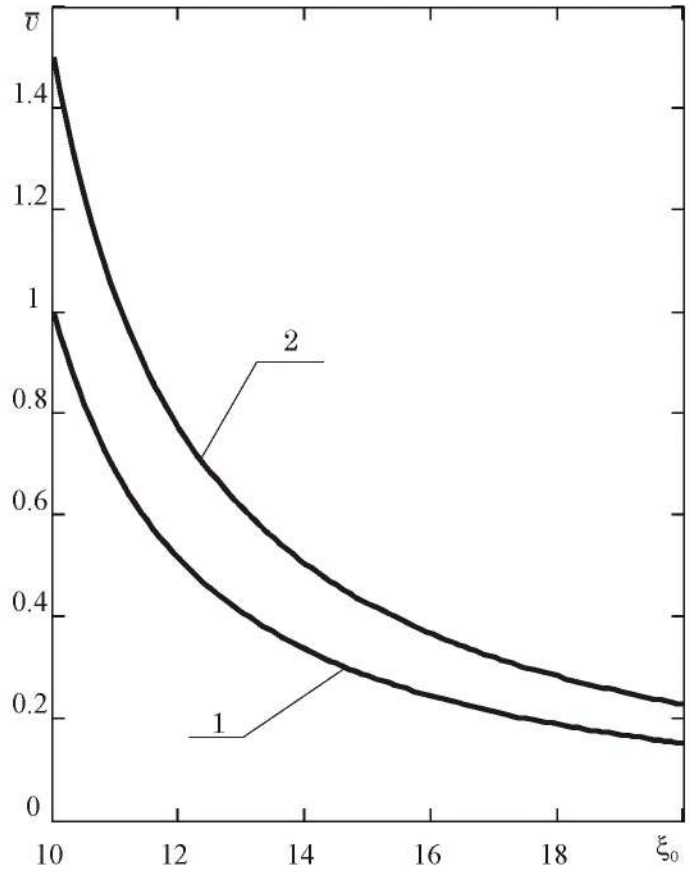


Рис. 6.47. Распределение безразмерных: средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости жидкости при ее течении в соосном коническом диффузоре с границами раскрытыми навстречу друг другу – 1 и максимальной в поперечном сечении скорости – 2 . Параметры канала: $\alpha = 15°$, $\alpha_1 = 8°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 20$.

Учитывая изоморфное преобразование (6.80), построим распределение безразмерной скорости для диффузорного течения в соосном коническом канале со встречным раскрытием границ (рис. 6.48).

В соответствие с уменьшением безразмерной средней по поперечному сечению канала скорости, градиент безразмерного давления быстро уменьшается по абсолютной величине вдоль течения почти до 0 (рис. 6.49). Поэтому и безразмерное давление быстро падает вблизи входа в канал, где градиент давления имеет макси-

мальные абсолютные значения, и затем, по мере уменьшения $|\Pi'_\xi|$ практически до 0, безразмерное давление стремится к значению $\Pi(\xi_{max})$, которое в нашем случае равно -13.155 (рис. 6.50). Заметим, что при достаточно больших значениях ξ_{max} величина $\Pi(\xi_{max})$ можно оценить с помощью (6.53). В рассматриваемом случае $\Pi_\infty = -13.46$, и при этом необходимо помнить, что длина соосного конического канала с границами, раскрытыми навстречу друг другу, всегда лимитирована разностью $\xi_{max} - \xi_0$, но формально мы можем рассматривать течение и далее за координатой ξ_{max}, но как течение в круглом коническом диффузоре [114].

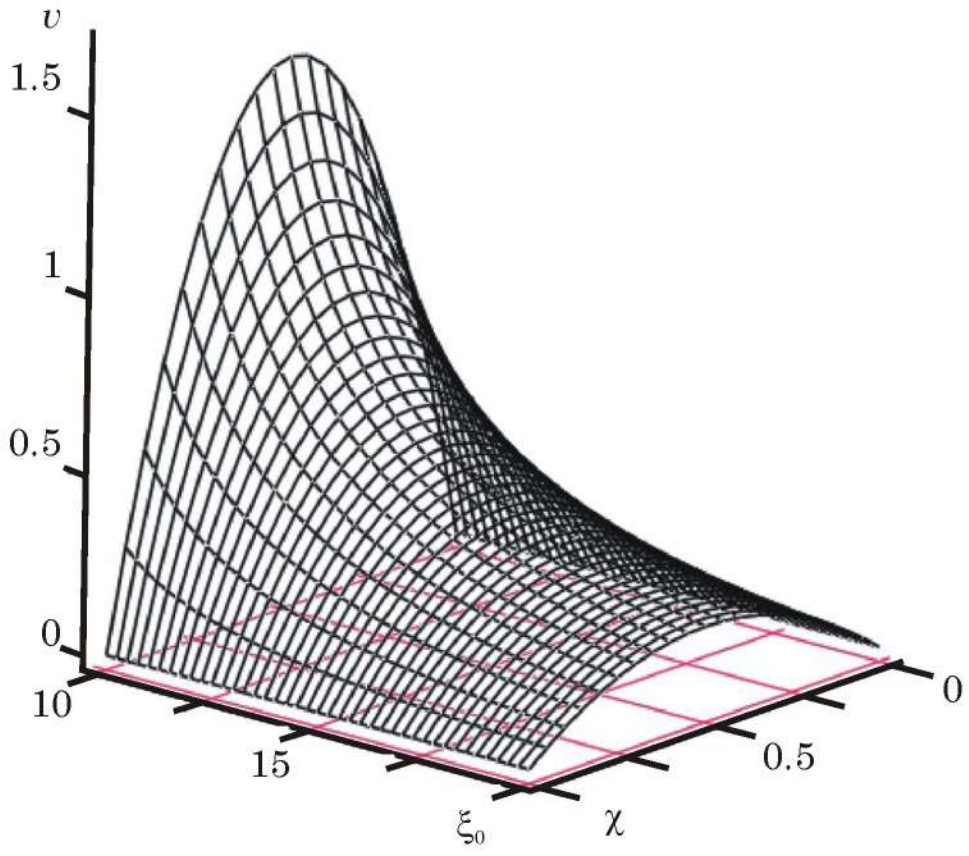


Рис. 6.48. Распределение безразмерной скорости при течении в соосном коническом диффузоре с границами, раскрытыми навстречу друг другу и параметрами, равными: $\alpha = 15°$, $\alpha_1 = 8°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 20$.

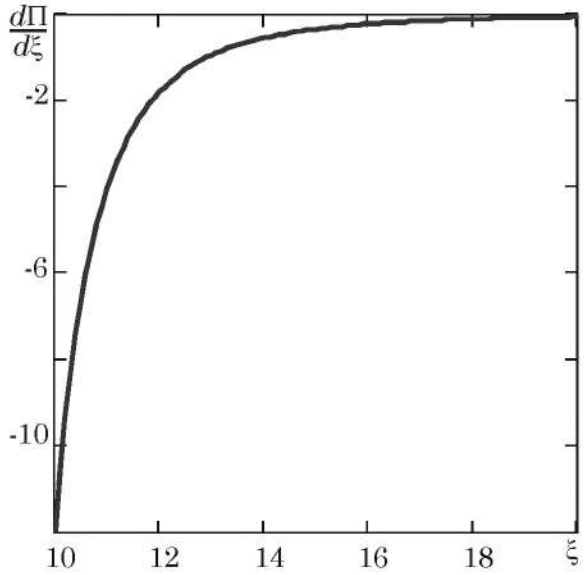


Рис. 6.49. Распределение безразмерного градиента давления вдоль канала при течении в соосном коническом диффузоре с границами, раскрытыми навстречу друг другу и параметрами, равными: $\alpha = 15°$, $\alpha_1 = 8°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 20$.

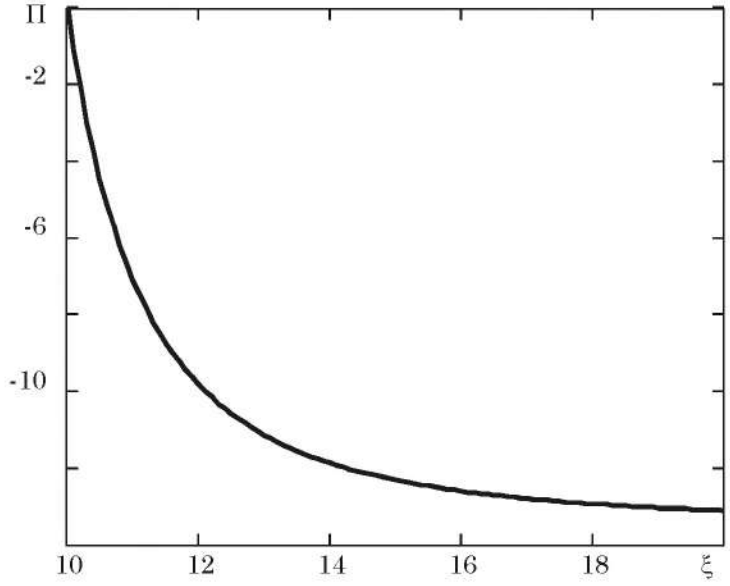


Рис. 6.50. Распределение безразмерного давления вдоль канала при течении в соосном коническом диффузоре с границами, раскрытыми навстречу друг другу и параметрами, равными: $\alpha = 15°$, $\alpha_1 = 8°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 20$.

Расходно-напорная характеристика при ползущих течениях в соосных конических каналах со встречным раскрытием границ, полученная в предлагаемом здесь приближении, будет выражаться зависимостью (6.42).

6.12. Сравнение результатов, полученных для расчета течения в соосных конических диффузорах переменной ширины с существующими методами расчета

Почему это делалось так, а не иначе, и каким путем достигались подобные открытия, они не могли объяснить моему уму удовлетворительно.

Р. Декарт

Сравнение результатов, полученных в главе 4, для расчета перепада давления в соосном коническом диффузоре с результатами ступенчатого метода аппроксимации соосного конического канала коаксиальными цилиндрическими каналами, показало достаточно большое расхождение между ними (рис. 4.10), в то время, как решение, полученное нами в биконических координатах для соосных конических каналов переменной ширины, хорошо согласуется с точным решением, полученным нами в сферических координатах (рис. 4.8) и (рис. 6.34). Поэтому в данной главе настоящей монографии мы не будем сравнивать полученное решение со значениями, вытекающими из ступенчатой аппроксимации соосных конических каналов коаксиальными цилиндрическими каналами. Здесь мы проведем сравнение полученных нами зависимостей для расчета перепада давления в соосных конических каналах переменной ширины с выражением (4.49), в котором коэффициент геометрической формы определяется с помощью соотношения (4.56).

Рассмотрим расходно-напорные характеристики, полученные с помощью (4.49), (4.56) и с помощью (6.42).

Для достаточно длинных каналов, например, при $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ и $\alpha = 15°$, относительное расхождение результатов очень большое практически во всем возможном диапазоне изменения

значений параметра b (рис. 6.51). Особенно большое относительное отклонение наблюдается для каналов с уменьшающейся шириной вдоль течения.

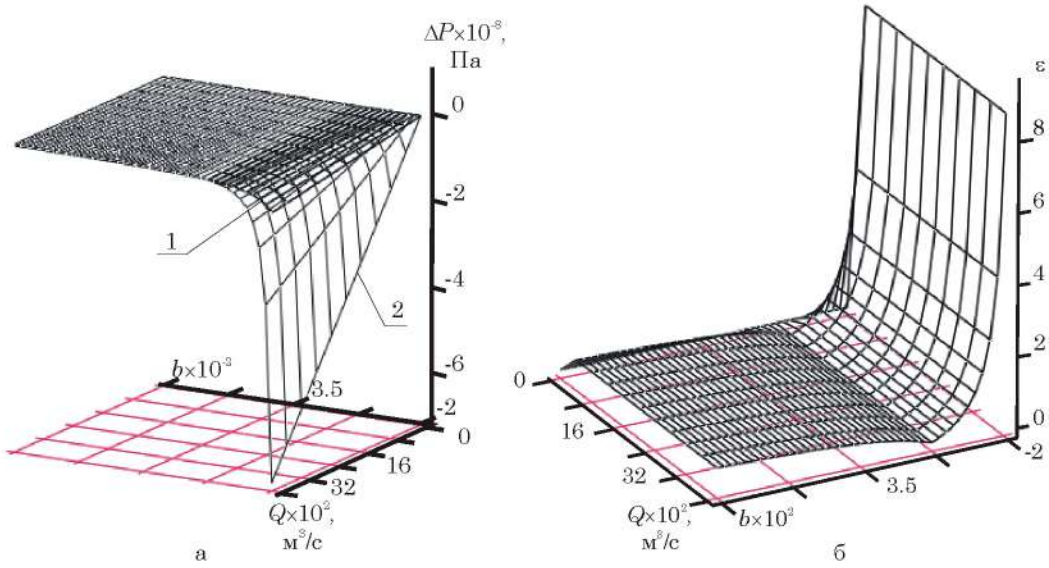


Рис. 6.51. Расходно-напорная характеристика ползущего течения в соосном коническом канале с геометрическими размерами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ и границами, раскрывающимися в одну сторону, в зависимости от параметра b; 1 – зависимость (6.42); 2 – зависимость (4.49) с коэффициентом формы (4.50) – а; б – модуль относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

При уменьшении безразмерной длины канала в три раза, т.е. выбирая $\xi_1 = 20$, уменьшается и относительное отклонение между рассматриваемыми характеристиками (рис. 6.52). Но отклонение все еще достаточно велико, и вследствие этого при проведении расчетов течения в технических устройствах с помощью зависимости (4.49) могут возникнуть большие погрешности.

Сравним расходно-напорные характеристики (6.42) и (4.49), (4.56) для соосных конических каналов с границами, раскрытыми навстречу друг другу. Предположим сначала, что течение происходит в достаточно длинном канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ и $\alpha = 15°$, а α_1 изменяется от 0° до 2.5°, что соответствует изменению параметра b в пределах диапазона 0.268...0.315. Относительное от-

клонение между (4.49), (4.56) и (6.42) в пределах изменения параметров задачи равно 60 % (рис. 6.53).

Уменьшение безразмерной длины канала в три раза с помощью изменения координаты выхода из канала, т.е. выбирая значение $\xi_1 = 20$, позволяет расширить диапазон возможного изменения b, который станет равный: $b \in [0.268, 0.424]$, что соответствует изменению полуугла раскрытия внутренней конической поверхности в пределах 0°...8°. Уменьшение безразмерной длины канала, в данном случае, приводит к значительному уменьшению относительного отклонения во всем возможном диапазоне изменения параметров характеристик (рис. 6.54).

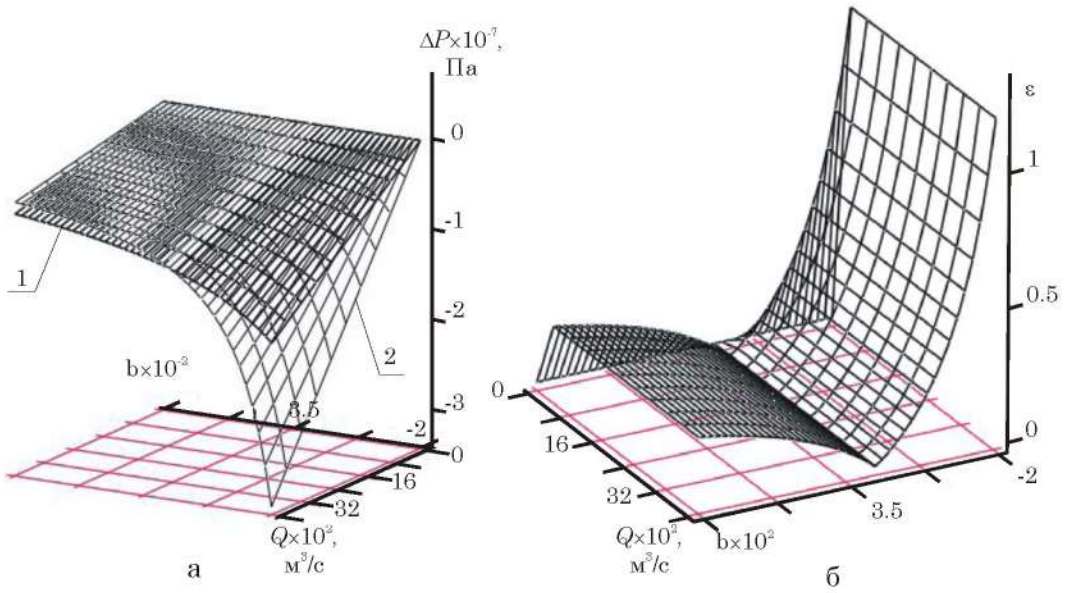


Рис. 6.52. Расходно-напорная характеристика ползущего течения в соосном коническом канале с геометрическими размерами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 20$ и границами, раскрывающимися в одну сторону, в зависимости от параметра b; 1 – зависимость (6.42); 2 – зависимость (4.49) с коэффициентом формы (4.50) – а; б – модуль относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

Итак, мы можем заключить, что приближение (4.49), (4.56) будет давать хорошие результаты только для соосных конических каналов короткой безразмерной длины с границами, раскрытыми навстречу друг другу.

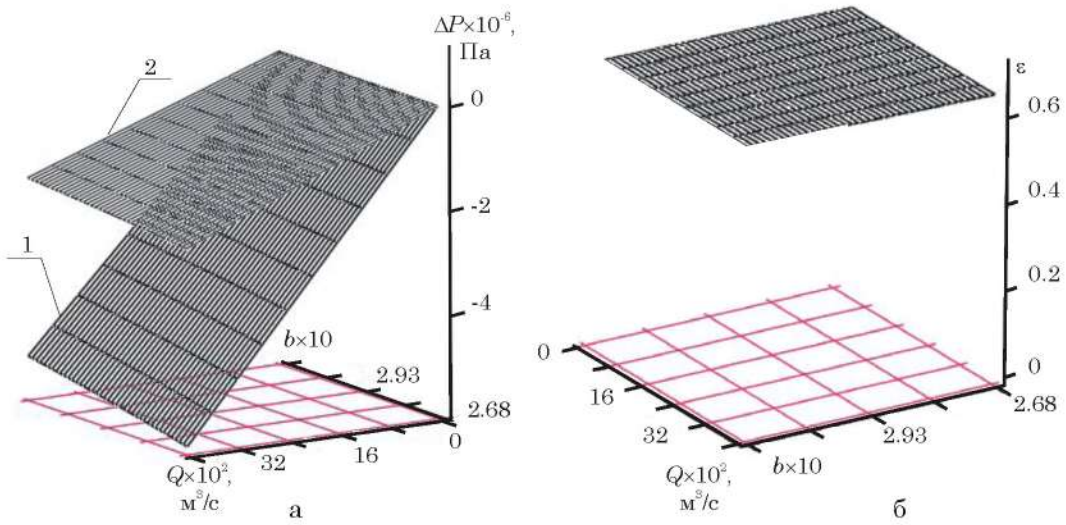


Рис. 6.53. Расходно-напорная характеристика ползущего течения в соосном коническом канале с геометрическими размерами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ и границами, раскрывающимися навстречу друг другу, в зависимости от параметра b; 1 – зависимость (6.42); 2 – зависимость (4.49) с коэффициентом формы (4.50) – а; б – модуль относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

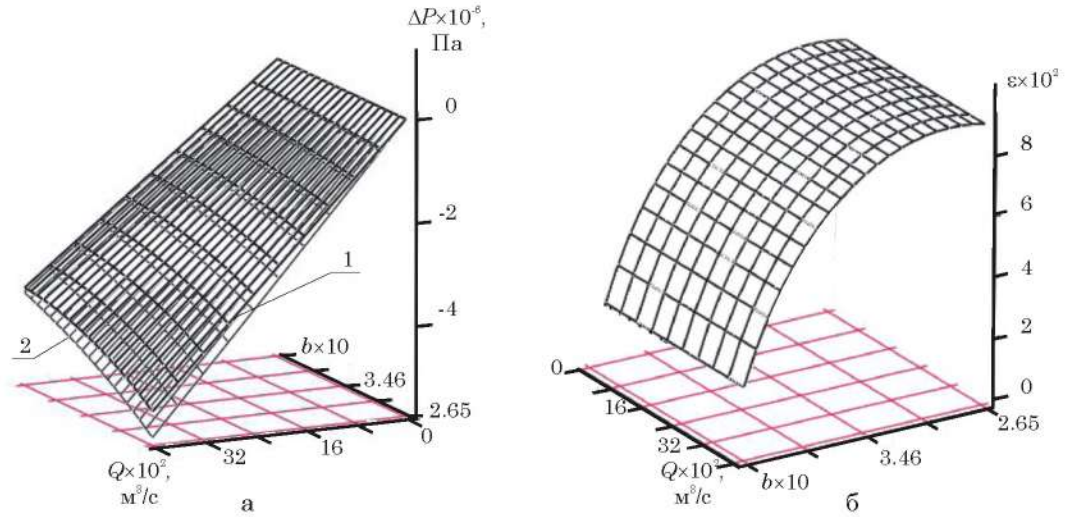


Рис. 6.54. Расходно-напорная характеристика ползущего течения в соосном коническом канале с геометрическими размерами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 20$ и границами, раскрывающимися навстречу друг другу, в зависимости от параметра b; 1 – зависимость (6.42); 2 – зависимость (4.49) с коэффициентом формы (4.50) – а; б – модуль относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

Заметим, что, зная напорно-расходную зависимость, мы можем определить функциональную зависимость мощности, необходимой для обеспечения заданного расхода жидкости через соосный конический диффузор переменной ширины [120]

$$N = \Delta P(Q) \times Q, \tag{6.119}$$

где ΔP – перепад давления в диффузоре, определяемый выражением (6.42) либо выражением (6.112).

Результаты, полученные в настоящей главе, значительно расширяют возможности аналитического исследования ползущих течений в соосных конических диффузорах с переменной вдоль течения шириной.

ГЛАВА 7

ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КОНФУЗОРЕ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Боги людям открыли не все.
В поиск пустившись,
люди сами открыли немало
Ксенофан

7.1. Краткий обзор ранних работ

Будем вечны именами
И сокрытые в пыли!
В.А. Жуковский

В разделах 4.1, 5.1 и 6.1 было кратко рассказано о ранних работах, посвященных ползущим течениям в соосных конических каналах, не имеющих общей вершины их границ. И хотя рассматривали там мы только течение в каналах с эквидистантными границами, результаты части упомянутых работ могут быть использованы для расчета течений в соосных конических каналах переменной ширины и, в частности, конфузорных течений. Особенно это касается работ, в которых для расчета параметров течения использовался ступенчатый метод аппроксимации канала, но с уже сделанными нами в разделе 4.6 замечаниями.

Специально ползущее конфузорное течение в соосных каналах переменной ширины автором исследовалось в работе [30] с помощью аналитического решения задачи в биконической системе координат. В работе [41] автором получено приближенное решение в биконических координатах задачи конфузорного ползущего течения в соосном коническом канале с общей вершиной его границ.

В настоящей главе мы более подробно и систематически рассмотрим ползущее течение в соосных конических конфузорах с переменной шириной канала, основываясь на методах и идеях, пред-

ставленных автором данной монографии в двух последних работах, на которые были здесь сделаны ссылки.

7.2. Формулировка задачи ползущего конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с переменной вдоль течения шириной

Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов.

Е. Вигнер

Как и в случае диффузорного течения, конфузорное ползущее течение в соосных конических каналах переменной ширины будем рассматривать в биконической системе координат (см. раздел 1.5)

Учитывая оценки величины членов в уравнениях, описывающих ламинарные течения в соосных конических каналах, выполненные нами в предыдущих главах (см. разделы 4.2, 5.2, 6.2), а также условие (1.1), мы можем записать уравнение (1.67) для ползущего конфузорного течения в виде

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\mu}{\Omega'}\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\Omega'\frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}}\right), \tag{7.1}$$

где величина Ω' определена в (1.69), а с учетом оценки, приведенной в разделе 6.2, мы можем для Ω' записать $\Omega' \approx (R - T)\sin\alpha$, и после этого переписать (7.1) в более простом виде

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \mu\frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{X}^2}. \tag{7.2}$$

Граничными условиями для однозначного определения распределения скорости жидкости в канале будут условия прилипания на границах канала:

$$V = 0,\ \mathrm{X} = 0; \tag{7.3}$$

$$V = 0,\ \mathrm{X} = h(T), \tag{7.4}$$

где $h(T)$ – функция, определяющая изменение ширины канала вдоль течения, которая по аналогии с (6.8) запишется как

$$h(T) = h_0 + bT, \tag{7.5}$$

а параметр b определится выражением (6.9) (рис.7.1).

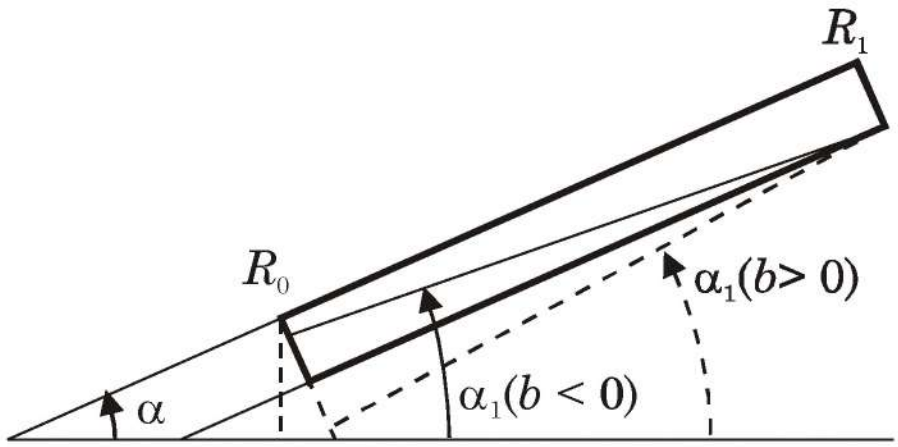


Рис. 7.1. Геометрия соосного конического конфузора с изменяющейся шириной вдоль течения.

Начальным условием для определения распределения давления в канале будет условие, задания некоторой величины давления на входе в канал

$$P = P_0,\ T = 0. \tag{7.6}$$

Обоснование условия (7.6) смотрите в разделе 1.5.

При решении задачи мы будем также использовать условие постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала, которое по аналогии с (6.12) запишется в виде

$$2\pi \int_0^{h_0+bT} \left(R\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right) V d\mathrm{X} = Q, \tag{7.7}$$

где Q – объемный расход жидкости, м^3/с.

В последнем равенстве знаки V и Q совпадают, т.е. при конфузорном течении величина Q отрицательна. Об этом необходимо помнить, хотя при анализе течения, в частности расходно-напорной характеристики, мы под расходом жидкости будем подразумевать модуль величины Q.

7.3. Решение задачи ползущего конфузорного течения жидкости в соосном коническом канале переменной ширины

Чтоб расколоть тугую сферу,
Чтоб тайный выщелкнуть ответ,
Нужны лишь яростная вера
И бычьей пашни сотня лет.

С. Шелковый

Для того, чтобы определить наиболее общие свойства течений вязких ньютоновских жидкостей в соосных конических конфузорах, не связанных с конкретными значениями реологических параметров и абсолютных размеров канала, полученную систему уравнений (7.2)–(7.7) исследуем в безразмерной записи.

Для этого нам необходимо выбрать масштабные множители, с помощью которых будет осуществлено обезразмеривание уравнений (7.2)–(7.7). В качестве линейного масштаба мы можем выбрать значение ширины канала на его входе, т.е. h_0. В качестве масштаба скорости будем использовать величину средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости на его входе – $V_0 = \bar{V}(0)$. Чтобы определить значение V_0 нам необходимо вычислить значение площади поверхности поперечного сечения канала на его входе, но нам также понадобится значение площади поперечного сечения канала при любом значении продольной координаты T, поэтому определим сначала зависимость $S(T)$, откуда затем сможем получить значение $S_0 = S(0)$.

Дифференциал площади для поверхности поперечного сечения соосного конического канала в биконической системе координат (рис. 6.2) запишется как

$$dS = \left[(R_1 - T)\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right]d\mathrm{X}, \qquad (7.8)$$

и тогда для определения площади поперечного сечения канала и ее зависимости от T мы можем записать

$$S(T) = 2\pi \int_0^{h_0+bT} \left[2(R_1 - T)\sin\alpha - \mathrm{X}\cos\alpha\right]d\mathrm{X} =$$

(7.9)

$$= \pi(h_0 + bT)\left[2(R_1 - T)\sin\alpha - (h_0 + bT)\cos\alpha\right].$$

Из (7.9), полагая $T = 0$, получим для площади поперечного сечения на входе в канал значение

$$S_0 = \pi h_0 (2R_1 \sin\alpha - h_0 \cos\alpha). \tag{7.10}$$

Теперь мы можем записать выражение, определяющее среднюю по поперечному сечению скорость на входе в канал

$$V_0 = \frac{Q}{S_0} = \frac{Q}{\pi h_0 (2R_1 \sin\alpha - h_0 \cos\alpha)}. \tag{7.11}$$

Аналогично можно записать выражение, определяющее распределение вдоль течения размерной средней по площади поперечного сечения канала скорости

$$\bar{V}(T) = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi(h_0 + bT)\left[2(R_1 - T)\sin\alpha - (h_0 + bT)\cos\alpha\right]}. \tag{7.12}$$

Поскольку, как уже отмечалось в данной монографии, мы исследуем изотермические течения ньютоновской жидкости, значение коэффициента динамической вязкости μ будет постоянным в пределах всего канала, и мы можем ввести безразмерные переменные:

$$t = \xi_1 - \xi;\ \xi = \frac{R}{h_0};\ \chi = \frac{X}{h_0};\ \upsilon = \frac{V}{V_0};\ \Pi = \frac{(P - P_0)h_0}{\mu V_0}, \tag{7.13}$$

при использовании которых уравнения (7.2)–(7.7) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \chi^2}; \tag{7.14}$$

$$\upsilon = 0,\ \chi = 0; \tag{7.15}$$

$$\upsilon = 0,\ \chi = 1 + bt; \tag{7.16}$$

$$\tilde{h}(\xi) = 1 + bt; \tag{7.17}$$

$$\Pi = 0,\ t = 0; \tag{7.18}$$

$$\int_0^{1+bt}\left[(\xi_1-t)\sin\alpha-\chi\cos\alpha\right]\upsilon d\chi=\frac{1}{2}\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right). \qquad (7.19)$$

Мы также можем определить относительную безразмерную площадь поверхности поперечного сечения канала как

$$\tilde{s}=\frac{S(T)}{S_0}=\frac{(1+bt)\left[2(\xi_1-t)-(1+bt)\operatorname{ctg}\alpha\right]}{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (7.20)$$

а безразмерную среднюю по поперечному сечению канала скорость как

$$\overline{\upsilon}=\frac{\overline{V}}{V_0}=\frac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{(1+bt)\left[2(\xi_1-t)-(1+bt)\operatorname{ctg}\alpha\right]}, \qquad (7.21)$$

и тогда для соотношения между величинами $\overline{\upsilon}$ и $\tilde{s}$ имеем выражение

$$\overline{\upsilon}=\frac{1}{\tilde{s}}. \qquad (7.22)$$

Заметим еще раз, что параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внутренней и внешней поверхности канала (рис. 7.1), т.е. $b = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1)$, и, следовательно, из геометрических соображений величина параметра b для каналов, образованных коническими поверхностями, раскрытыми в одну сторону, должна удовлетворять условию (рис. 7.1)

$$1\geq\xi_0\sin\alpha-\left[1+(\xi_1-\xi_0)b\right]\cos\alpha\geq 0. \qquad (7.23)$$

Дважды интегрируя (7.14), получаем

$$\upsilon=\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}+C_1\chi+C_2, \qquad (7.24)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые определяем с помощью граничных условий (7.15) и (7.16):

$$C_1=-\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}(1+bt); \qquad (7.25)$$

$$C_2 = 0, \tag{7.26}$$

и далее подставляя эти значения в (7.24), получим выражение, определяющее распределение безразмерной скорости через безразмерный градиент давления

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\left[\chi - (1+bt)\chi\right]. \tag{7.27}$$

Выражения для вычисления безразмерного градиента давления определим из условия постоянства расхода жидкости в любом поперечном сечении конфузора, подставляя (7.27) в (7.19), получим

$$\frac{d\Pi}{dt}\int_0^{1+bt}\left[(\xi_1 - t) - \chi\,\mathrm{ctg}\alpha\right]\left[\chi^2 - (1+bt)\chi\right]d\chi = \left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\alpha\right). \tag{7.28}$$

Вычисляя интеграл в (7.28), получаем формулу, определяющую безразмерный градиент давления

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{12\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\alpha\right)}{(1+bt)^4\,\mathrm{ctg}\alpha - 2(1+bt)^3(\xi_1 - \mathrm{t})}. \tag{7.29}$$

Из сравнения (7.27) и (7.21) последнее выражение может быть записано более компактном и наглядном виде:

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{12\overline{\upsilon}}{(1+bt)^2}. \tag{7.30}$$

Подставляя выражение (7.29) в (7.27), мы находим выражение, определяющее распределение скоростей при течении жидкости в соосном коническом конфузоре

$$\upsilon = \frac{6\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\alpha\right)\left[\chi^2 - (1+bt)\chi\right]}{(1+bt)^4\,\mathrm{ctg}\alpha - 2(1+bt)^3(\xi_1 - t)}. \tag{7.31}$$

Решение для распределения безразмерного давления получим, проинтегрировав выражение (7.29) с начальным условием (7.18), т.е. вычисляя интеграл в выражении

$$\Pi(t)=12(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)\int\frac{dt}{(1+bt)^4\operatorname{ctg}\alpha-2(1+bt)^3(\xi_1-t)}. \qquad (7.32)$$

Для выполнения интегрирования в (7.32) сделаем замену переменной

$$z=1+bt, \qquad (7.33)$$

что позволит записать (7.32) в виде

$$\Pi(z)=12(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)\int\frac{dz}{z^3(\alpha z-d)}, \qquad (7.34)$$

где $a=b\operatorname{ctg}\alpha+2;\ d=2(b\xi_1+1)$.

Выполняя интегрирование в (7.34), получим

$$\int\frac{dz}{z^3(az-d)}=-\frac{1}{2dz^2}-\frac{a}{d^2z}-\frac{a^2}{d^3}\ln\left|\frac{d-az}{z}\right|+C, \qquad (7.35)$$

где C – постоянная интегрирования.

Возвращаясь к старой переменной t, перепишем (7.35) в виде

$$\Pi(t)=-12(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)\left\{\frac{1}{2d(1+bt)^2}+\frac{b}{d^2(1+bt)}+\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{d^3}\ln\left|\frac{d-b(1+bt)}{1+bt}\right|\right\}+C. \qquad (7.36)$$

Определяя константу интегрирования с помощью начального условия (7.18), получим выражение, определяющее распределение безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале

$$\Pi(t)=\frac{3(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)}{(1+b\xi_1)}\left\{\frac{(2+b\operatorname{ctg}\alpha)^2}{2(1+b\xi_1)^2}\ln\frac{2(\xi_1-t)-(1+bt)\operatorname{ctg}\alpha}{(1+bt)(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)}-\right.$$
$$\left.-\frac{bt}{1+bt}\left(\frac{2+bt}{1+bt}+\frac{2+b\operatorname{ctg}\alpha}{1+b\xi_1}\right)\right\}. \qquad (7.37)$$

Таким образом, мы получили решение задачи (7.14)–(7.16), (7.18), (7.19), и им являются выражения (7.29), (7.31) и (7.37).

Заметим, что если в (7.37) положить $\alpha = 90°$, то получим выражение, описывающее распределение безразмерного давления при конфузорном течении между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной плоскости, и вершиной, не лежащей на последней

$$\Pi = \frac{6\xi_1}{1+b\xi_1}\left\{\frac{2}{(1+b\xi_1)^2}\ln\frac{\xi_1 - t}{(1+bt)\xi_1} - \frac{bt}{1+bt}\left(\frac{2+bt}{1+bt} + \frac{2}{1+b\xi_1}\right)\right\}. \quad (7.38)$$

Легко видеть, что, если в (7.31), (7.37), (7.21) положить $b = 0$, мы получим решение задачи медленного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины (см. главу 5):

$$\upsilon = \frac{6(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)(\chi - \chi^2)}{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha}; \quad (7.39)$$

$$\Pi = \frac{6(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)}{\sin\alpha}\ln\frac{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}; \quad (7.40)$$

$$\overline{\upsilon} = \frac{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha}. \quad (7.41)$$

Если записать граничное условие (7) в виде

$$\upsilon = 0,\ \chi = \chi_{0i}, \quad (7.42)$$

где $\chi_{0i} = 1 + bt_i$, а $t_i = \frac{\xi_1 - \xi_0}{M}$, $i = 0, 1, \ldots M$, M – число ступеней (рис. 4.7), то можно получить выражение для расчета безразмерного давления с помощью ступенчатой аппроксимации

$$\Pi = \frac{6(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)}{\sin\alpha}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\chi_{0i}^3}\ln\frac{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \chi_{0i}\cos\alpha}{2\xi_1 \sin\alpha - \chi_{0i}\cos\alpha}. \quad (7.43)$$

7.4. Анализ ползущего конфузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины с границами без общей вершины

Мнящие суть в не-сути и видящие не-суть в сути, они никогда не достигнут сути, ибо их удел ложные намерения. Мнящие суть за суть и не-суть за не-суть, они достигнут сути, ибо их удел – истинные намерения.

Дхаммпада

Рассмотрим основные закономерности и особенности конфузорного течения при различных значениях параметра b и произвольных углах α.

Из выражений (7.21) и (7.22) видно, что при отрицательном значении b средняя безразмерная скорость жидкости $\bar{v}$ при конфузорном течении будет увеличиваться вдоль канала. Для положительных значений параметра b функция $\bar{v}(t)$ может иметь немонотонный характер изменения в пределах канала. Действительно, из условия $\frac{d\tilde{s}}{dt} = 0$ получим значение координаты t, при которой площадь поперечного сечения канала имеет максимальную величину

$$t_m = \frac{(b\xi_1 - 1)\sin\alpha - b\cos\alpha}{b(2\sin\alpha + b\cos\alpha)}. \qquad (7.44)$$

Очевидно, если t_m находится в пределах канала, т.е. при $0 < t < \xi_1 - \xi_0$, функция $\bar{v}(t)$ – немонотонна. Для практически интересных геометрических размеров канала значение b, как правило, удовлетворяет условию $b < \mathrm{tg}\alpha$, и тогда для t_m получаем оценку ее величины $t_m \approx \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$, т.е. практически для всех случаев $t_m < 0.5\xi_1$.

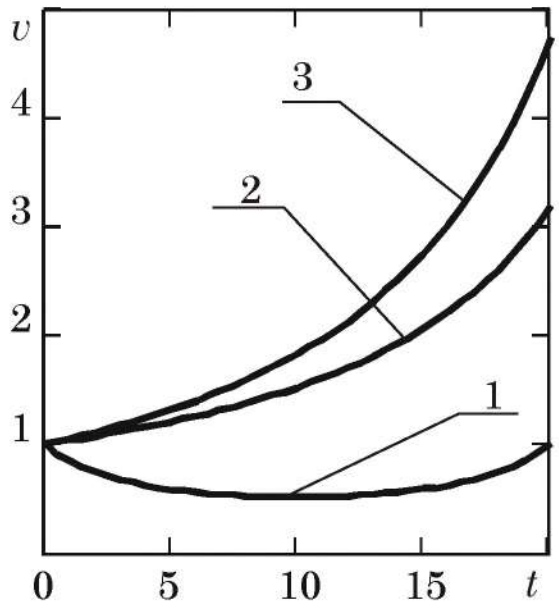


Рис. 7.2. Распределение безразмерной средней по поверхности поперечного сечения скорости жидкости вдоль течения: 1 – в канале при $b = 0.231$; 2 – при $b = 0$; 3 – $b = -0.017$.

Для течения в соосном коническом конфузоре с размерами (рис. 7.1) $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$, $\alpha_1 = 43°$ параметр $b > 0$ и равен $b = 0.231$. В этом случае максимальное значение площади поперечного сечения канала соответствует координате $t_m = 9.974$, поэтому функция $\bar{v}(t)$ является немонотонной в пределах канала (рис. 7.2). В начале течения, в этом случае, ширина канала увеличивается, увеличивается и площадь его поперечного сечения (рис. 7.3), поэтому скорость жидкости здесь уменьшается

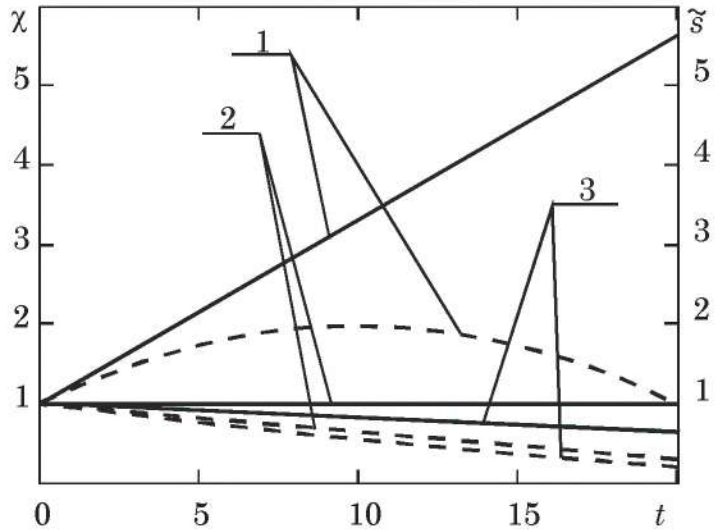


Рис. 7.3. Изменение вдоль канала безразмерной ширины канала – сплошные линии и безразмерной площади поперечного сечения – штриховые линии: 1 – для $b = 0.231$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = -0.017$.

(рис. 7.2, 7.4а). На безразмерном расстоянии t_m от входа в канал площадь его поперечного сечения достигает максимальной величины, а средняя скорость – минимальной, и далее вдоль течения она будет увеличиваться (рис. 7.2, 7.4а). При конфузорном течении в канале постоянной ширины площадь его поперечного сечения только уменьшается (рис. 7.3), а вследствие этого скорость жидкости вдоль течения растет (рис. 7.2, 7.4б).

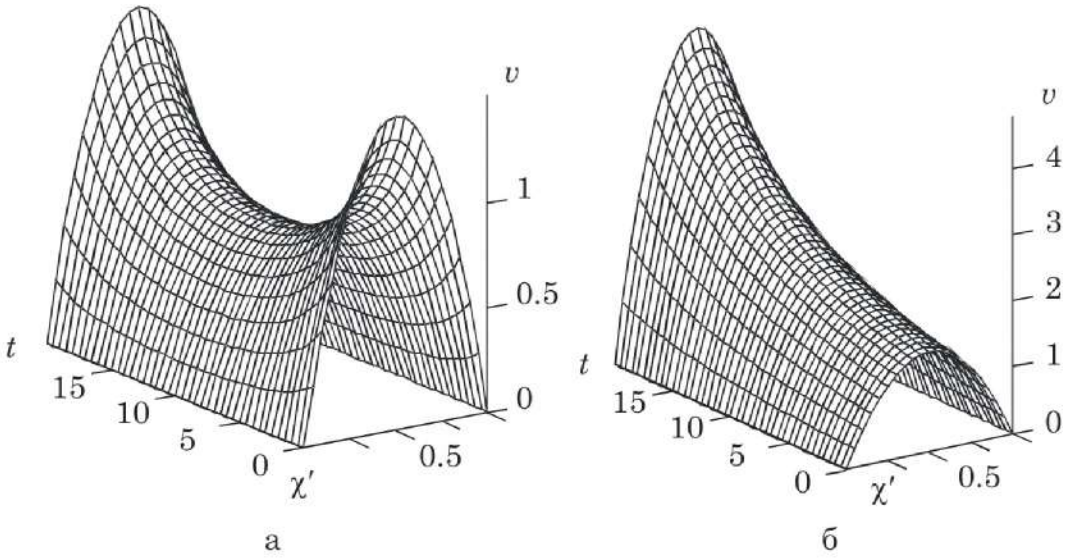


Рис. 7.4. Распределение безразмерной скорости жидкости при конфузорном течении в соосном коническом канале: а – с увеличивающейся шириной при b = 0.231; б – в канале постоянной ширины (b = 0).

При конфузорном течении в соосном коническом канале с полууглом раскрытия внутренней поверхности α_1 = 29° и прежними остальными геометрическими размерами, параметр b = -0.017. В этом случае с уменьшением ширины канала вдоль течения его поперечное сечение монотонно уменьшается (рис. 7.3), и скорость жидкости только увеличивается (рис. 7.2, 7.5). Величина скорости в данном случае будет превосходить значение скорости в ранее рассмотренных геометриях канала вследствие более значительного уменьшения поперечного сечения канала вдоль течения (рис. 7.5). Заметим, что между областями определения скорости на рисунках

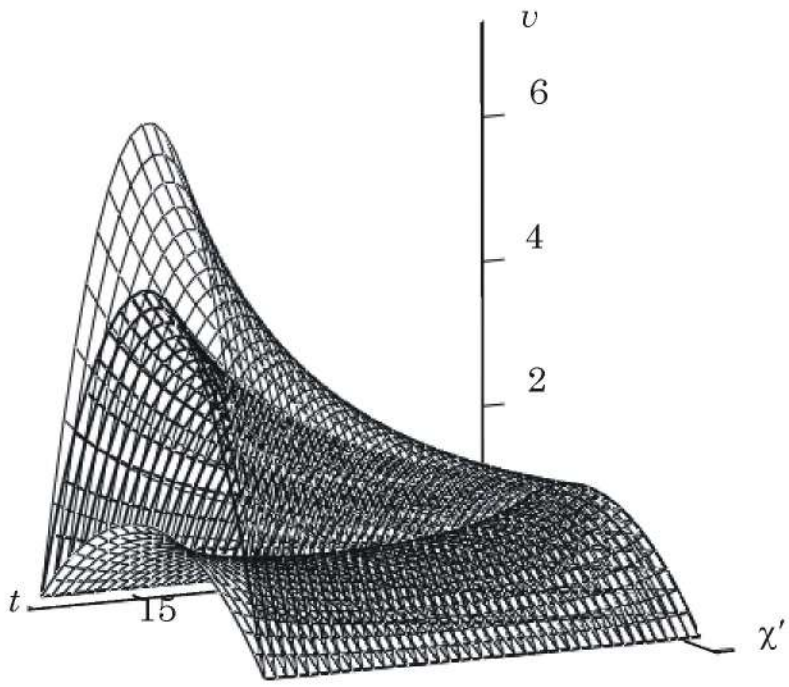


Рис. 7.5. Сравнение распределений безразмерных скоростей жидкости при конфузорном течении в соосных конических каналах для разных значений параметра b. Нижняя поверхность для $b = 0.231$; средняя для $b = 0$; верхняя – $b = -0.017$.

7.1, 7.4, и 7.5 существует изоморфное соответствие, задаваемое преобразованием

$$t' = t, \chi' = \frac{\chi}{1+bt}. \tag{7.45}$$

Изменения в поперечном распределении скорости жидкости, соответствующие изменению ширины канала вдоль течения, показаны на рисунке 7.6.

Модуль градиента давления $\left|\frac{d\Pi}{dt}\right|$ при течении в канале постоянной ширины увеличивается вдоль течения вследствие увеличения скорости (7.30) (рис. 7.7). В случае течения с увеличивающейся шириной канала при $b = 0.231$ модуль градиента давления в начале канала с уменьшением скорости течения уменьшается (рис. 7.7), но вблизи выхода из канала возрастает из-за увеличения

средней скорости жидкости. Однако, несмотря на то, что средние скорости течения жидкости на входе в канал и выходе из него практически равны (рис. 7.2), абсолютная величина градиента давления на выходе из канала значительно меньше, чем на входе в него (рис. 7.7).

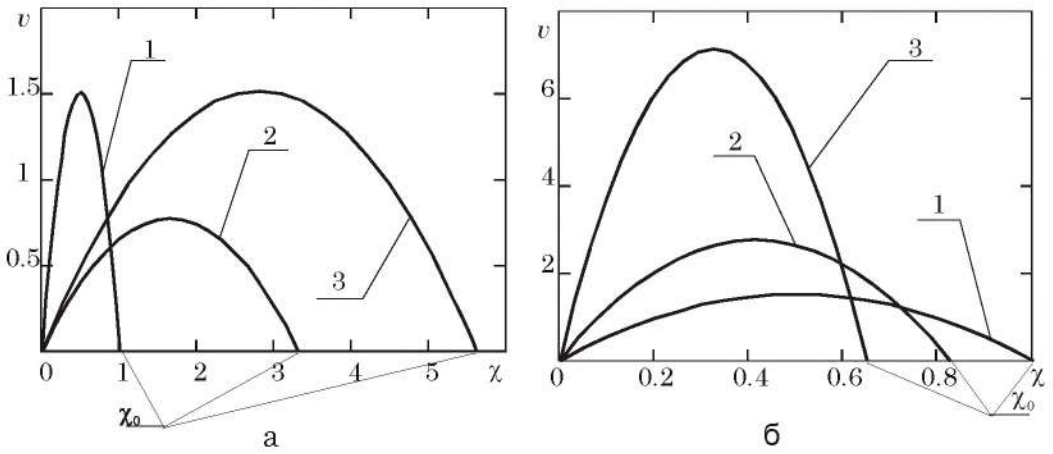


Рис. 7.6. Изменение распределения безразмерной скорости вдоль канала: а – для течения в канале с $b = 0.231$; б – $b = -0.017$; 1 – распределение для $t = 0$; 2 – $t = 10$; 3 – $t = 20$; χ_0 – координата внутренней границы канала.

Поскольку градиент безразмерного давления полностью

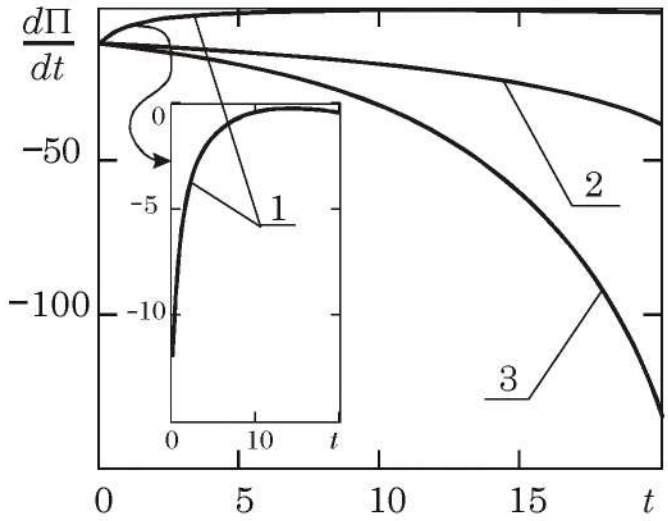


Рис. 7.7. Распределение безразмерного градиента давления вдоль течения: 1 – в канале с $b = 0.231$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = -0.017$.

определяется величиной безразмерной средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости и значением ширины канала (7.30), что можно также записать как

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{12}{\tilde{s}(1+bt)^2}, \tag{7.46}$$

т.е. при ползущем течении в соосном коническом конфузоре распределение градиента безразмерного давления полностью определяется геометрией канала. В рассматриваемом случае при $b = 0.231$ безразмерные средние по площади поперечного сечения канала скорости на входе в канал и выходе из него равны (рис. 7.2), поскольку равны площади поверхностей поперечного сечения (рис. 7.3), а ширина канала на выходе больше, поэтому-то $\left|\frac{d\Pi}{dt}\right|$ на выходе из канала меньше, чем на входе в канал. И вследствие того, что $\bar{v}(t)$ является немонотонной функцией, то при $b > 0$ функция $\frac{d\Pi(t)}{dt}$ также может быть, как мы ранее выяснили, немонотонной. Локализация максимума градиента давления можно определить из условия

$$\frac{d^2\Pi}{dt^2} = 0, \tag{7.47}$$

что приводит к выражению

$$t_{\Pi'} = \frac{b(3\xi_1 - 2\operatorname{ctg}\alpha) - 1}{b(4 + 2b\operatorname{ctg}\alpha)}. \tag{7.48}$$

В рассматриваемом случае $t_{\Pi'} = 17.127$.

Значение параметра b, начиная с которого функция $\frac{d\Pi(t)}{dt}$ становится немонотонной в пределах канала, определим из условия $t_{\Pi'} = 0$

$$b_{\Pi'} = \frac{1}{3\xi_1 - 2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{7.49}$$

Более физическое объяснение немонотонности распределения градиента давления вдоль канала при $b \geq b_{\Pi'}$ можно получить при его определении через напряжение сдвига на стенках канала. Действительно, скорость сдвига на стенках (рис. 7.6) и смачиваемый периметр (рис. 7.1) вблизи выхода из канала меньше, чем на входе в канал, площади поперечного сечения практически равны (рис. 7.3), а градиент безразмерного давления можно оценить как

$$\frac{d\Pi}{dt} \sim -\left|\frac{\partial v}{\partial \chi}\right|_{\chi=0} \frac{\mathrm{per}}{\tilde{s}}, \tag{7.50}$$

где смачиваемый периметр определен в (6.67)

$$\mathrm{per} = 2\pi\{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - (1+ bt)\cos\alpha\}. \tag{7.51}$$

Точное выражение (7.50) можно получить с помощью распределения безразмерной скорости (7.31), определяя модуль безразмерной скорости сдвига на границах канала

$$\left|\dot{\gamma}_\Gamma\right| = \left|\frac{\partial v}{\partial \chi}\right|_{\substack{\chi=0 \\ \xi=1+bt}} = \left|\frac{6\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}{(1+bt)\left[(1+bt)\mathrm{ctg}\,\alpha - 2(\xi_1 - t)\right]}\right| = \frac{6\bar{v}}{1+bt}, \tag{7.52}$$

и тогда получим

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{2\left|\dot{\gamma}_\Gamma\right|}{1+bt}. \tag{7.53}$$

Более детально распределение скорости сдвига в соосных конических конфузорах будет изучено далее при рассмотрении течений со значимыми инерционными свойствами.

При течении в канале с увеличивающейся шириной абсолютная величина градиента давления на протяжении всего канала меньше, чем при течении в канале постоянной ширины. Поэтому и падение давления вдоль течения в случае с $b = 0.231$ значительно меньше, чем при $b = 0$ (рис. 7.8).

На рис. 7.8а представлена также зависимость $\Pi(t)$, рассчитанная с помощью ступенчатой аппроксимации (7.43). Видно, что результаты, полученные с помощью (7.43) и (7.37), хорошо согласуются. Это наблюдается для всех практически интересных размеров канала.

В случае течения в соосном коническом конфузоре со значением $b \le b_{\Pi}$ модуль градиента давления будет только увеличиваться. Можно также выделить течение с $b < 0$, когда средняя скорость жидкости вдоль канала увеличивается более значительно, чем в ранее рассмотренных случаях, скорость сдвига на стенках канала также будет иметь большее значение. Поэтому абсолютная величина градиента давления здесь растет более существенно, чем в рассмотренных течениях (рис. 7.7). Вследствие этого и перепад давления вдоль канала имеет большую величину (рис. 7.8б).

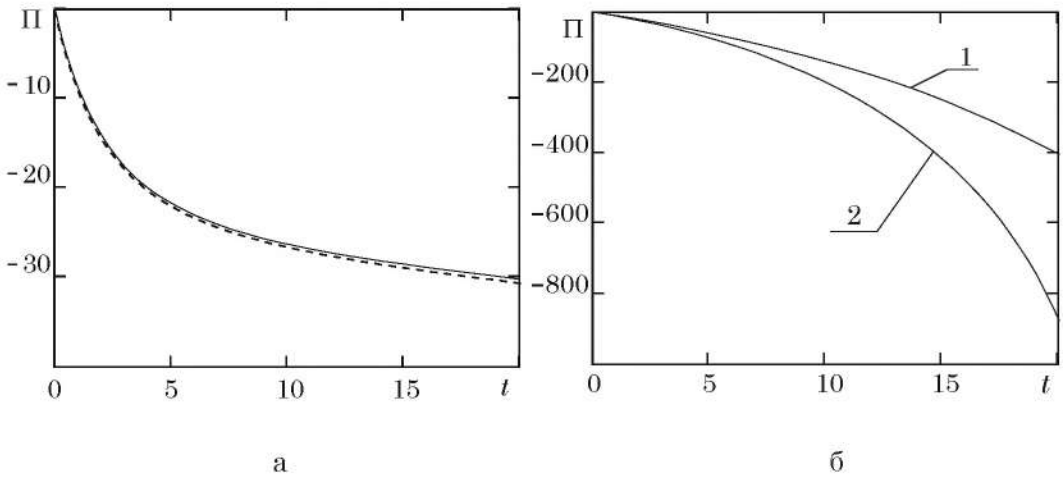


Рис. 7.8.Распределение безразмерного давления вдоль течения: а – в канале с увеличивающейся шириной при $b = 0.231$. Сплошная линия получена с помощью выражения (7.37), штриховая – (7.43); б – в канале при $b = 0$ – 1 и 2 – при $b = -0.017$.

7.5. Приближенное решение задачи ползущего конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной

Мелькнет моя чалма – ударь коня без страха
И, шпоры дав, лети, – лишь призови аллаха!
А не мелькнет – вернись: тут людям нет пути!

А. Мицкевич

Полученные нами выражения (7.29), (7.31) и (7.37) определяют решение поставленной задачи практически во всем диапазоне

изменения ее параметров за исключением одного значения параметра b, при котором выражение (7.37) обращается в бесконечность. Это возможно, когда в (7.37) знаменатель обращается в 0, т.е. при значении

$$b = -\frac{1}{\xi_1}. \tag{7.54}$$

Как видно из рис. 7.9 данное значение b соответствует случаю, когда соосный конический конфузор формируется коническими поверхностями, имеющими общую вершину.

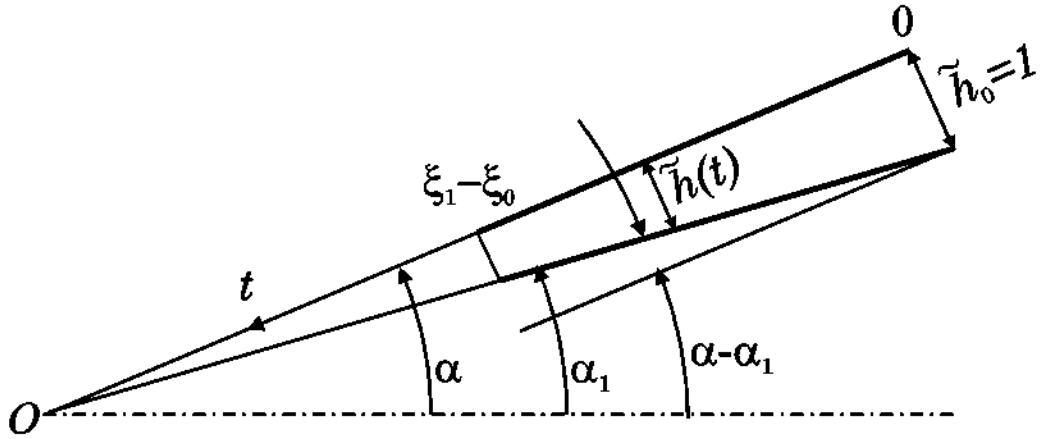


Рис. 7.9. Геометрические параметры соосного конического конфузора с общей вершиной границ: O – вершина конических границ; $\tilde{h}_0$ – безразмерная ширина канала на входе; α, α_1 – полууглы раскрытия внешней и внутренней границ канала.

В главе 3 нами было получено точное решение задачи ползущего конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной (3.17), (3.32) и (3.36) в сферической системе координат, но аналогично решениям, полученным для диффузорного течения в таких каналах, мы можем рассмотреть конфузорное течение в биконических координатах и получить более удобные для приближенных вычислений выражения.

Здесь мы могли бы поступить также, как и при рассмотрении диффузорного решения, т.е. получить решение из решения задачи

ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины, образованных коническими поверхностями, не имеющими общей вершины. Но постановка задачи ламинарного течения в соосных конических каналах, имеющих границы с общей вершиной, для ее рассмотрения в биконических координатах имеет самостоятельный интерес, поэтому мы ее кратко здесь рассмотрим.

Заметим, что решение в главе 3 получено в сферических координатах, в которых границами канала являются координатные поверхности, что полностью учитывает кривизну поверхностей канала и их изменение вдоль течения. В настоящем исследовании течения в биконических координатах мы кривизну поверхности канала и ее изменение вдоль течения учтем с помощью условия постоянства расхода, эквивалентного уравнению неразрывности.

Из соотношений (7.17) и (7.54) получаем выражение для определения безразмерной ширины канала вдоль течения

$$\tilde{h}(t) = 1 + bt = \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\xi_1 - t}{\xi_1}. \tag{7.55}$$

Вычисление изменения безразмерной площади поперечного сечения производится аналогично вычислению по выражениям (7.9), (7.20), в которых в качестве безразмерного верхнего предела интегрирования взято значение $\tilde{h} = \dfrac{\xi_1 - t}{\xi}$, что приводит к выражению

$$\tilde{s} = \left(\frac{\xi_1 - t}{\xi_1}\right)^2 = \tilde{h}^2, \tag{7.56}$$

вследствие чего средняя по поперечному сечению канала безразмерная скорость (7.21) определится как

$$\overline{v} = \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{h}^2}. \tag{7.57}$$

Мы видим, что формально зависимости (7.56) и (7.57) совпадают с аналогичными зависимостями, полученными при решении течения в сферических координатах (3.14), (3.16).

Уравнение движения в принятых допущениях останется прежним, т.е. (7.14), а граничные условия примут вид:

$$\upsilon = 0, \quad \chi = 0; \tag{7.58}$$

$$\upsilon = 0, \quad \chi = 1 + bt = \frac{\xi_1 - t}{\xi_1}; \tag{7.59}$$

$$\Pi = 0, \quad t = 0. \tag{7.60}$$

Уравнение постоянства расхода запишется как

$$\int_0^{\frac{\xi_1 - t}{\xi_1}} \left[(\xi_1 - t) - \chi \operatorname{ctg}\alpha \right] \upsilon d\chi = \frac{1}{2}\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right). \tag{7.61}$$

Решая уравнение (7.14) с условиями (7.58) и (7.59), получим

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\left(\chi^2 - \tilde{h}\chi\right) = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt}\left(\chi^2 - \frac{\xi_1 - t}{\xi_1}\chi\right). \tag{7.62}$$

Подставляя выражение для определения скорости υ (7.62) в (7.61), находим выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления в канале

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{12\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^4} = -12\overline{\upsilon}^2 = -\frac{12}{\tilde{h}^4}. \tag{7.63}$$

Подставляя (7.63) в (7.62), найдем выражение, определяющее распределение безразмерной скорости в рассматриваемом канале

$$\upsilon = 6\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4 \left[\left(\frac{\xi_1 - t}{\xi_1}\right)\chi - \chi^2\right] = \frac{6}{\tilde{h}^4}\left(\chi h - \chi^2\right). \tag{7.64}$$

Интегрируя (7.63) с условием (7.60), получаем распределение безразмерного давления в канале

$$\Pi = 4\xi_1\left[1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right] = 4\xi_1\left[1-\frac{1}{\tilde{h}^3}\right]. \qquad (7.65)$$

В полученном решении содержится только один постоянный параметр задачи – ξ_1, который однозначно определяется разностью полууглов раскрытия внешней конической поверхности и внутренней

$$\xi_1 = \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1). \qquad (7.66)$$

Очевидно, что (7.66) справедливо только при выбранном линейном масштабе, в котором безразмерная ширина канала на входе всегда будет равна единице.

Подставляя (7.66) в (7.65), получим для распределения безразмерного давления в канале

$$\Pi = 4\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)\left\{1-\left[\frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1) - t}\right]^3\right\}. \qquad (7.67)$$

7.6. Анализ ползущего конфузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной границ в биконической системе координат

Постигнутое сразу же рационально ведет к новым возможностям.

К. Ясперс

Если в (7.67) перейти от переменной t к переменной ξ, то мы увидим, что выражение, определяющее распределение безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной

$$\Pi = 4\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)\left\{1-\left[\frac{\operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1)}{\xi}\right]^3\right\}, \qquad (7.68)$$

и при диффузорном течении (6.99) совпадают с точностью до знака, и понятно, что должны выполняться следующие условия:

– для конфузорного течения

$$\xi \le \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1) \tag{7.69}$$

– для диффузорного течения

$$\xi \ge \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_1). \tag{7.70}$$

Распределение скорости при конфузорном (7.64) и диффузорном течении в канале будет совпадать с точностью до отношения масштабных множителей. Но задача конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном поверхностями с общей вершиной, может представлять самостоятельный интерес, поэтому мы далее сравним полученное здесь решение с решением, полученным ранее в сферических координатах, глава 3. Для этого запишем в одинаковом масштабе выражение для определения скорости в канале. По аналогии с (3.3) и (3.12) запишем распределение площади поверхности поперечного сечения канала в сферических координатах

$$S_s = 2\pi h_0^2 (\xi_1 - t)^2 (\cos\alpha_1 - \cos\alpha), \tag{7.71}$$

а в биконических координатах вычислим это решение с помощью интегрирования

$$S_b = \pi \int_0^{(R_1 - T)\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1)} \left[(R_1 - T)\sin\alpha - \chi\cos\alpha \right] d\chi =$$

$$= \pi (R_1 - T)^2 \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1) \left[2\sin\alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1)\cos\alpha \right]. \tag{7.72}$$

И, учитывая соотношение (7.66) из (7.72), получим

$$S_b = \pi h_0^2 \left(\frac{\xi_1 - t}{\xi_1} \right)^2 (2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha). \tag{7.73}$$

Очевидно, что распределение относительного отклонения (7.73) от (7.71) будет совпадать с (6.94) при замене переменных ξ на t. Для того, чтобы привести значения скорости, найденные при ре-

шении задачи в сферических координатах, необходимо их умножить на отклонение масштаба скорости, принятого в сферических координатах к масштабу, который мы использовали при решении задачи в биконической системе координат

$$V_{Sb} = V_S \cdot \frac{V_{0s}}{V_{0b}} = V_S \frac{S_b(0)}{S_s(0)} = V_S \frac{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi_1^2(\tau_1 - \tau_0)}. \qquad (7.74)$$

Сравнивать распределение скоростей (7.74) и (7.64) будем на поверхностях поперечного сечения, образованных сферическими

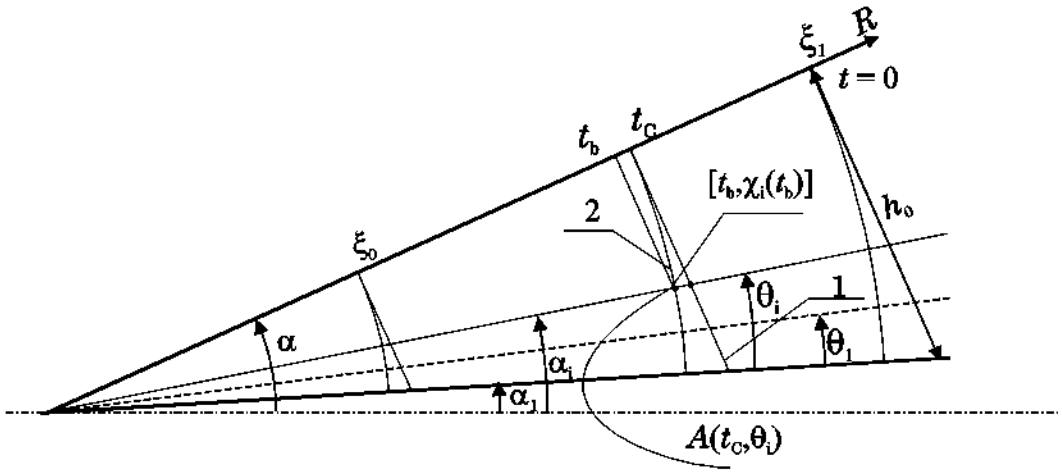


Рис. 7.10. Геометрические параметры соосного конического конфузора с общей вершиной границ: 1 – проекция поперечного сечения канала координатной поверхностью в биконических координатах; 2 – проекция поперечного сечения канала координатной поверхностью в сферической системе координат.

координатными поверхностями (рис. 7.10). Для того, чтобы вычислить значение скорости по (7.64) в сферических координатах, необходимо сделать замену переменных, и тогда в соответствии с рисунком 7.10 будем иметь:

$$t_b = \xi_1 - (\xi_1 - t_s)\cos(\alpha - \theta); \qquad (7.75)$$

$$\chi_b = (\xi_1 - t_s)\sin(\alpha - \theta), \qquad (7.76)$$

где $\theta = \arccos\tau$.

Сравнение распределения безразмерной скорости, полученных при решении задачи ламинарного конфузорного течения в со-

осном коническом канале с геометрическими параметрами $\alpha_1 = 10°$, $\alpha = 20°$, $\xi_0 = 1.244$, $\xi_1 = 3.73$ в биконических координатах (7.64) и в сферических (7.74), дает хорошее согласие (рис. 7.11). Оба распределения несимметричны относительно серединной поверхности канала. Причины несимметричности квадратичного распределения (7.64) были рассмотрены при анализе диффузорного течения в соосном коническом канале в главе 6 (см. раздел 6.8). Здесь следует заметить, что область определения на рис. 7.11 связана с областью определения, которую задают преобразования (7.75) и (7.76) взаимооднозначным соответствием:

$$t' = t_b; \quad \chi' = \frac{\chi_b \xi_1}{\xi_1 - t}. \tag{7.77}$$

Величина относительного отклонения значений скорости, вычисленных по (7.64) от величин (7.74) практически не превышает 5 % в пределах всего рассматриваемого канала (рис. 7.12).

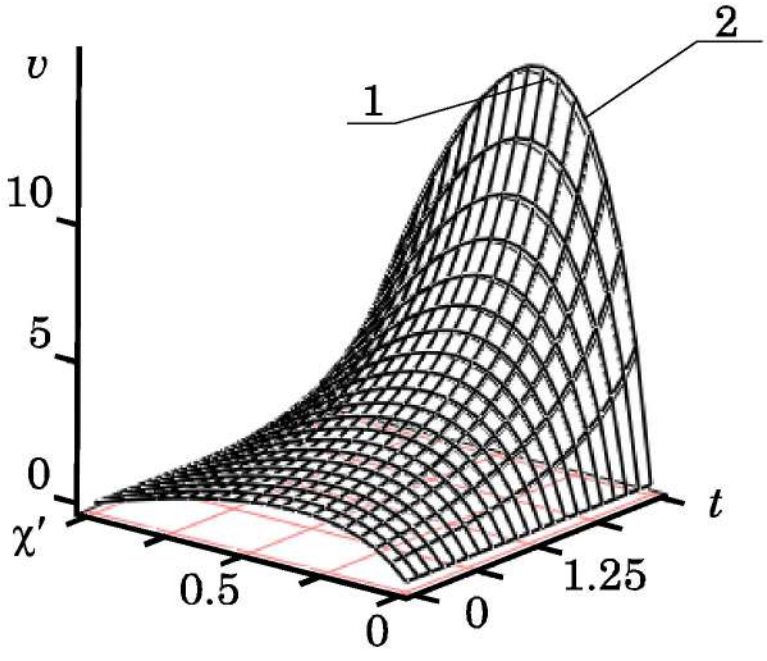


Рис. 7.11. Распределение безразмерной скорости в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ: 1 – 1 распределение, полученное при решении задачи в сферической системе координат; 2 – в биконической системе координат.

Сравним распределение безразмерных давлений, полученных при решении исследуемой задачи в биконических координатах (7.67) и в сферических (3.32), которое при выборе в качестве линейного масштаба величины h_0, записывается в виде

$$\bar{\Pi}(t)=\frac{\lambda_C+6\xi_1^2}{3\xi_1^3}\left[1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_1-t}\right)^3\right], \qquad (7.78)$$

где величина λ определяется выражением (3.26).

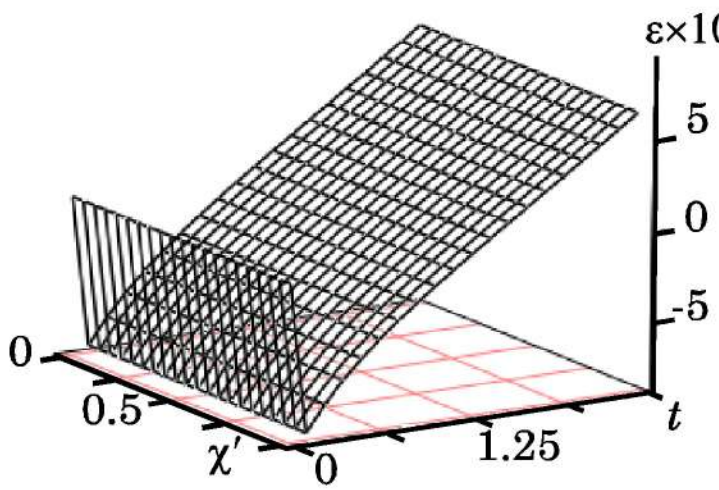


Рис. 7.12. Распределение относительного отклонения скорости в соосном коническом конфузоре, полученной при решении задачи в биконических координатах от скорости полученной при решении задачи в сферических координатах.

Распределение (7.67) и (7.78) практически совпадает в исследованных технически интересных вариантах каналов. Для уже выбранных размеров канала относительное отличие (7.67) от (7.78) составляет ~ 2 % (рис. 7.13).

Интересно заметить, что согласие между безразмерными давлениями в биконических и сферических координатах, приведенных к одному масштабу, несколько хуже, чем между (7.67) и (7.78).

Если же мы модернизируем зависимость (7.78) аналогично тому, как это мы делали в главе 6, и запишем ее в виде

$$\bar{\Pi}(t)=\frac{\lambda_C+6\xi_1}{3\xi_1^3}\left[1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_1-t}\right)^3\right], \qquad (7.79)$$

то относительное отклонение между (7.67) и (7.79) не превысит 0.5 %, а это в свою очередь позволяет получить простое выражение для определения значения постоянной разделения λ в случае решения задачи конфузорного ламинарного течения в соосном коническом канале. Приравнивая (7.67) и (7.79), получаем выражение для определения λ

$$\lambda_C = 12\xi_1^4 - 6\xi_1 . \qquad (7.80)$$

Выражение (7.80) аналогично выражению (6.110), но при использовании этих выражений для определения λC необходимо иметь в виду, что (7.80) получено при обезразмеривании по вели-

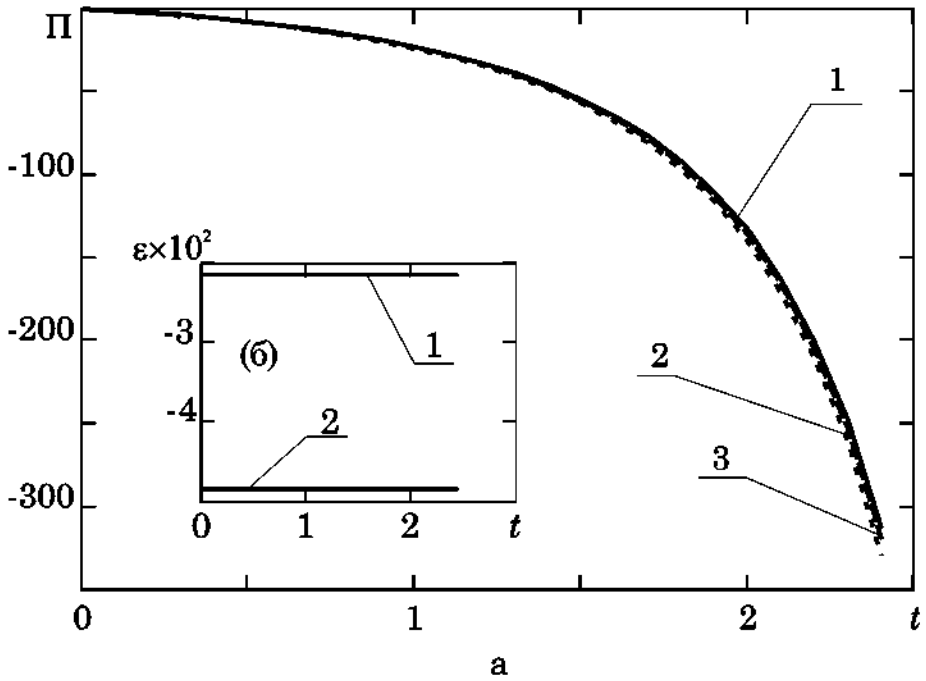


Рис. 7.13. Распределение безразмерного давления вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ – а: 1 – значения, полученные при решении задачи в биконической системе координат; 2 – зависимость, полученная в сферической системе координат и представленная в масштабе, принятом при решении задачи в биконических координатах; 3 – зависимость, полученная при решении задачи в сферической системе координат; б) 1 – относительное отклонение зависимости 1 (рис. 7.13а) от зависимости 3; 2 – относительное отклонение зависимости 1 (рис. 7.13а) от зависимости 2.

чине h_0, которое является шириной конфузора на его входе, т.е. при $\xi = \xi_1$, а при вычислении λ по (6.95) в качестве линейного масштаба выбиралась ширина диффузора на его входе, т.е. при $\xi = \xi_0$

Из рисунка 7.13 видно, что относительное отклонение между выражениями (7.78) и (7.67) не превышает 3 %. Поэтому мы можем их использовать для оценки величины λ_C. Приравнивая эти два выражения, получаем для λ_C

$$\lambda_C = 12\xi_1^4 - 6\xi_1^2. \qquad (7.81)$$

Последнее выражение дает несколько худшее приближение для расчетов, но использование его для оценки различных параметров, как правило, более удобно.

Заметим, что в случае конфузорного течения приближение (7.81) в большом диапазоне изменения параметров θ_1, θ_2 и ξ_1 дает точность определения λ_C не хуже, чем выражение (7.80), поэтому выражение (7.81) можно использовать в любых вычислениях и оценках.

ГЛАВА 8

АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ГРАНИЦ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ

Все формы энергии обладают инерцией.
А. Эйнштейн

8.1. Краткое замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических каналах с учетом инерционных свойств

Ты едва ли былых мудрецов превзойдешь,
Вечной тайны разгадку едва ли найдешь.
О. Хайам

Мы уже отмечали, что первой работой, в которой рассматривалось ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале, образованном круглыми коническими поверхностями с общей вершиной, является работа Н.А. Слезкина [111]. В этой работе показана возможность решения указанной задачи с полным учетом действия инерционных сил, возникающих при течении в конических каналах, но в значительной мере результаты работы [111] носят качественный характер и не могут быть использованы при расчетах технических устройств и анализа течения в них.

Автром данной монографии в работе [29] решены задачи стационарного ламинарного диффузорного и конфузорного течения несжимаемой ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ при частичном учете инерционных свойств течения. Следуя методу, представленному в работе [29], мы более детально проанализируем в настоящей главе ламинарное те-

чение ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной его границ, определим влияние инерционного члена при стационарном течении с малыми и умеренными значениями чисел Рейнольдса на перепад давления в канале и выясним пределы применимости решений, полученных для ползущих течений с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса в главах 2 и 3.

8.2. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ и частичном учетом инерционных свойств

Великое в веках бессмертием хранится
И не ему ничтожество – удел.

Н.И. Лобачевский

При изучении течения жидкости в соосных конических каналах необходимо иметь в виду одну существенную особенность, присущую практически всем течениям в конических каналах, за исключением некоторых особенных случаев, которые будут нами рассмотрены отдельно. Этой особенностью является изменение средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости жидкости вдоль течения вследствие изменения самой площади поверхности поперечного сечения канала. Поэтому практически всегда будет присутствовать действие инерционных сил на элемент жидкости, текущей вдоль конического канала, и вследствие этого инерционный член в уравнениях движения при таких течениях всегда будет отличен от нуля.

В настоящем разделе данной главы мы дадим математическую формулировку задачи ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и учетом инерционных свойств течения.

Геометрия соосного конического диффузора с общей вершиной границ представлена в главе 1 на рис. 1.5. Там же были выполнены оценки величины членов в уравнениях, описывающих тече-

ния несжимаемой ньютоновской жидкости в таких каналах. В результате, для осесимметричного стационарного течения жидкости в соосных конических диффузорах была записана, с учетом сделанных оценок и предложений, система уравнений гидродинамики в форме Озеена (1.5)–(1.7), с условиями однозначности, записанными в (1.8)–(1.11).

Для достижения целей, сформулированных в разделе 8.1 нам необходимо записать уравнения, описывающие течения (1.5)–(1.11) в безразмерном виде. Для этого используем безразмерные переменные и параметры, следующие непосредственно из указанных уравнений (2.3), которые для удобства читателей выпишем еще раз:

$$\xi = \frac{R}{h_0}; \upsilon = \frac{V_R}{V_0}; \ \Pi = \frac{(P - P_0)h_0}{\mu V_0}; \tau = \cos\theta; \ \mathrm{Re} = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}, \qquad (8.1)$$

где Re – число Рейнольдса, V_0 – средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной сферической поверхностью скорость, определенная выражением (2.2), h_0 – ширина канала на его входе, определенная в разделе 2.2 (см. рис. 2.1).

Далее следуя методу, изложенному в разделе 2.2, запишем систему уравнений (1.5)–(1.11) в безразмерных величинах (8.1):

$$\mathrm{Re}\,\bar{\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}\right] - \frac{2\upsilon}{\xi^2}; \qquad (8.2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{2}{\xi}\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}; \qquad (8.3)$$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \upsilon\right) = 0; \qquad (8.4)$$

$$\upsilon = 0, \quad \tau = \tau_1; \qquad (8.5)$$

$$\upsilon = 0, \quad \tau = \tau_2; \qquad (8.6)$$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Pi d\tau; \qquad (8.7)$$

$$\bar{\Pi} = 0, \quad \xi = \xi_0. \qquad (8.8)$$

Для решения поставленной задачи нам понадобится и условие постоянства расхода жидкости в любом поперечном сечении канала, которое в безразмерном виде было получено в главе 2 (см. 2.13). Для полноты формулировки задачи и удобства читателя запишем его еще раз в настоящем разделе

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} v d\tau = \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 (\tau_2 - \tau_1). \qquad (8.9)$$

8.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и частичным учетом инерционных свойств в сферической системе координат

Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики.

И. Кеплер

При течении в канале с малыми и умеренными числами Рейнольдса длина начального гидродинамического участка сравнима с шириной канала или меньше [132], поэтому мы можем пренебречь изменением параметров течения на начальном участке по сравнению с их изменением на всей длине канала. Но и в пределах начального гидродинамического участка изменение средней по поперечному сечению скорости будет следовать тому же закону, что и на всей длине канала, поэтому далее будем учитывать только инерционную силу, возникающую вследствие изменения площади поперечного сечения канала. И поскольку эта сила на всей длине канала возникает вследствие изменения средней в поперечном сечении скорости, мы в левой части уравнения (8.2) будем рассматривать безразмерную среднюю в поперечном сечении канала скорость жидкости, определенную соотношением (2.18), т.е. $\overline{v} = \xi_0^2/\xi^2$ и ее производную.

Тем самым мы распределенную по поперечному сечению инерционную силу, определяемую левой частью (8.2), заменяем на некоторую среднюю инерционную силу, определяющее выражение для которой мы получили в результате усреднения левой части (8.2) по площади поперечного сечения канала.

Вычисляя производную в левой части (8.2) и умножая результат на $\overline{v}$, запишем уравнение (8.2) в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - 2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi^5} = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial v}{\partial \tau}\right] - \frac{2v}{\xi^2}. \qquad (8.10)$$

Далее интегрируя уравнение неразрывности (8.4), получим для v выражение (2.19), которое для удобства читателя запишем еще раз

$$v = \frac{1}{\xi^2}u(\tau). \qquad (8.11)$$

Подставляя (8.11) в (8.10), получим уравнение

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - 2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi^5} = \frac{1}{\xi^4}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}\right]. \qquad (8.12)$$

Далее подставляя (8.11) в (8.3) и интегрируя получившееся уравнение по τ, определяем для безразмерного давления выражение

$$\Pi(\xi,\tau) = \frac{2}{\xi^3}u(\tau) + f(\xi), \qquad (8.13)$$

после дифференцирования которого по ξ, находим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -\frac{6}{\xi^4}u(\tau) + f'(\xi), \qquad (8.14)$$

и, наконец, после подстановки (8.14) в (8.12) получаем уравнение

$$\xi^4\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} - 2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi} = \left(1-\tau^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\tau\frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u, \qquad (8.15)$$

левая часть которого зависит только от ξ, а правая только от τ, т.е. мы получили уравнение с разделяющимися переменными, аналогичное уравнению (2.22), но с другой зависимостью левой части от ξ.

Понятно, что для выполнения равенства (8.15) необходимо, чтобы левая и правая части этого уравнения равнялись одной и той же постоянной величине, например -λ. В этом случае правая часть (8.15) для определения u дает неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (2.24), граничными условиями для которого остаются равенства (2.25), (2.26), т. к. они следуют из условий прилипания (8.5) и (8.6).

Очевидно, что функция $u(\tau)$, входящая в уравнение (8.15), будет определяться выражениями (2.35)–(2.37) и (2.42).

Из уравнения (8.15) определим производную от функции $f(\xi)$

$$f'(\xi) = 2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi^5} - \frac{\lambda}{\xi^4}. \tag{8.16}$$

Далее подставляя (8.16) в (8.14), получаем дифференциальное уравнение для определения распределения безразмерного давления П в канале

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = 2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi^5} - \frac{6}{\xi^4}u + \frac{\lambda}{\xi^4}. \tag{8.17}$$

Условие однозначности для определения безразмерного давления (8.8) записано для среднего по площади поверхности поперечного сечения канала безразмерного давления, и для того, чтобы им воспользоваться, усредним по площади поперечного сечения канала уравнение (8.17). Учитывая (2.13), (8.9) и (8.11), получаем выражение, определяющее производную среднего безразмерного давления вдоль течения

$$\frac{d\bar{\Pi}}{d\xi} = \frac{1}{2\pi\xi^2(\tau_1 - \tau_2)}\left\{\int_{\tau_1}^{\tau_2} -2\pi\xi^2\left[2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi^5} - \frac{6}{\xi^4}u + \frac{\lambda}{\xi^4}\right]\right\} = \tag{8.18}$$

$$= 2\mathrm{Re}\frac{\xi_0^4}{\xi^5} - \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi^4}.$$

Величину $\dfrac{d\bar{\Pi}}{d\xi}$ мы также будем, для краткости, иногда называть градиентом среднего безразмерного давления или просто градиентом давления.

Интегрируя (8.18) с условием (8.8), получим выражение, определяющее распределение безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления вдоль течения

$$\bar{\Pi}(\xi)=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1-\frac{\xi_0^4}{\xi^4}\right)+\frac{\lambda+6\xi_0^2}{3\xi_0^3}\left(\frac{\xi_0^3}{\xi^3}-1\right). \tag{8.19}$$

Здесь еще раз заметим, что если в качестве линейного масштабного множителя была выбрана ширина канала h_0, определенная на рисунке 2.1, то значение ξ_0 однозначно определяется разностью полууглов раскрытия граничных поверхностей (2.58), и тогда (8.18) и (8.19) запишутся как:

$$\frac{d\bar{\Pi}}{d\xi}=2\mathrm{Re}\frac{\mathrm{ctg}^4(\theta_2-\theta_1)}{\xi^5}-\frac{\lambda+6\mathrm{ctg}^2(\theta_2-\theta_1)}{\xi^4}; \tag{8.20}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}&=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1-\frac{\mathrm{ctg}^4(\theta_2-\theta_1)}{\xi^4}\right]+\\&+\frac{\lambda+6\mathrm{ctg}^2(\theta_2-\theta_1)}{3\mathrm{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}\left[\frac{\mathrm{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}{\xi^3}-1\right].\end{aligned} \tag{8.21}$$

Если в качестве линейного масштаба выбрать величину радиальной координаты входа в диффузор, тогда для безразмерного значения ξ_0 будем иметь $\xi_0 = 1$, и выражения, определяющие распределения безразмерных средних по площади поперечного сечения канала давления и его градиента, запишутся в виде:

$$\frac{d\bar{\Pi}}{d\xi}=\frac{2\mathrm{Re}}{\xi^5}-\frac{\lambda+6}{\xi^4}; \tag{8.22}$$

$$\bar{\Pi}(\xi)=\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\xi^4-1}{\xi^4}+\frac{\lambda+6}{3}\left(\frac{1-\xi^3}{\xi^3}\right). \tag{8.23}$$

Заметим, что если в выражениях (8.18)–(8.23) положить $\theta_1 = 0$, то мы получим решение задачи ламинарного, с частичным учетом инерционных сил, диффузорного течения между плоскостью и

конусом, вершина которого лежит на плоскости, а ось перпендикулярна к ней.

Поскольку распределение скорости при ламинарном диффузорном течении в соосных конических каналах с общей вершиной границ мы достаточно детально рассмотрели в разделе 2.4.1 второй главы, в настоящей главе мы основное внимание уделим анализу влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления (перепада давления) в канале.

8.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ

Нет такого исследования, которое в конце концов не сводились бы к проблеме чисел.

О. Конт

Определяющими параметрами задачи являются значение числа Re и величины полууглов раскрытия граничных поверхностей θ_1 и θ_2. Влияние полууглов раскрытия границ на основные характеристики течения в соосных конических диффузорах с общей вершиной границ при числе Рейнольдса равном нулю, т.е. при отсутствии инерционных сил, мы исследовали в главе 2.

Для выяснения характера влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления вдоль канала рассмотрим распределение $\bar{\Pi}$ в канале при различных значениях числа Рейнольдса. Анализировать течение будем с помощью решения, записанного в форме (8.20), (8.21), т.е. в качестве линейного масштаба выберем значение h_0.

Рассмотрим течение в диффузоре с полууглами раскрытия границ, равными $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$. В этом случае безразмерная радиальная координата входа в канал принимает значение $\xi_0 = 4.7$ (2.58), а для координаты выхода ξ_1 выберем значение в три раза большее, чем ξ_0, т.е. $\xi_1 = 3\xi_0$ или $\xi_1 \approx 14.1$.

Принимая во внимание выражение (2.59), определяющее зависимость от радиальной координаты средней по площади поверхности поперечного сечения скорости при течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ, перепишем выражения (8.20) и (8.21) в виде:

$$\frac{d\bar{\Pi}}{d\xi} = 2\mathrm{Re}\frac{\bar{v}^2}{\xi} - \frac{\lambda + 6\mathrm{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{\mathrm{ctg}^4(\theta_2 - \theta_1)}\bar{v}^2; \tag{8.24}$$

$$\bar{\Pi} = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1 - \bar{v}^2\right) + \frac{\lambda + 6\mathrm{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{3\mathrm{ctg}^3(\theta_2 - \theta_1)}\left(\bar{v}^{\frac{3}{2}} - 1\right). \tag{8.25}$$

Начнем с анализа распределения $\bar{\Pi}(\xi)$ при ламинарном течении с малыми числами Рейнольдса. Предположим, что Re = 5.

Даже при таком, в общем-то, небольшом числе Рейнольдса инерционная сила, возникающая в канале за счет изменения средней скорости течения вследствие изменения площади поверхности поперечного сечения вдоль течения, оказывает значительное влияние на распределение градиента среднего безразмерного давления (рис. 8.1).

Наибольшее отклонение безразмерного градиента давления, рассчитанного с учетом инерционных эффектов (8.24) от диссипативной его составляющей, т.е. градиента безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционной (динамической) составляющей (2.67), наблюдается вблизи входа в канал (рис. 8.1). Это происходит вследствие того, что здесь наибольшее значение имеет средняя скорость $\bar{v}$ (рис. 8.2) и наименьшее значение продольной безразмерной координаты ξ, и, поэтому, первый член в выражении (8.24) имеет наибольшую величину в пределах всего канала, а именно он отличает выражение (8.24) от (2.67).

Далее вниз по течению $\bar{v}$ уменьшается, и абсолютная величина диссипативной составляющей градиента давления уменьшается как $\bar{v}^2$, т.е. как $\frac{1}{\xi^4}$ (8.24), а уменьшение динамической составляющей $\bar{\Pi}_\xi$ происходит при росте ξ значительно интенсивнее, т.к.

изменение этой составляющей происходит пропорционально зависимости $\frac{1}{\xi^5}$, поэтому относительное отклонение между $\bar{\Pi}_\xi$ и его диссипативной составляющей уменьшается (рис. 8.1).

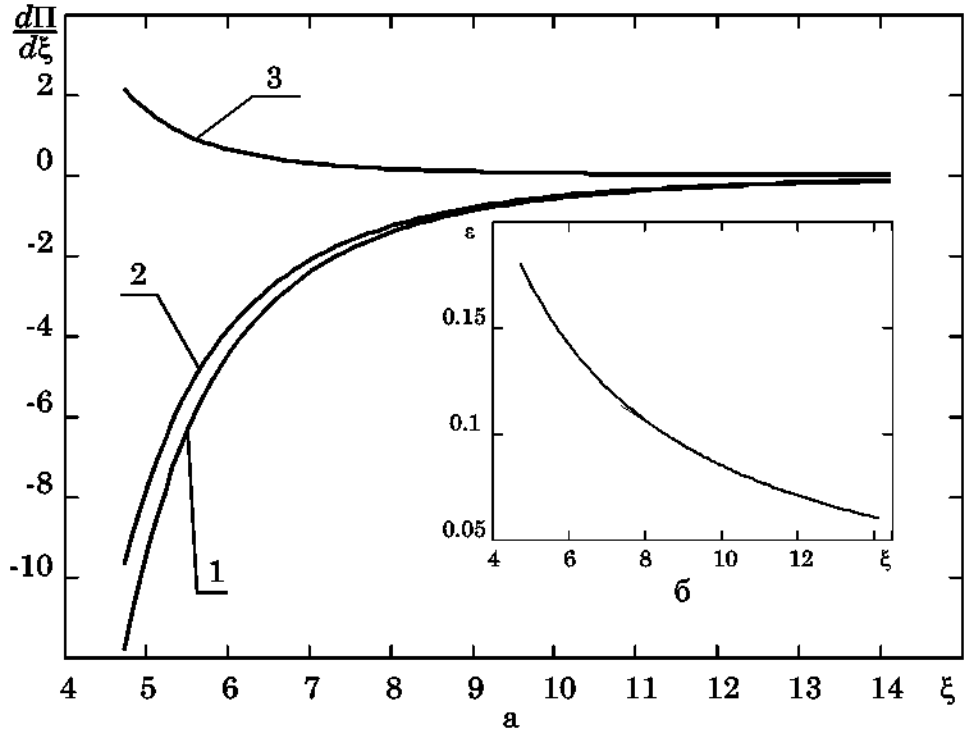


Рис. 8.1. Распределение вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с полууглами раскрытия границ: $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ и Re = 5 безразмерного градиента среднего давления и его компонент – а: 1 – диссипативная составляющая безразмерного градиента давления; 2 – градиент среднего по поперечному сечению канала безразмерного давления; 3 – распределение безразмерной инерционной составляющей градиента безразмерного давления; б – модуль относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

В соответствии с распределением градиента безразмерного давления происходит и распределение среднего безразмерного давления в канале. Поскольку вдоль течения средняя скорость $\bar{v}$ уменьшается, и вследствие этого часть кинетической энергии движения жидкости переходит в потенциальную энергию ее напряженного состояния. Но из-за того, что величина динамической составляющей градиента давления при Re = 5 значительно меньше

по модулю диссипативной его составляющей (рис. 8.1), то и динамическая составляющая в распределении безразмерного давления (первый член в (8.25)) будет по абсолютной величине меньше, чем диссипативная составляющая (рис. 8.3). Поэтому величины в распределении модуля общего безразмерного давления в канале будут меньше значений модуля диссипативной его составляющей, но в пределах всего канала с отрицательным знаком. Это означает, что течение при $\mathrm{Re} = 5$ происходит в сторону падения давления (рис. 8.3).

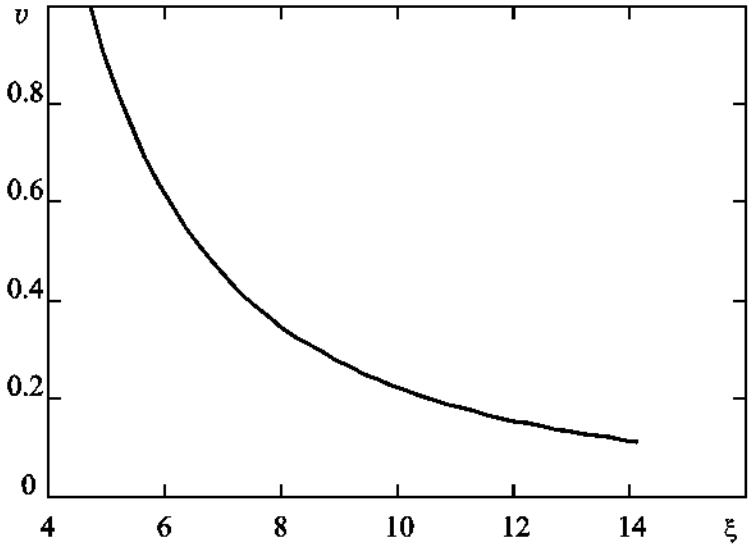


Рис. 8.2. Распределение безразмерной средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости при течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия : $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$.

Относительное отклонение среднего безразмерного давления от его диссипативной составляющей также уменьшается вдоль течения, хотя и изменяется оно незначительно. Это происходит потому, что среднее безразмерное давление и его компоненты являются аддитивными величинами. Действительно, при интегрировании производных этих величин вдоль течения с уменьшением абсолютных значений последних происходит и уменьшение относительного отклонения между их первообразными.

Увеличение числа Рейнольдса в три раза приводит и к троекратному увеличению инерционной составляющей градиента сред-

него безразмерного давления (рис. 8.4). Это приводит уже к существенному уменьшению модуля градиента безразмерного давления, но оно еще остается отрицательным по величине и течение происходит в сторону уменьшения давления, хотя безразмерное давление, вычисленное с учетом инерционного члена, значительно меньше диссипативной составляющей по абсолютной величине (рис. 8. 5).

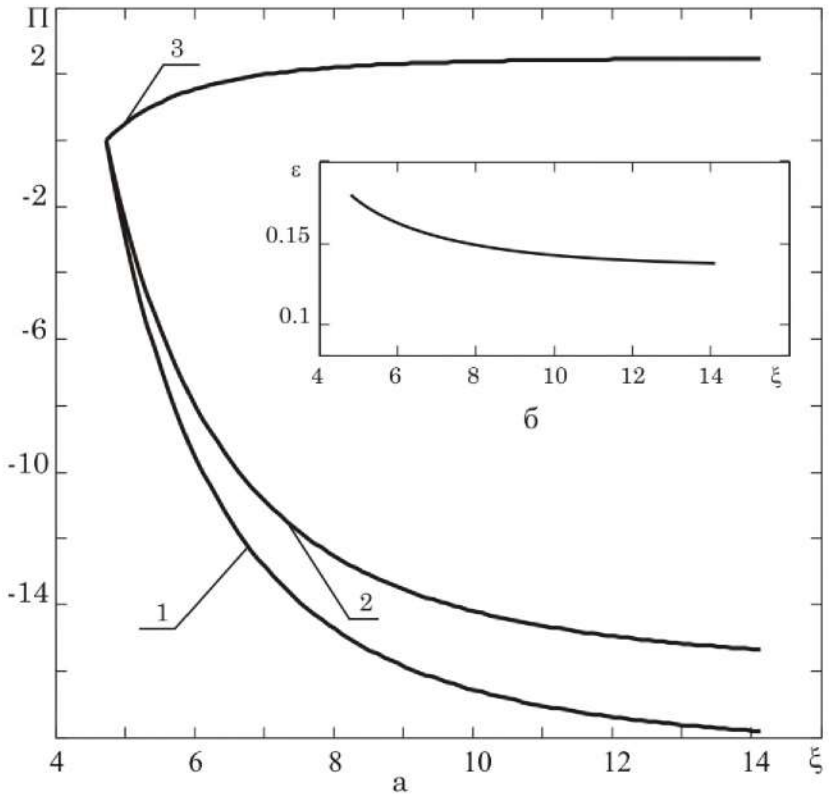


Рис. 8.3. Распределение среднего безразмерного давления и его составляющих при диффузором ламинарном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ при: $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ и $Re = 5$ – а: 1 – диссипативная составляющая безразмерного давления; 2 – безразмерное давление; 3 – инерционная составляющая безразмерного давления; б – модуль относительного отклонения зависимости 2 от зависимости 1.

Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса вносит качественные изменения в распределение градиента безразмерного давления, оно становится немонотонным вдоль продольной координа-

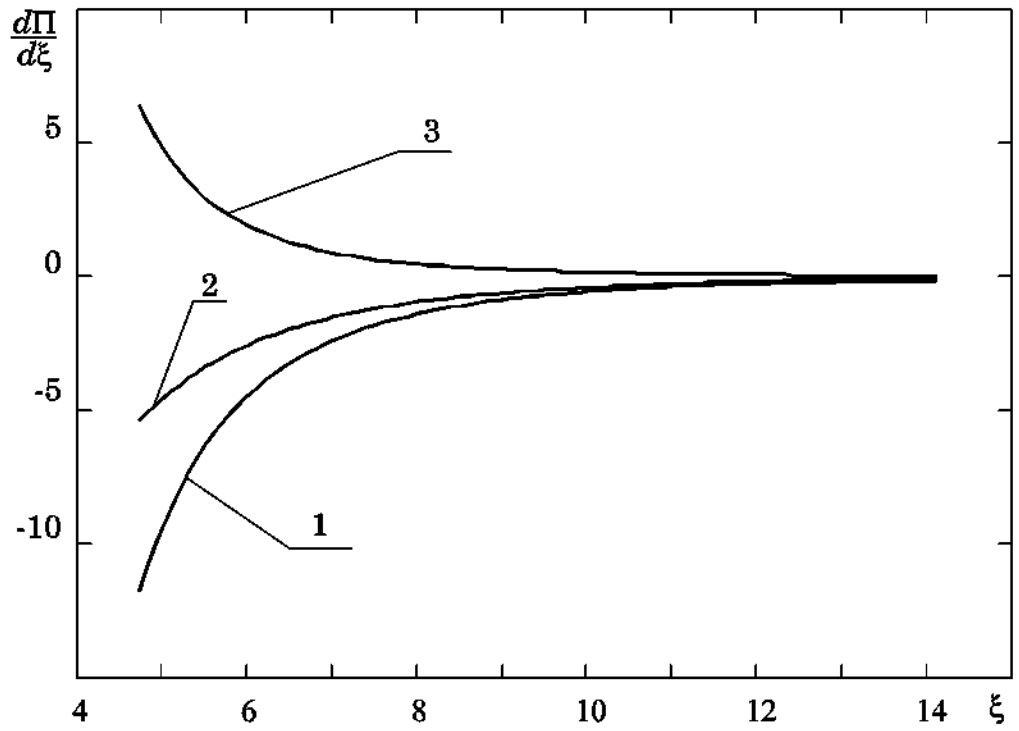


Рис. 8.4. Распределение вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с полууглами раскрытия границ: $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ и Re = 15 безразмерного градиента среднего давления и его компонент. 1 – диссипативная составляющая; 2 – градиент среднего по площади поперечного сечения канала безразмерного давления; 3 – инерционная его составляющая.

ты ξ (рис. 8.6). При значении числа Re = 25 величины диссипативной и динамической составляющих безразмерного градиента давления близки по абсолютной величине, но также, как и раньше противоположны по знаку, поэтому в сумме они дают абсолютное значение $\bar{\Pi}_\xi$, которое намного меньше абсолютного значения каждой из составляющих в отдельности (рис. 8. 6).

В начале течения, при малых значениях координаты ξ, модули обеих составляющих максимальны, но поскольку инерционная составляющая пропорциональна $1/\xi^5$, а диссипативная ~ $1/\xi^4$, модуль инерционной составляющей изменяется несколько интенсивнее при росте ξ, чем модуль диссипативной составляющей, поэтому модуль $\bar{\Pi}_\xi$ здесь увеличивается, оставаясь отрицательным. Затем с увеличением ξ абсолютные значения диссипативной и динамиче-

ской составляющих уменьшаются, уменьшается и модуль их суммы, т.е. модуль $\bar{\Pi}_\xi$, что и приводит к немонотонной функции $\bar{\Pi}_\xi(\xi)$ (рис. 8.6).

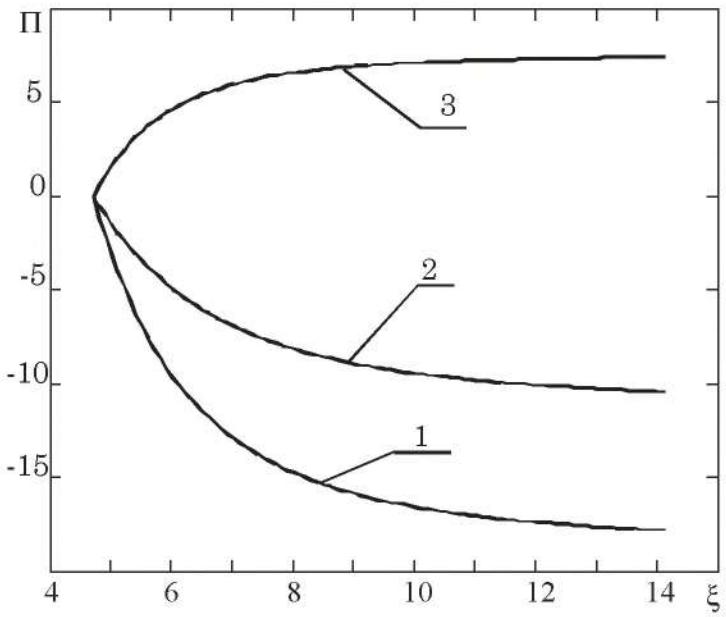


Рис. 8.5. Распределение безразмерного давления и его составляющих при диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ при $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ и $\mathrm{Re} = 15$; 1 – диссипативная составляющая; 2 – среднее безразмерное давление; 3 – динамическая составляющая среднего безразмерного давления.

Локализацию экстремального значения градиента среднего безразмерного давления определим из условия

$$\frac{d^2\bar{\Pi}}{d\xi^2} = 0\,, \tag{8.26}$$

что приводит к значению

$$\xi_{\Pi' ex} = \frac{5\,\mathrm{Re}\,\xi_0^4}{2\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)}. \tag{8.27}$$

Для оценки значения $\xi_{\Pi' ex}$ можно воспользоваться равенством (6.111), определяющим величину λ, подставляя которую в (8.27) получим

$$\xi_{\Pi' ex} = \frac{5}{24}\mathrm{Re}\,. \tag{8.28}$$

Выражение (8.28) показывает, что параметром, определяющим локализацию экстремального значения безразмерного градиента давления, является число Рейнольдса. В рассматриваемом случае (8.28) дает величину $\xi_{\Pi' ex} = 5.21$, а выражение (8.27) дает значение $\xi_{\Pi' ex} = 5.29$, т.е. относительное отклонение между этими значениями не превышает 1.6 %.

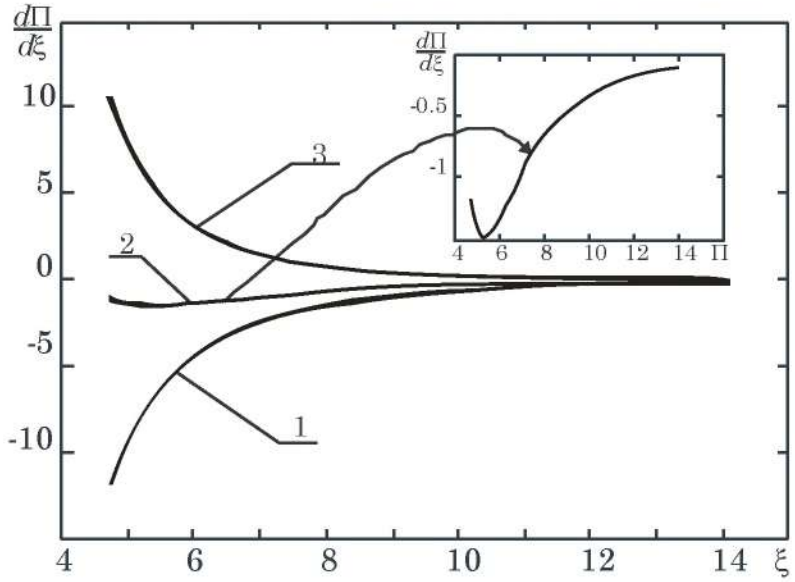


Рис. 8.6. Распределение вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и поуглами раскрытия границ: $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ при Re = 25 безразмерного градиента среднего давления и его компонент: 1 – диссипативная составляющая безразмерного градиента давления; 2 – градиент среднего безразмерного давления; 3 – его инерционная составляющая.

Определяя знак производной третьего порядка от $\bar{\Pi}$ по ξ в точке экстремума, определим его характер. Подставляя значение (6.111) в выражение

$$\frac{d^3\bar{\Pi}}{d\xi^3} = \frac{20}{\xi^6}\left[\frac{3\,\mathrm{Re}\,\xi_0^4}{\xi} - \left(\lambda + 6\xi_0^2\right)\right], \tag{8.29}$$

получим

$$\frac{d^3\bar{\Pi}}{d\xi^3} = \frac{60\xi_0^4}{\xi^6}\left(\frac{\mathrm{Re}}{\xi} - 4\right), \tag{8.30}$$

и, наконец, подставляя в (8.30) для ξ значение (8.28), получим

$$\frac{d^3\bar{\Pi}}{d\xi^3} = 230.4\frac{\xi_0^4}{\mathrm{Re}} > 0. \qquad (8.31)$$

Откуда следует, что экстремум функции $\bar{\Pi}'(\xi)$ всегда будет являться локальным минимумом в области ее определения (рис. 8.6).

С помощью выражений (8.27) и (8.28) можно определить значение числа Рейнольдса, начиная с которого зависимость градиента безразмерного давления в канале будет немонотонной, например, полагая в (8.28) $\xi_{\Pi' ex} = \xi_0$, получим для числа Re определение

$$\mathrm{Re}_{\Pi' ex} = \frac{24}{5}\xi_0 = 4.8\xi_0 = 4.8\,\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1). \qquad (8.32)$$

Для рассматриваемого случая получим значение $\mathrm{Re}_{\Pi' ex}$ = 22.56.

Поскольку градиент безразмерного давления при Re = 25 везде в пределах канала отрицателен, то и безразмерное давление отрицательно (рис. 8.7). Это значит, что диффузорное течение при Re ~25 происходит в сторону уменьшения давления.

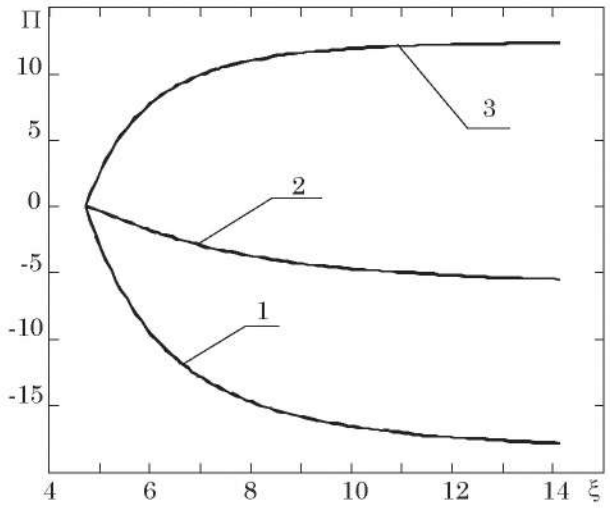


Рис. 8.7. Распределение безразмерного давления и его составляющих при диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ при θ_1= 3°, θ_2 = 15° и Re = 25; 1 – диссипативная составляющая; 2 – среднее безразмерное давление; 3 – динамическая составляющая среднего безразмерного давления.

Увеличение числа Рейнольдса до 50 придает течению новые качественные свойства. Рассмотрим их более подробно. Действи-

тельно, при Re = 50 градиент среднего безразмерного давления вблизи входа в канал есть величина положительная (рис. 8.8), а это означает, что при данном числе Рейнольдса вблизи входа в канал преобладают инерционные силы. Вычислить значение числа Рейнольдса, начиная с которого в диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ будут преобладать инерционные силы, можно из условия

$$\left.\frac{d\bar{\Pi}}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0, \tag{8.33}$$

откуда для числа Re получаем

$$\mathrm{Re}_{I0} = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{2\xi_0^3} = \frac{\lambda + 6\,\mathrm{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{2\,\mathrm{ctg}^3(\theta_2 - \theta_1)}. \tag{8.34}$$

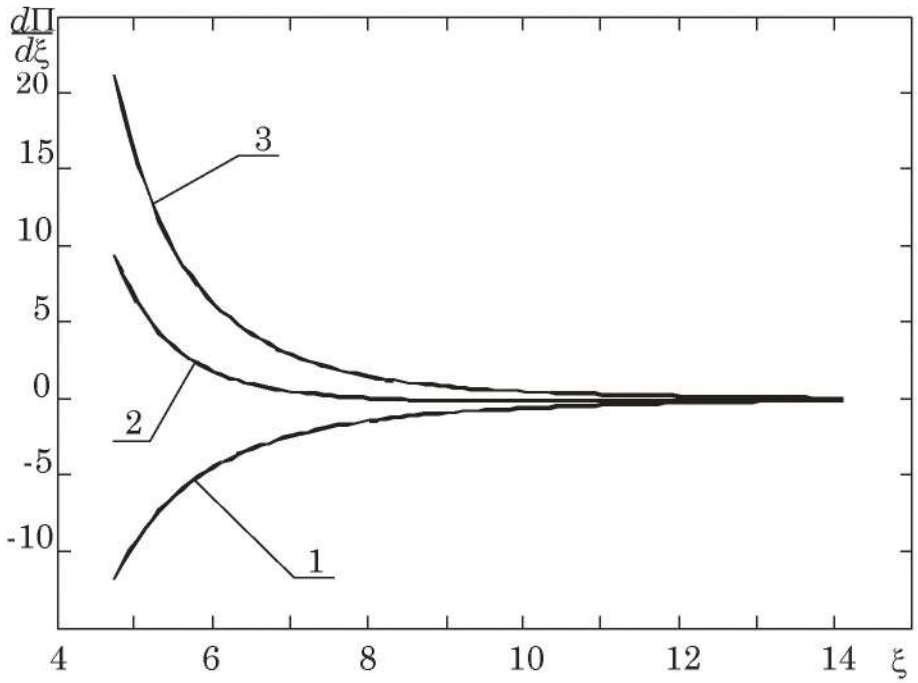


Рис. 8.8. Распределение вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с поуглами раскрытия границ: θ_1= 3°, θ_2 = 15° и Re = 50 безразмерного градиента среднего давления и его компонент: 1 – диссипативная составляющая; 2 – градиент среднего по площади поперечного сечения канала безразмерного давления; 3 – инерционная его составляющая.

Используя соотношение (6.111), получаем оценку для этого значения

$$\mathrm{Re}_{I0} = 6\xi_0 = 6\,\mathrm{ctg}\left(\theta_2 - \theta_1\right). \tag{8.35}$$

Для рассматриваемого случая число Re_{I0}, вычисленное по (8.35), равно $\mathrm{Re}_{I0} = 28.23$, а по (8.34) $\mathrm{Re}_{I0} = 27.76$, т.е. (8.35) является достаточно хорошим приближением (8.34) и поэтому может быть использовано в расчетах.

Заметим, что соотношение (8.35) дает наименьшее число Рейнольдса, при котором абсолютная величина динамической составляющей градиента безразмерного давления становится равной по модулю его диссипативной составляющей в пределах канала, поскольку при вычислении (8.33) для ξ отличных от ξ_0 дает значение

$$\mathrm{Re}_I = 6\xi, \tag{8.36}$$

т.е. для чисел Рейнольдса, для которых вблизи входа начинают преобладать инерционная сила, возникающая вследствие уменьшения скорости, далее вниз по течению могут преобладать еще диссипативные силы трения.

В рассматриваемом случае число Re, при котором преобладающее влияние инерционных свойств на распределение давления в канале распространяется на всю его длину, равно $\mathrm{Re}_I = 6\xi_1 \approx 84.6$. Это означает, что при $\mathrm{Re} = 50$ течение с преобладанием инерционной силы распространяется не на всю длину канала. Продольную координату, до которой распространяется такое течение, определяем из условия

$$\frac{d\overline{\Pi}}{d\xi} = 0. \tag{8.37}$$

Очевидно, что (8.37) будет также определять и локализацию экстремального значения в распределении среднего по сечению безразмерного давления вдоль канала. И это значение является максимальным (рис. 8.9). Действительно, из (8.37) находим локализацию экстремального значения среднего по сечению канала безразмерного давления

$$\xi_{\bar{\Pi}\max} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\xi_0^4}{6\xi_0^2 + \lambda}, \tag{8.38}$$

или при использовании (6.111) из (8.38), получаем

$$\xi_{\bar{\Pi}\max} = \frac{1}{6}\,\mathrm{Re}. \tag{8.39}$$

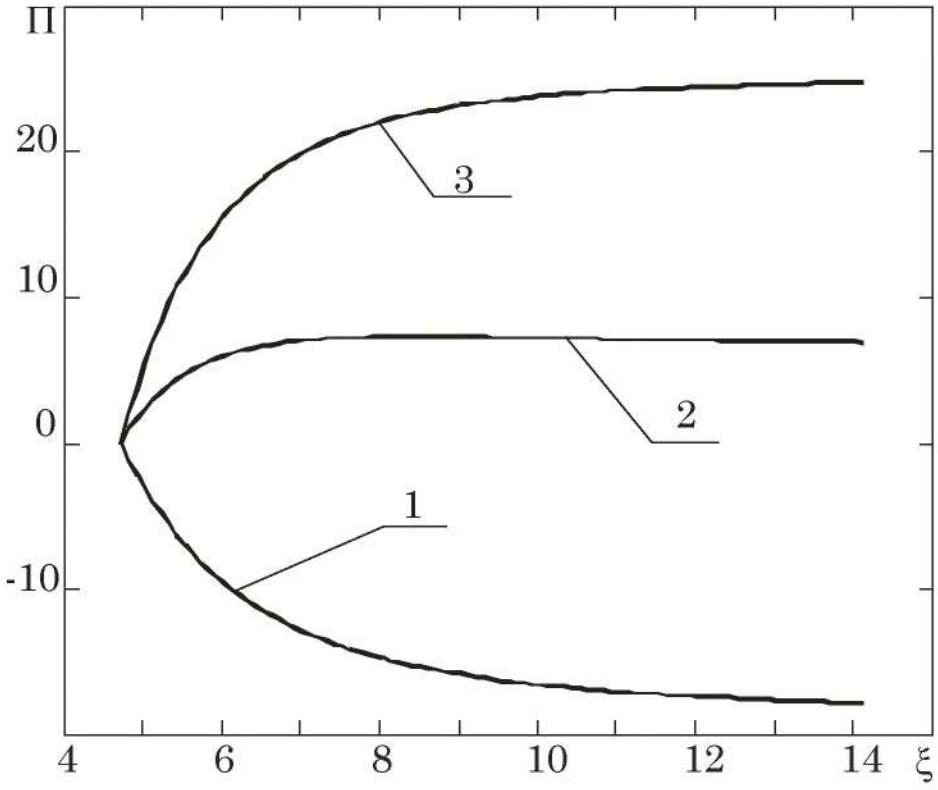


Рис. 8.9. Распределение безразмерного давления и его составляющих при диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ при $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ и $\mathrm{Re} = 50$. 1 – диссипативная составляющая; 2 – среднее безразмерное давление; 3 – динамическая составляющая среднего безразмерного давления.

Далее вычисляя вторую производную от $\bar{\Pi}$ по ξ и подставляя в нее значение (8.39), получаем, что $\bar{\Pi}_{\xi\xi}\left(\xi_{\bar{\Pi}\max}\right) < 0$, а это и означает, что на безразмерной координате $\xi_{\bar{\Pi}\max}$ локализуется макси-

мальное безразмерное давление в канале. Приравнивая $\xi_{\bar{\Pi}\max} = \xi_0$, определим число Рейнольдса, начиная с которого в пределах канала распределение среднего безразмерного давления будет немонотонным, $\mathrm{Re} = 6\xi_0$, т.е. равно значению числа Рейнольдса, начиная с которого в канале появляется участок течения, на котором преобладает инерционная сила (8.35). Это значит, что абсолютная величина динамической составляющей безразмерного давления превосходит модуль диссипативной его составляющей, и их сумма является положительной, что и приводит к течению в сторону роста давления.

В таком течении происходит переход кинетической энергии в его потенциальную энергию напряженного состояния жидкости, т.е. происходит восстановление давления в соответствии с законом Бернулли (рис. 8.8, рис. 8.9). Но если значение числа Re не столь велико, чтобы область с преобладанием инерционной составляющей среднего давления распространилась на весь канал, т.е. $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{l1}$, где в соответствие с (8.36)

$$\mathrm{Re}_{l1} = 6\xi_1, \tag{8.40}$$

то на некотором расстоянии от входа в канал, а точнее со значения $\xi_{\bar{\Pi}\max}$, начинает преобладать сила трения, и $\bar{\Pi}_\xi$ становится отрицательной, а жидкость здесь течет уже в сторону уменьшения давления (рис. 8.9).

Сравнивая значения (8.32) и (8.35) найдем, что число Рейнольдса, при котором в пределах канала начинает преобладать инерционная сила, больше в 1.25 раза числа Re, при котором $\bar{\Pi}_\xi(\xi)$ в пределах канала становится немонотонным.

Заметим, что выражения (8.27), (8.32), (8.35) и (8.38) справедливы и для решения задачи, записанного в форме (8.24), (8.25), если принять для безразмерной координаты входа в канал значение $\xi_0 = 1$.

Общий характер распределения среднего по площади поперечного сечения канала безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале в зависимости от числа Рейнольдса можно видеть на рисунке 8.10.

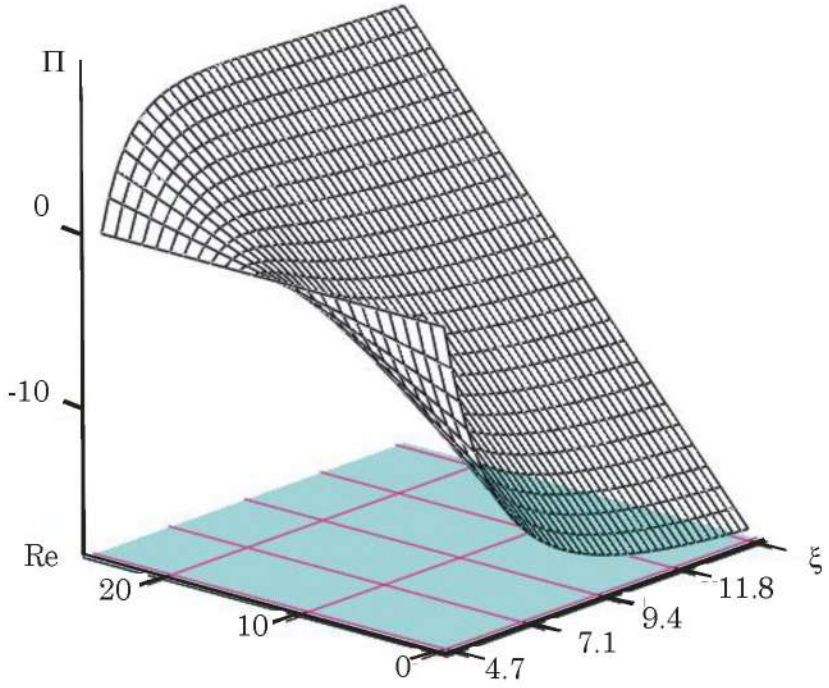


Рис. 8. 10. Распределение безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления при течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и их полууглами раскрытия $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$ в зависимости от числа Рейнольдса.

8.5. Условия, при котором можно пренебречь инерционными свойствами диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ

Таким образом, в числе, как знаке совершенного ограничения, лежит, как это благодаря грандиозной, безоговорочно религиозной интуиции с глубочайшей несомненностью понял Пифагор или кто-нибудь еще, сущность всего действенного, всего одновременно ставшего, познанного и ограниченного.

О. Шпенглер

С помощью полученного нами распределения среднего по поперечному сечению канала безразмерного давления (8.21) можно

определить интервалы изменения значений числа Рейнольдса, в которых можно упростить расчет среднего безразмерного давления $\bar{\Pi}$, а значит и перепада давления $\Delta \bar{P}$ в канале.

В предыдущем разделе мы определили критические значения чисел Рейнольдса, при которых инерционные силы оказывают преобладающее влияние на распределение безразмерного давления в канале.

Если ввести относительное отклонение значения среднего безразмерного давления $\bar{\Pi}$, вычисленного с учетом инерционных свойств (8.21) от $\bar{\Pi}_{dis}$, рассчитанного без этого учета (2.48), т.е. при Re = 0 в (8.21)

$$\varepsilon_F(\xi) = \left| \frac{\bar{\Pi} - \bar{\Pi}_{dis}}{\bar{\Pi}_{dis}} \right|, \tag{8.41}$$

можно количественно определить влияние инерционных свойств течения на распределение среднего по сечению давления. Мы уже видели, что относительное отклонение $\varepsilon_F(\xi)$ является монотонной функцией (рис. 8.3), а это значит, что свое максимальное значение ε_F принимает на одной из границ своей области определения, т.е. на входе в канал или на выходе из него. Нам необходимо определить на какой из границ своей области определения ε_F максимально и затем определить величину относительного отклонения, которую можно считать значимой.

Определим сначала значение ε_F на входе в канал, т.е. $\varepsilon_F(\xi_0)$. Выражение (8.41) при подстановке конкретных значений $\bar{\Pi}$ и $\bar{\Pi}_{dis}$ примет вид

$$\varepsilon_F(\xi) = \left| \frac{3\,\mathrm{Re}\,\xi_0^3\left(\xi^4 - \xi_0^4\right)}{2\xi\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)\left(\xi_0^3 - \xi^3\right)} \right|, \tag{8.42}$$

и, если в него вместо ξ подставить ξ_0, то получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности используем правило Лопиталя [117], и после этого вычислим предел ε_F при $\xi \to \xi_0$

$$\varepsilon_F(\xi_0)=\lim_{\xi\to\xi_0}\varepsilon_F(\xi)=\left|\frac{3\,\mathrm{Re}\,\xi_0^2}{2\left(\lambda+6\xi_0^2\right)}\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{\xi^4-\xi_0^4}{\xi_0^3-\xi^3}\right|\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \tag{8.43}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{3\,\mathrm{Re}\,\xi_0^2}{2\left(\lambda+6\xi_0^2\right)}\lim_{\xi\to\xi_0}-\frac{4\xi^3}{3\xi^2}\right|=2\frac{\mathrm{Re}\,\xi_0^3}{\lambda+6\xi_0^2}.$$

Поскольку функция $\varepsilon_F(\xi)$ монотонна, то для того, чтобы определить максимальную величину из $\varepsilon_F(\xi_0)$ и $\varepsilon_F(\xi_1)$, нам достаточно вычислить предел $\lim\limits_{\xi\to\infty}\varepsilon_F$

$$\varepsilon_F(\infty)=\lim_{\xi\to\infty}\varepsilon_F(\xi)=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{Re}\,\xi_0^3}{\lambda+6\xi_0^2}, \tag{8.44}$$

и, следовательно, $\varepsilon_F(\xi_0)>\varepsilon_F(\xi_1)$, поскольку в качестве ξ_1 мы можем выбрать любую величину из интервала $[\xi_0, \infty]$.

Для общности рассуждения выберем в качестве значимой величины относительного отклонения величину, равную n %, т.е. при вычислении безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ для ламинарного течения можно пренебречь влиянием инерционной силы, возникающей из-за изменения средней по поперечному сечению канала скорости течения жидкости вследствие изменения площади поверхности поперечного сечения канала при выполнении условия

$$\varepsilon_F(\xi_0)\le\frac{n}{100}. \tag{8.45}$$

Отсюда мы получаем условие для чисел Рейнольдса , при выполнении которого можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в канале

$$\mathrm{Re}\le\frac{n}{100}\frac{\lambda+6\xi_0^2}{\xi_0^3}. \tag{8.46}$$

Если воспользуемся соотношением (6.111), то получим

$$\mathrm{Re}\le 0.06n\xi_0=0.06\,\mathrm{ctg}\left(\theta_2-\theta_1\right). \tag{8.47}$$

При $n = 1\%$ имеем $\mathrm{Re} \le 0.06\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1)$, а при $n = 5$ % – $\mathrm{Re} \le 0.3\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1)$.

8.6. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ

Я всматриваюсь в вас, о, числа...
Вы позволяете понимать века,
как быстрого хохота зубы.

В. Хлебников

В предыдущем разделе мы определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в канале. Это возможно в тех случаях течения, когда в выражении (8.21) второй член, показывающий компоненту безразмерного давления, определяемую трением на границах канала, значительно превосходит первый член, определяющий динамическую компоненту давления. Но, очевидно, могут существовать значения чисел Рейнольдса, при которых первый член (8.21) будет значительно превосходить второй. В данном разделе мы определим диапазон чисел Re, в котором при расчете давления в коническом соосном диффузоре можно пренебречь изменением давления за счет трения на границах канала по сравнению с изменением динамической его составляющей, т.е. по сравнению с изменением давления в канале за счет изменения средней по площади поперечного сечения скорости жидкости.

Также, как и в предыдущем разделе настоящей главы, определим относительное отклонение среднего безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативного члена от его динамической составляющей, как

$$\varepsilon_D(\xi) = \left| \frac{\overline{\Pi} - \overline{\Pi}_{din}}{\overline{\Pi}_{din}} \right|, \qquad (8.48)$$

где

$$\bar{\Pi}_{din} = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1 - \frac{\xi_0^4}{\xi^4}\right), \tag{8.49}$$

динамическая (инерционная) составляющая среднего по площади поверхности поперечного сечения соосного конического диффузора с общей вершиной границ безразмерного давления.

Для определения критического значения числа Рейнольдса, при превышении которого можно пренебречь трением в расчетах давления, как и раньше в качестве значимой величины ε_D можно выбрать значение в n %, чтобы не снизить общность рассуждений, а далее анализ можно уточнить, подставив какое-нибудь конкретное значение n. Расписывая (8.48), получим

$$\varepsilon_D(\xi) = \left|\frac{2\xi\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)\left(\xi_0^3 - \xi^3\right)}{3\,\mathrm{Re}\,\xi_0^3\left(\xi^4 - \xi_0^4\right)}\right|. \tag{8.50}$$

Сравнивая (8.50) и (8.42), получим соотношение, связывающее величину относительного отклонения среднего безразмерного давления от его диссипативной части со значением относительного отклонения среднего безразмерного давления от его динамической части

$$\varepsilon_D = \frac{1}{\varepsilon_F}, \tag{8.51}$$

откуда следует, что ε_D будет стремиться к своему максимальному значению при $\xi \to \infty$, т.е. максимальное значение ε_D будет находиться там, где ε_F имеет минимальное значение. Это следует из (8.43) и (8.44), а непосредственно из (8.44) получаем

$$\varepsilon_D = \frac{2}{3}\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\mathrm{Re}\,\xi_0^3}. \tag{8.52}$$

Поскольку мы предположили, что силами трения можно пренебречь при относительном отклонении ε_D меньше, чем n %, т.е. при выполнении условия

$$\varepsilon_D \le \frac{n}{100}, \tag{8.53}$$

откуда получаем условие для Re

$$\mathrm{Re} \ge \frac{200}{3n}\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^3}, \tag{8.54}$$

и, если воспользоваться соотношением (6.111), можно записать

$$\mathrm{Re} \ge \frac{800}{n}\xi_0 = \frac{800}{n}\mathrm{ctg}\left(\theta_2 - \theta_1\right). \tag{8.55}$$

Следовательно, из предположения, что $n = 1$ %, условие $\mathrm{Re} \ge 800\,\mathrm{ctg}\left(\theta_2 - \theta_1\right)$, а из $n = 5$ % получим $\mathrm{Re} \ge 160\,\mathrm{ctg}\left(\theta_2 - \theta_1\right)$.

8.7. Особенности распределения перепада давления при ламинарном течении в бесконечно длинном соосном коническом диффузоре с общей вершиной

Нет ни конца, ни начала,
Нет середины, обманов,
Недостоверных учений,
Верная точка одна.
Это предел окончанья
Тут завершенность Нирваны.

Ашвагхоша

Исследуя ползущее диффузорное течение в соосном коническом канале с общей вершиной границ в главе 2, мы обнаружили, что перепад давления в таком бесконечно длинном канале является конечной величиной (2.68). В двух последних разделах, вычисляя относительное отклонение среднего безразмерного давления при $\xi \to \infty$, вычисленного с учетом инерционной силы от $\overline{\Pi}$, рассчитанного при $\mathrm{Re} = 0$, мы получили конечное значение ε_F, а это означает, что и в случае диффузорного течения со значимой инерционной силой безразмерное давление при $\xi \to \infty$ также будет стремиться к конечной величине. Действительно, динамическая составляющая среднего безразмерного давления (8.49) при стремлении безразмер-

ной радиальной координаты к бесконечности будет стремиться к значению

$$\bar{\Pi}_{din}(\infty)=\frac{\mathrm{Re}}{2}, \tag{8.56}$$

а из (8.21) получаем значение среднего по площади поперечного сечения канала безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ на бесконечности

$$\bar{\Pi}(\infty)=\frac{\mathrm{Re}}{2}-\frac{\lambda+6\xi_{\circ 0}^{2}}{3\xi_{\circ 0}^{3}}. \tag{8.57}$$

Используя соотношение (6.111), получаем приближенное выражение для оценки величины среднего безразмерного давления на бесконечности (8.57)

$$\bar{\Pi}(\infty)\approx\frac{1}{2}(\mathrm{Re}-8\xi_{\circ 0})=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}-8\,\mathrm{ctg}(\theta_2-\theta_1)\right]. \tag{8.58}$$

Очевидно, что при Re = 0 мы из (8.57) получаем выражение, определяющее распределение безразмерного давления на бесконечной радиальной координате в случае ползущего течения (2.68).

Два последних полученных выражения также высвечивают особенность распределения безразмерного среднего давления на бесконечности при диффузорном течении со значимыми числами Рейнольдса. Действительно, для любой возможной разности полууглов раскрытия граничных поверхностей θ_2 - θ_1 найдется такое значение числа Рейнольдса, при котором выполняется равенство $\bar{\Pi}(\infty)=0$, и это число Re определяется выражением

$$\mathrm{Re}=8\,\mathrm{ctg}(\theta_2-\theta_1)=8\xi_{\circ 0}. \tag{8.59}$$

Заметим здесь, что равенство перепада давления 0 при определенных числах Рейнольдса в бесконечно длинном соосном коническом диффузоре ни в коем случае не означает, что течение происходит при отсутствии трения. Работа на перекачку жидкости через диффузор будет определяться распределением касательного напряжения на границах течения вдоль канала, которое мы уже

исследовали в главе 2. Восстановление же давления происходит из-за уменьшения средней скорости течения вдоль канала, вследствие этого кинетическая энергия течения жидкости переходит в потенциальную энергию напряженного состояния. Число Рейнольдса, при котором выполняется равенство $\bar{\Pi}(\infty) = 0$, определяется только разностью полууглов раскрытия или ξ_0, и практически не зависит от других параметров течения (8.59), а зависимость $\mathrm{Re}(\xi_0)$ является абсолютной для всех возможных соосных конических диффузоров (рис. 8.11).

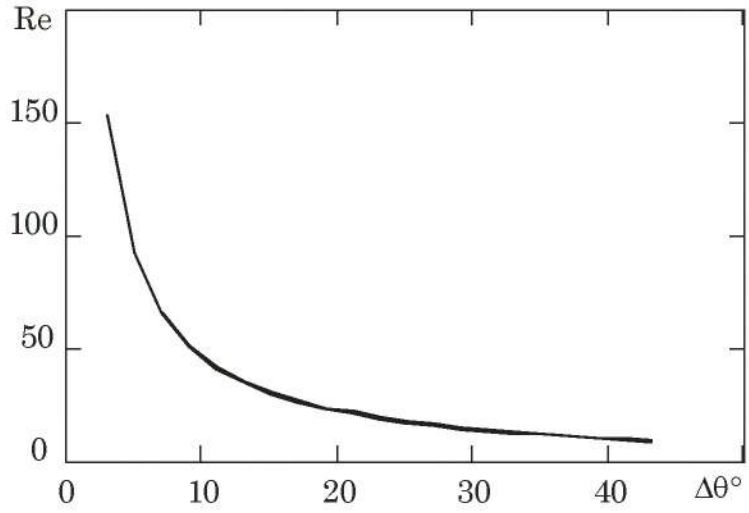


Рис. 8. 11. Зависимость числа Рейнольдса, зануляющего перепад давления при ламинарном течении в бесконечно длинном соосном коническом диффузоре от разности полууглов раскрытия граничных поверхностей.

Также, как и в разделе 2.4.2 для ползущего течения, определим безразмерную координату ξ_∞, на которой среднее по поперечному сечению канала безразмерное давление $\bar{\Pi}(\xi)$, вычисленное с учетом инерционной составляющей, отличается от величины $\bar{\Pi}(\infty)$ (8.58) не более, чем на 1 % выражением (2.70), которое в данном случае приводит к трансцендентному уравнению для вычисления ξ_∞:

$$\left|\frac{2\left(\lambda+6\xi_0^2\right)\xi-\mathrm{Re}\,\xi_0^4}{\xi^4\left(\mathrm{Re}-8\xi_0\right)}\right|\le 0.01\,, \tag{8.60}$$

или, с учетом (6.111), получаем

$$\left|\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4\frac{8\xi-\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}-8\xi_0}\right|\le 0.1\,. \tag{8.61}$$

Рассмотрим зависимость $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ для канала с полууглами раскрытия $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 23°$. При $\mathrm{Re}\to 0$ величина ξ_∞ стремится к значению $4.64\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1)$ (2.71) (рис. 8.12). С увеличением числа Рейнольдса отклонение между значением ξ_∞, вычисленным по (2.71), и значением, определенным по (8.60), возрастает, особенно

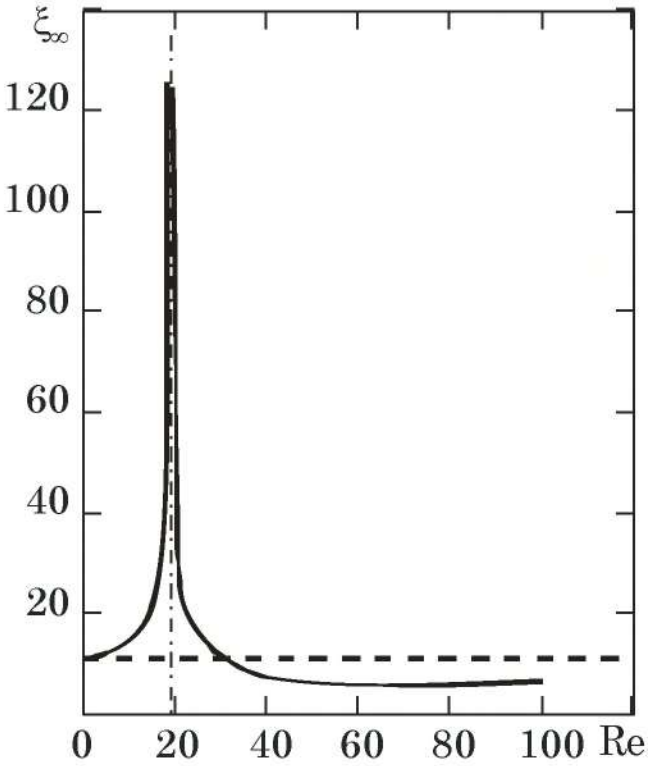


Рис. 8. 12. Зависимость значения безразмерной радиальной координаты, на которой среднее по сечению безразмерное давление в соосном коническом диффузоре с полууглами раскрытия θ_1= 3°, θ_2 = 15° отличается от $\bar{\Pi}(\infty)$ не более, чем на 1 % – сплошная линия. Штриховая линия – величина ξ_∞, полученная без учета инерционных свойств. Штрих-пунктирная линия – число Re, при котором $\bar{\Pi}(\infty) = 0$.

при приближении Re к величине $8\xi_0$. Это связано со стремлением знаменателя (8.61) к 0, что приводит к неограниченному росту ξ_∞.

Это и понятно, при $\mathrm{Re} = 8\xi_0$, $\bar{\Pi}(\infty) = 0$, а для любого конечного значения ξ, $\bar{\Pi}$ имеет не нулевое значение, что в бесконечное число раз превосходит $\bar{\Pi}(\infty)$, поэтому для удовлетворения (8.60) ξ должна стремиться *ad infinitum*.

Но, совершенно понятно, что существует еще одно значение из области определения зависимости $\bar{\Pi}(\xi)$, где $\bar{\Pi} = 0$, и это граница интервала изменения ξ, т.е. $\xi = \xi_0$, т.к. должно выполняться начальное условие (8.8), но по физическим соображениям изменение безразмерного давления в канале нулевой длины мы не рассматриваем.

При дальнейшем увеличении Re значение ξ_∞ резко уменьшается (рис. 8.12), достигает величины (2.71) а затем стремится к своему предельному значению, которое мы можем оценить из (8.61), формально устремив $\mathrm{Re} \to \infty$, после чего получаем неравенство

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4 \le 0.01, \tag{8.62}$$

откуда для ξ_∞ находим соотношение, определяющее ее величину

$$\xi_\infty \ge 3.16\xi_0, \tag{8.63}$$

или с учетом (2.58), будем иметь

$$\xi_\infty \ge 3.16\,\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1). \tag{8.64}$$

В нашем случае $\xi_\infty = 7.44$, и уже при $\mathrm{Re} = 200$ $\xi_\infty = 7.03$, что всего на 5.6 % отличается от предельного значения.

Заметим, что значение ξ_∞ (8.64), полученное с учетом инерционной силы в 1.47 раза меньше, чем значение ξ_∞ (2.72), полученное без такого учета. Это связано с тем, что при увеличении Re возрастает влияние инерционной составляющей безразмерного давления, в то время как диссипативная составляющая безразмерного давления остается неизменной и при выполнении условия (8.55) основной вклад в изменение среднего безразмерного давления будет вносить инерционная сила.

Если мы определим безразмерную координату, на которой динамическая составляющая среднего безразмерного давления (8.49) достигает 99 % своего значения на бесконечности, равного $\frac{\mathrm{Re}}{2}$ (8.56), то как раз и получим условие (8.64).

Зависимость безразмерной координаты ξ_∞ при диффузорном течении с существенной силой инерции для заданного числа Рейнольдса от разности полууглов раскрытия границ канала в некотором смысле аналогична зависимости $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ (рис. 8.12). Рассмотрим более подробно зависимость $\xi_\infty(\Delta\theta)$ для Re = 16. При малых значениях $\Delta\theta$ значения ξ_∞, рассчитанные с учетом сил инерции, практически совпадают со значениями ξ_∞, вычисленными без такого учета (рис. 8.13). Увеличение $\Delta\theta$ ведет к значительному отклонению между этими величинами. И наибольшие различия наблюдаются при приближении величины ctg($\Delta\theta$) к значению $\frac{1}{8}\mathrm{Re}$, т.е. к 2 в нашем случае, а происходит это при разности полууглов раскрытия, равной $\Delta\theta = 26.56°$. По тем же причинам, которые приводят к зависимости, показанной на рисунке 8.12, значение ξ_∞ будут стремиться к ∞ при приближении $\Delta\theta$ к величине 26.56°. Дальнейшее увеличение $\Delta\theta$

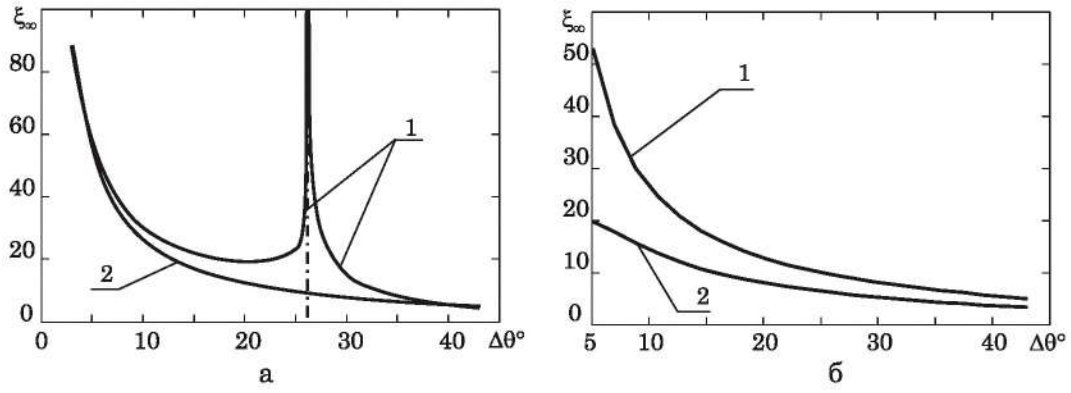


Рис. 8.13. Зависимость безразмерной координаты, на которой при ламинарном диффузором течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ среднее безразмерное давление достигает 99 % своего значения на бесконечности от разности полууглов раскрытия границ $\Delta\theta° = \theta_1 - \theta_2$: 1 – для течения с существенным влиянием характерной инерционной силы; 2 – для ползущего течения с Re = 0; а – для течения с Re = 16; б – для Re = 164.

приводит к уменьшению значения ξ_∞ до значений, представлемых зависимостью (2.72). С увеличением числа Re различие в указанных выше распределениях $\xi_\infty(\Delta\theta)$ увеличивается (рис. 8.13б).

Общий характер зависимости $\xi_\infty(\Delta\theta, \mathrm{Re})$, включающий два последних рисунка, представлен на рисунке 8.14. Здесь отчетливо видна область, в которой среднее безразмерное давление на бесконечности стремится к 0. Эта область является линией, определяемой зависимостью (8.59).

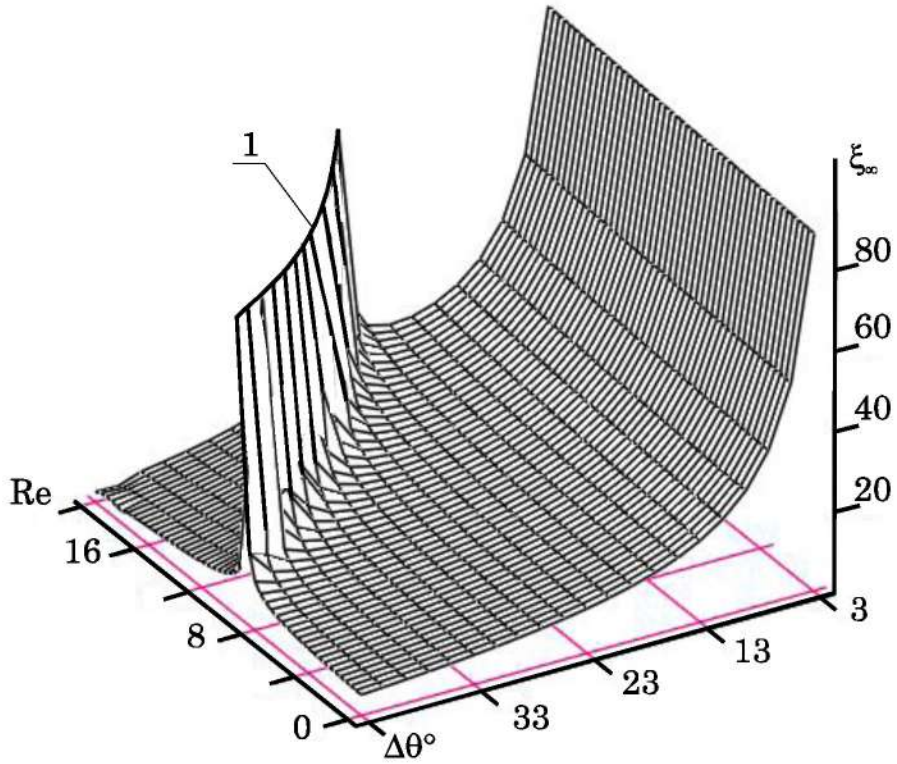


Рис. 8.14. Зависимость безразмерной координаты, на которой безразмерное давление достигает 99 % своего значения на бесконечности от разности полууглов раскрытия границ $\Delta\theta^\circ = \theta_1 - \theta_2$ и числа Рейнольдса: 1 – зависимость, представленная на рисунке 8.11.

8.8. Математическая формулировка и решение задачи ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ и частичным учетом инерционных свойств

Правда, Махъ попытался изб—гнуть необходимости не поддающееся наблюденію реальное т—мъ, что онъ старался зам—нить въ механик—ускореніе относительно абсолютнаго пространства среднимъ ускореніемъ относительно совокупности міровыхъ массъ.

А. Эйнштейнъ

При изучении ламинарного течения в соосном коническом диффузоре мы за исходную систему уравнений движения принимали уравнения движения ньютоновской жидкости, записанные в форме Озеена (8.2)–(8.8) с соответствующими упрощениями, адаптировавшими эти уравнения к рассматриваемому случаю течения.

Поскольку и при конфузорном течении в соосных конических каналах практически всегда будет присутствовать инерционная сила, действующая на текущую жидкость, из-за изменения средней скорости ее течения вследствие уменьшения площади поверхности поперечного сечения канала вдоль течения. Мы также возьмем за основу для анализа такого течения уравнения движения, записанные в форме Озеена. В главе 1 были сделаны оценки членов в этих уравнениях для практически интересных случаев течения, и в разделе 1.4 приведена система уравнений, описывающих ламинарное течение в соосных конических конфузорах.

Геометрические характеристики каналов, в которых будет рассматриваться течение, приведены на рисунке 3.1.

Исследовать ламинарное конфузорное течение в геометрии выбранных каналов будем в безразмерных координатах, уже введенных нами в разделе 3.2. Данные безразмерные координаты и параметры естественным образом получаются из уравнений движения. Для удобства читателей выпишем безразмерные координаты еще раз:

$$t = \frac{T}{h_0} = \xi_1 - \xi;\ \xi = \frac{R}{h_0};\ \upsilon = \frac{V}{V_0};\ \Pi = \frac{(P - P_0)h_0}{\mu V_0};\ \tau = \cos\theta;$$

(8.65)

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu},$$

где h_0 – линейный масштабный множитель, использующийся для обезразмеривания переменных в уравнениях движения жидкости, в дальнейшем величина h_0 будет идентифицирована как ширина канала на входе, $\xi_1 = \frac{R_1}{h_0}$ – безразмерная координата входа в канал (рис. 3.1), V_0 – средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал скорость жидкости, которая определяется выражением (3.2).

Запишем уравнения, описывающие движение ньютоновской жидкости с учетом инерционных сил в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ (1.13)–(1.15) в безразмерных координатах (8.65):

$$\mathrm{Re}_1 \overline{\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{1}{(\xi_1 - t)^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\xi_1 - t)\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right] + \\ + \frac{1}{(\xi_1 - t)^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[(1 - \tau^2)\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}\right] - \frac{2\upsilon}{(\xi_1 - t)^2}; \tag{8.66}$$

$$; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{2}{\xi_1 - t}\frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}; \tag{8.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\xi_1 - t)^2 \upsilon\right] = 0. \tag{8.68}$$

Граничные условия (1.16) и (1.17) запишутся аналогично (3.7) и (3.8):

$$\upsilon = 0, \quad \tau = \tau_1; \tag{8.69}$$

$$\upsilon = 0, \quad \tau = \tau_2, \tag{8.70}$$

а начальное условие (1.18) запишется как (3.9)

$$\bar{\Pi} = 0, \quad t = 0, \tag{8.71}$$

где $\bar{\Pi}$ определяется как

$$\bar{\Pi}(t) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Pi(\tau, t) d\tau, \tag{8.72}$$

т.е. аналогично (8.7) и (2.11).

Для решения сформулированной задачи мы также будем использовать условие постоянства расхода жидкости в любом поперечном сечении канала (3.10), запись которого также повторим здесь в безразмерных координатах

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \upsilon d\tau = \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} \right)^2 (\tau_2 - \tau_1). \tag{8.73}$$

Данная постановка задачи (8.66)–(8.73) позволяет получить ее аналитическое решение, что в свою очередь дает возможность определить наиболее общие характеристики течения и исследовать с их учетом влияние инерционной силы, характерной для конфузорного течения в соосных конических каналах. Для выполнения решения, прежде всего, преобразуем инерционный член в уравнении (8.66) в соответствии с преобразованием, которое было применено нами ранее в уравнении, описывающем диффузорное течение (8.11), т.е. безразмерную скорость υ под знаком производной заменим на безразмерную среднюю по поперечному сечению канала скорость

$$\mathrm{Re}_1 \bar{\upsilon} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \approx \mathrm{Re}_1 \bar{\upsilon} \frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial t}, \tag{8.74}$$

тем самым мы распределенную по поперечному сечению канала инерционную силу заменяем на среднюю по площади поверхности поперечного сечения канала инерционную силу, характерную для конфузорного течения, т.е. силу, возникающую вследствие измене-

ния средней по площади поперечного сечения канала скорости вдоль течения.

Очевидно, что безразмерная средняя по площади поперечного сечения соосного конического конфузора скорость будет определяться выражением (3.16), т.е. $\overline{v} = \left[\xi_1/(\xi_1 - t)\right]^2$.

Вычисляя производную в правой части (8.74), и затем, вычисляя все произведение и подставляя результат в (8.66), получаем

$$2\mathrm{Re}_1 \frac{\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^5} = -\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{1}{(\xi_1 - t)^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\xi_1 - t)\frac{\partial v}{\partial t}\right] + \\ + \frac{1}{(\xi_1 - t)^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(1 - \tau^2\right)\frac{\partial v}{\partial \tau}\right] - \frac{2v}{(\xi_1 - t)^2}. \tag{8.75}$$

Интегрируя уравнение неразрывности (8.68), получим для безразмерной скорости v выражение (3.17), которое для удобства читателя выпишем еще раз

$$v = \frac{u(\tau)}{(\xi_1 - t)^2}. \tag{8.76}$$

Далее, подставляя выражение (8.76) в уравнение (8.75), получаем соотношение

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + 2\mathrm{Re}_1 \frac{\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^5} = \frac{1}{(\xi_1 - t)^4}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(1 - \tau^2\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}\right]. \tag{8.77}$$

Теперь подставим выражение, определяющее скорость (8.76) в уравнение (8.67), и после этого, проинтегрировав полученный результат по переменной τ, находим для распределения безразмерного давления в конфузоре соотношение

$$\Pi(t, \tau) = -\frac{2u(\tau)}{(\xi_1 - t)^3} + f(t), \tag{8.78}$$

где $f(t)$ – "постоянная" интегрирования, зависящая от t, поскольку интегрировалась частная производная по τ. С помощью (8.78) мож-

но определить выражение для первого члена в уравнении (8.77), продифференцировав (8.78) по t

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{6u(\tau)}{(\xi_1 - t)^4} + f'(t). \qquad (8.79)$$

Подставляя последнее выражение в (8.77), получим уравнение

$$2\mathrm{Re}_1 \frac{\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^5} + f'(t)(\xi_1 - t)^4 = (1-\tau^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\tau\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 6u, \qquad (8.80)$$

левая часть которого зависит только от t, а правая – от τ, т.е. мы получили уравнение с разделяющимися переменными, аналогичное уравнению (3.20), но с другой зависимостью левой части от t. Понятно, что для выполнения равенства (8.80) обе его части должны быть равны одному и тому же значению постоянной величины, например, $-\lambda_C$. В этом случае правая часть (8.80) будет представлять неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(\tau)$ (3.21). Граничными условиями для этого уравнения будут равенства (3.22) и (3.23).

Решение задачи (3.21)–(3.23) мы получили в главе 3, и оно определяется выражениями (3.24), (3.26), а также (2.36) и (2.37), которые были получены с помощью (8.73).

Учитывая, что левая часть уравнения (8.80) равна значению $-\lambda_C$ (3.26), найдем выражение для определения производной от функции $f(t)$

$$f'(t) = -2\mathrm{Re}_1 \frac{\xi_1}{(\xi_1 - t)^5} - \frac{\lambda_C}{(\xi_1 - t)^4}. \qquad (8.81)$$

Подставляя найденное значение производной $f'(t)$ в (8.79), получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для безразмерного давления $\Pi(t, \tau)$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -2\mathrm{Re}_1 \frac{\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^5} - \frac{\lambda_C + 6u}{(\xi_1 - t)^4}. \qquad (8.82)$$

Условие однозначности для определения безразмерного давления (8.71) записано для среднего по площади поверхности поперечного сечения канала безразмерного давления, и, чтобы им воспользоваться, усредним уравнение (8.82) по площади поперечного сечения канала. Учитывая (3.13), (8.73) и (8.76), проведем усреднение правой части (8.82)

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt} = -\frac{1}{2\pi(\xi_1 - t)^2(\tau_1 - \tau_2)}\left\{\int_{\tau_1}^{\tau_2} -2\pi(\xi_1 - t)^2\left[2\mathrm{Re}_1\frac{\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\lambda_C + 6u}{(\xi_1 - t)^4}\right]d\tau\right\} = -2\mathrm{Re}_1\frac{\xi_1^4}{(\xi_1 - t)^5} - \frac{\lambda_C + 6u}{(\xi_1 - t)^4}. \tag{8.83}$$

Интегрируя (8.83) по t с начальным условием (8.71), получим выражение, определяющее распределение среднего по площади поверхности поперечного сечения соосного конического конфузора безразмерного давления вдоль ламинарного течения

$$\bar{\Pi}(t) = \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right] + \frac{\lambda_C + 6\xi_1^2}{3\xi_1^3}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right]. \tag{8.84}$$

Также, как и прежде в дальнейшем анализе полученного решения будем называть первый член в (8.83) и (8.84) инерционной или динамической компонентой, а второй член этих выражений – диссипативной компонентой.

В главе 3 мы уже отмечали, что если величина h_0 является шириной канала на его входе (рис. 3.2), то величина ξ_1 однозначно определяется разностью полууглов раскрытия граничных поверхностей (3.34), и тогда (8.83) и (8.84) могут быть записаны в виде:

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt} = -2\mathrm{Re}_1\frac{\mathrm{ctg}^4(\theta_2 - \theta_1)}{\left[\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1) - t\right]^5} - \frac{\lambda_C + 6\mathrm{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{\left[\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1) - t\right]^4}; \tag{8.85}$$

$$\bar{\Pi}(t)=\frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1-\left(\frac{\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)}{\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)-t}\right)^4\right]+$$

$$+\frac{\lambda_C+6\operatorname{ctg}^2(\theta_2-\theta_1)}{3\operatorname{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}\left\{1-\left[\frac{\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)}{\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)-t}\right]^3\right\}. \tag{8.86}$$

Если же в качестве линейного масштаба выбрать величину радиальной координаты входа в конфузор, как это было показано автором монографии в работе [29], то тогда $\xi_1 = 1$, и выражения, определяющие распределение средних по поперечному сечению канала безразмерного давления и его градиента, запишутся в виде:

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt}-\frac{2\mathrm{Re}_1}{(1-t)^5}-\frac{\lambda_C+6}{(1-t)^4}; \tag{8.87}$$

$$\bar{\Pi}(t)=\frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1-\frac{1}{(1-t)^4}\right]+\frac{\lambda_C+6}{3}\left[1-\frac{1}{(1-t)^3}\right]. \tag{8.88}$$

Заметим, что выражение для λ_C (3.26) также в этом случае должно быть откорректировано с учетом равенства $\xi_1 = 1$.

Если же в выражениях (8.83)–(8.88) положить $\theta_1 = 0$, то мы получим решение задачи ламинарного, с учетом характерной силы инерции, конфузорного течения между плоскостью и конусом, раскрытым в сторону от плоскости, с вершиной, лежащей на плоскости, и осью, перпендикулярной к ней.

Мы видели, что дифференциальное уравнение, описывающее распределение скорости жидкости, полученное в данном разделе, полностью совпадает с уравнением, полученным в главе 3, поэтому совпадут и их решения, и это было уже отмечено, а в главе 3 было показано, что распределения скорости при диффузорном и конфузорном течениях в одном и том же канале совпадают по абсолютной величине в размерном виде, а в безразмерной записи будут отличаться только постоянным множителем. Распределение скорости при диффузорном течении в соосном коническом канале с общей

вершиной границ было детально изучено в главе 2. Поэтому в настоящей главе мы рассмотрим распределение безразмерных средних по поперечному сечению канала давления и его градиента и проанализируем влияние инерционных свойств течения на эти распределения.

8.9. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной его границ

Излагаемая теория возникла на основе убеждения, что пропорциональность инертной и тяжелой масс является точным законом природы...

А. Эйнштейн, М. Гроссман

Так же, как и при диффузорном течении, определяющими параметрами задачи являются значения числа Re_1 и величины полууглов раскрытия граничных поверхностей θ_1 и θ_2. Зависимость безразмерного давления от величины θ_1 и θ_2 при ползущем течении, т.е. при $\mathrm{Re}_1 = 0$, в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ мы изучили в главе 3. В настоящем разделе мы сосредоточим внимание на изучении влияния ненулевых значений числа Рейнольдса на распределение среднего безразмерного давления вдоль течения, т.е. изучим влияние характерной инерционной силы, возникающей при течениях в соосных конических конфузорах на распределение давление.

Для выяснения характера такого влияния рассмотрим распределение $\bar{\Pi}(t)$ при различных значениях числа Рейнольдса. Анализировать распределение безразмерного давления будем с помощью решения, записанного в форме (8.85), (8.86), иногда прибегая к записи (8.83) и (8.84).

Рассмотрим ламинарное течение в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия, рав-

ными $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$. В этом случае безразмерная координата входа в конфузор будет равна $\xi_1 = \mathrm{ctg}(12°) \approx 4.7$, а для безразмерной координаты выхода из конфузора выберем значение в три раза меньшее, т.е. $\xi_0 = 1.57$.

Принимая во внимание выражение (3.16), определяющее среднюю по площади поперечного сечения безразмерную скорость, перепишем уравнения для $\bar{\Pi}$ и его градиента в виде:

$$\frac{d\bar{\Pi}}{dt} = 2\mathrm{Re}_1 \frac{\bar{v}^2}{\xi_1 - t} - \frac{\lambda_C + 6\,\mathrm{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{\mathrm{ctg}^4(\theta_2 - \theta_1)}\bar{v}^2; \qquad (8.89)$$

$$\bar{\Pi}(t) = \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left(1 - \bar{v}^2\right) + \frac{\lambda_C + 6\,\mathrm{ctg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{3\,\mathrm{ctg}^3(\theta_2 - \theta_1)}\left(1 - \bar{v}^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (8.90)$$

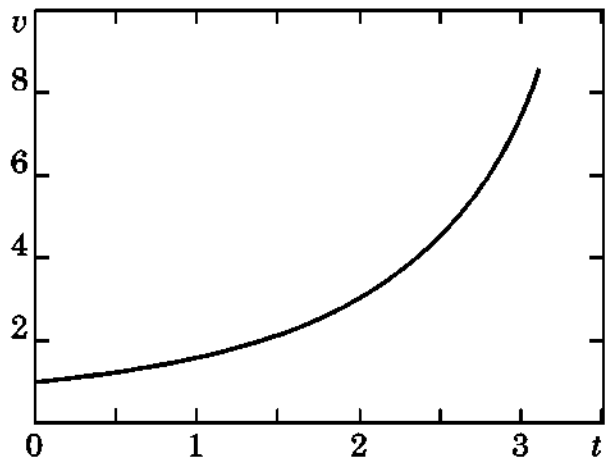


Рис. 8.15. Распределение средней по площади поверхности поперечного сечения соосного конического конфузора безразмерной скорости. Полууглы раскрытия границ, равны: $\theta_1 = 3°$, $\theta_2 = 15°$.

Анализ распределения безразмерного давления $\bar{\Pi}(t)$ начнем с рассмотрения течения при малых числах Рейнольдса, например, с числа $\mathrm{Re}_1 = 1$. Поскольку средняя по поперечному сечению канна-ла безразмерная скорость течения жидкости в соосном коническом конфузоре возрастает вдоль канала как квадратичная гипербола (рис. 8.15), и вблизи входа в канал относительное изменение средней скорости незначительно. Поэтому градиент среднего безразмерного давления в соответствии с зависимостью (8.89) будет слабо изменяться в начале течения и резко увеличиваться по абсолютной величине к выходу из канала (рис. 8.16а). Заметим, что уже при $\mathrm{Re}_1 = 1$ динамическая составляющая безразмерного градиента давления на выходе из ка-

нала имеет существенную величину. Это связано с тем, что число Re_1 определяется на входе в конфузор, где значение средней скорости жидкости имеет минимальное значение в рассматриваемом канале, и вниз по течению оно увеличивается, а вместе с ним растет и модуль инерционной составляющей безразмерного градиента дав-

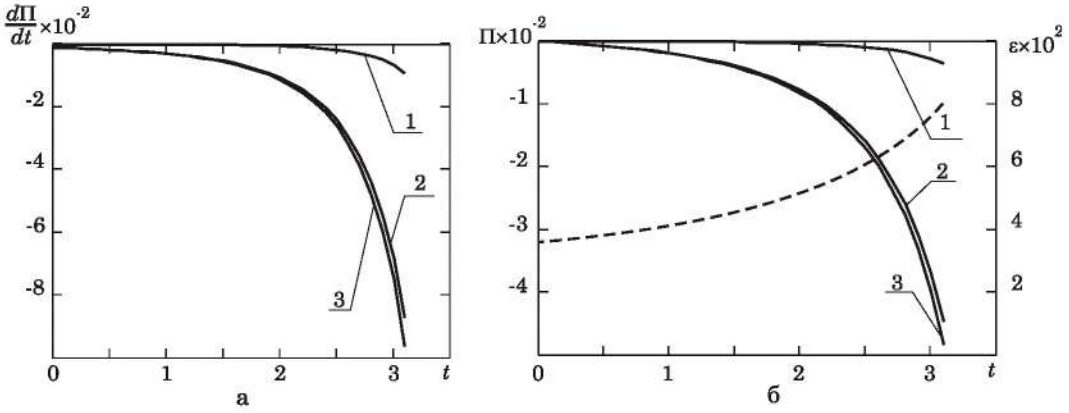


Рис. 8.16. Распределение вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ безразмерных величин при $\mathrm{Re}_1 = 1$: а – градиента среднего безразмерного давления и его составляющих; б – безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления и его составляющих – сплошные линии, штриховая линия – относительное отклонение среднего безразмерного давления от его диссипативной составляющей: 1 – динамическая составляющая; 2 – диссипативная составляющая; 3 – среднее безразмерное давление (б) и его градиент (а).

ления.

В отличие от диффузорного течения в рассматриваемом случае знак динамической составляю-щей градиента давления отрицательный, т.е. совпадает со знаком диссипативной его составляющей, поэтому модуль градиента безразмерного давления будет расти как за счет увеличения его диссипативной части, так и за счет увеличения динамической части (рис. 8.16).

В соответствии с распределением безразмерного градиента давления формируется функциональная зависимость среднего по поперечному сечению канала безразмерного давления от продольной координаты t. Распределение $\overline{\Pi}(t)$ является суммой распределения его динамической и диссипативной составляющих. Обе эти части имеют отрицательный знак. Вследствие этого учет инерцион-

ного члена при определении распределения безразмерного давления вдоль конфузорного течения увеличивает его абсолютную величину в отличие от течения диффузорного, в котором инерционная и диссипативная составляющие давления имеют разные знаки. В случае конфузорного течения увеличение среднего безразмерного давления при учете инерционных свойств связано с тем, что при увеличении скорости жидкости вдоль канала потенциальная энергия напряженного состояния жидкости переходит в кинетическую энергию ее движения в соответствии с законом Бернулли.

Относительное отклонение распределения среднего безразмерного давления, вычисленного с учетом инерционной силы, возникающей из-за увеличения средней скорости течения вдоль канала, характерной при конфузорных течениях, от распределения среднего безразмерного давления, которое определяется только трением на границах, не превышает в пределах канала 8 % (рис. 8.16б). Причины конечного относительного отклонения на входе в канал будут рассмотрены в следующем разделе.

При увеличении числа Рейнольдса до 5 инерционная составляющая градиента безразмерного давления очевидно возрастает в 5 раз, в то время как диссипавная составляющая градиента безразмерного давления остается прежней, т.е. возрастает влияние инерционных свойств течения на распределение давления в канале (рис. 8.17). Динамическая составляющая безразмерного градиента давления становится существенной на значительной части канала. Это приводит к тому, что увеличение модуля среднего безразмерного давления вдоль канала более существенно, чем увеличение модуля его диссипативной составляющей (рис. 8.17 б), и их относительное отклонение уже достигает в пределах канала величины в 40 %. А это означает, что расчет безразмерного давления, и также перепада давления без учета инерционных свойств течения при $Re_1 = 5$, может привести к большим погрешностям.

Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к росту относительного значения инерционной составляющей в распределении перепада давления вдоль канала.

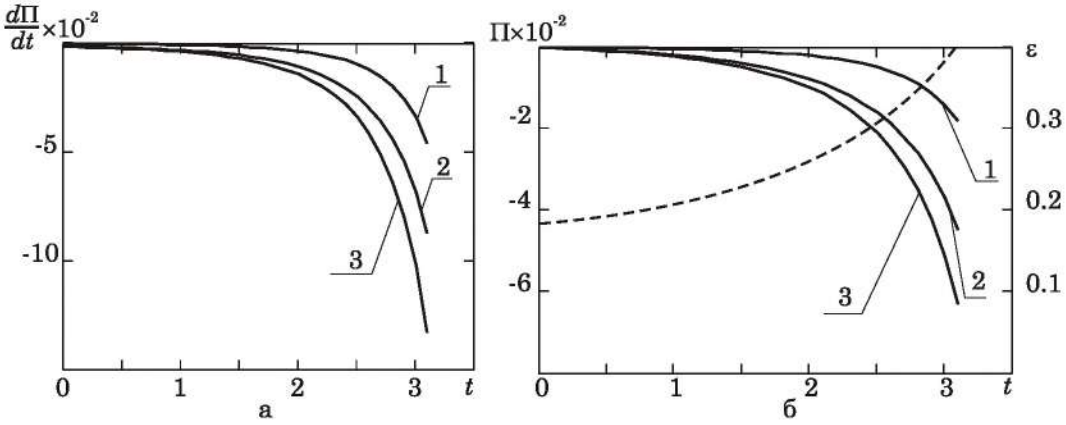


Рис. 8.17. Распределение вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ безразмерных величин при $Re_1 = 5$: а – градиента среднего безразмерного давления и его составляющих; б – безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления и его составляющих – сплошные линии, штриховая линия – относительное отклонение среднего безразмерного давления от его диссипативной составляющей: 1 – динамическая составляющая; 2 – диссипативная составляющая; 3 – среднее безразмерное давление (б) и его градиент (а).

При значении числа Рейнольдса, равном 15, на некотором расстоянии от входа в канал значение динамической составляющей безразмерного градиента давления становится равной величине его диссипативной составляющей, и далее вниз по течению превосходит ее, а это означает, что на оставшемся участке канала в течении будут преобладать инерционные силы над силами трения (рис. 8.18а).

Перепад давления в канале является величиной аддитивной, и поэтому равенство изменения безразмерного давления за счет трения и за счет увеличения скорости течения жидкости наступает несколько дальше по течению, чем у причин, вызвавших эти изменения (рис. 8.18). За координатой, где наблюдается указанное равенство, изменение безразмерного давления происходит в большей мере за счет изменения его динамической составляющей (рис. 8.18б). Модуль безразмерного давления на выходе из канала приблизительно в 2 раза больше модулей его составляющих в рассматриваемом случае.

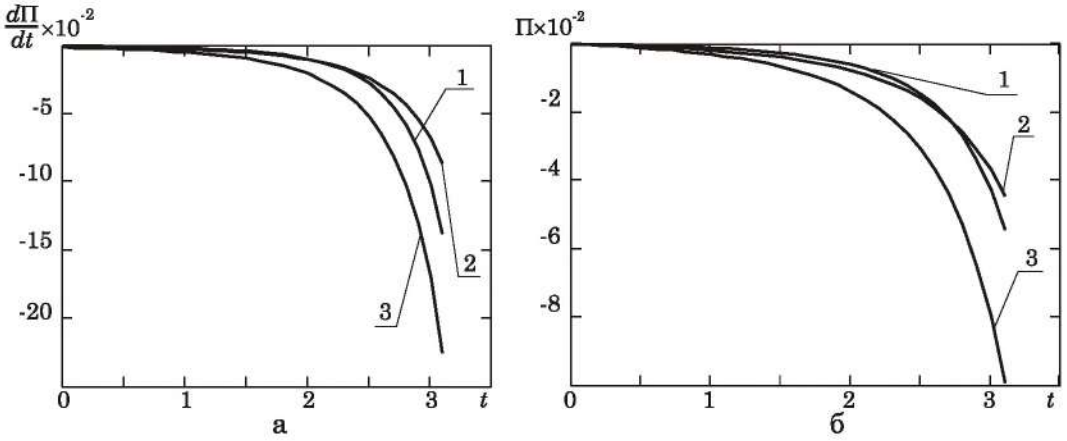


Рис. 8.18. Распределение вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ безразмерных величин при $Re_1 = 15$: а – градиента среднего безразмерного давления и его составляющих; б – безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления и его составляющих. 1 – динамическая составляющая; 2 – диссипативная составляющая; 3 – среднее безразмерное давление (б) и его градиент (а).

Увеличение числа Рейнольдса до 25 приводит уже к тому, что инерционная составляющая градиента безразмерного давления превосходит диссипативную его компоненту на всем участке течения (рис. 8.19 а). Поэтому основное изменение среднего безразмерного давления происходит за счет действия инерционных сил уже на всем протяжении канала, и на выходе из него модуль $\overline{\Pi}$ почти в три раза превышает модуль его диссипативной составляющей и почти в 1.5 раза больше модуля его динамической компоненты (рис. 8.19 б). Это говорит о том, что при расчете перепада давления для рассматриваемых условий необходимо учитывать обе его составляющих.

Последующее увеличение числа Re_1 до 50 приводит к тому, что основную часть распределения градиента безразмерного давления составляет его динамическая составляющая, а диссипативная составляющая вносит лишь малую добавку (рис. 8.20 а). В соответствии с распределением градиента безразмерного давления и его составляющих распределение среднего по поперечному сечению канала безразмерного давления близко к распределению своей динамической составляющей (рис. 8.20 б).

В данном случае с хорошим приближением можно оценить безразмерное давление на выходе из канала с помощью вычисления его инерционной компоненты.

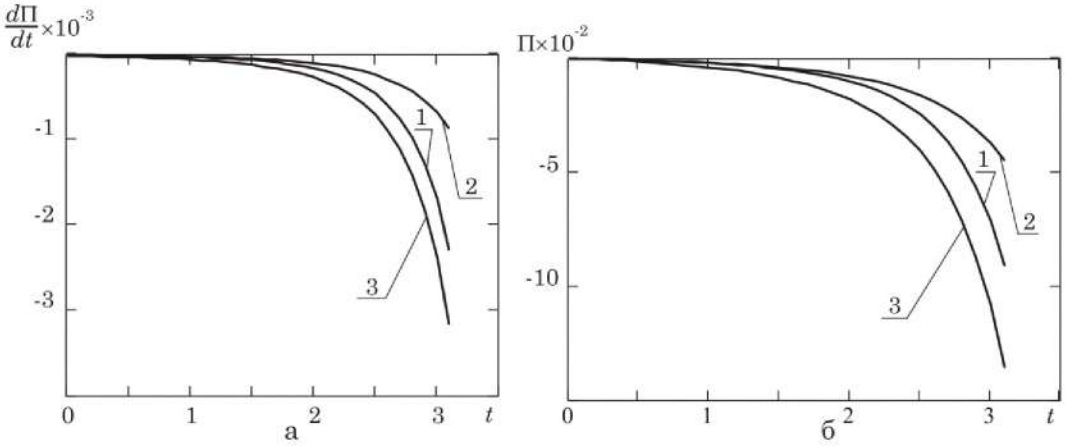


Рис. 8.19. Распределение вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ безразмерных величин при $Re_1 = 25$: а – градиента среднего безразмерного давления и его составляющих; б – безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления и его составляющих. 1 – динамическая составляющая; 2 – диссипативная составляющая; 3 – среднее безразмерное давление (б) и его градиент (а).

Таким образом, анализ распределения безразмерного давления, его градиента и их составляющих в зависимости от величины числа Рейнольдса показал, что существуют числа Re_1, вплоть до которых при расчете безразмерного среднего по поперечному сечению соосного конического конфузора с общей вершиной границ давления, в случае ламинарного течения, можно пренебречь инерционной силой, возникающей вследствие увеличения скорости жидкости вдоль канала. Мы также видели, что существует диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого необходимо учитывать как влияние трения, так и влияние динамической составляющей при расчете безразмерного давления, а значит и перепада давления в конфузоре.

Приведенные на рисунках распределения безразмерного давления показывают также, что существуют числа Рейнольдса, при превышении которых можно пренебречь силой трения, вычис-

ляя безразмерное давление, а значит и перепад давления в конфузоре.

Определением указанных чисел Рейнольдса в зависимости от других параметров задачи мы и займемся в следующем разделе данной главы.

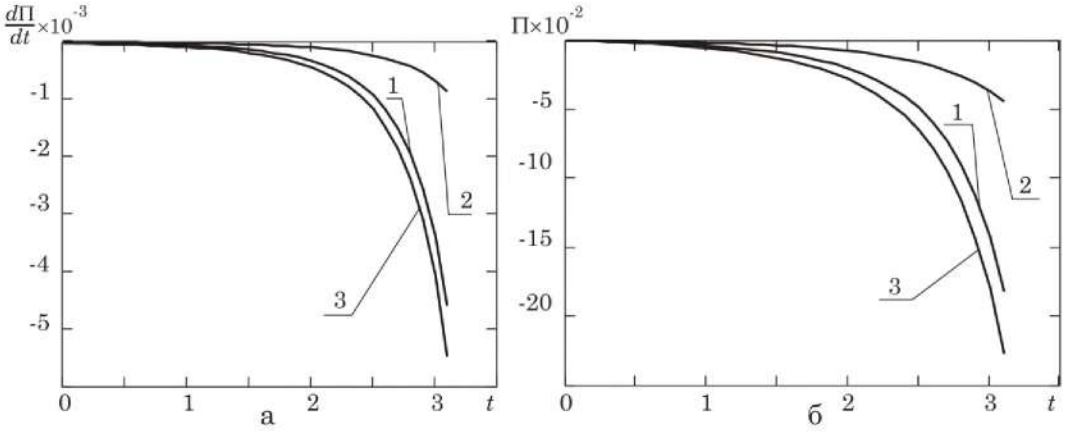


Рис. 8.20. Распределение вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ безразмерных величин при $Re_1 = 50$: а – градиента среднего безразмерного давления и его составляющих; б – безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления и его составляющих. 1 – динамическая составляющая; 2 – диссипативная составляющая; 3 – среднее безразмерное давление (б) и его градиент (а).

8.10. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь инерционными свойствами ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале при вычислении перепада давления

И ум, и мир, как плащ одеты
на плечи старого числа...

В. Хлебников

С помощью полученного нами распределения безразмерного давления при течении жидкости в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ (8.84), которое является суммой динамической и диссипативной его компонент, мы можем определить крити-

ческие значения числа Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать динамической частью при вычислении безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления, а значит и размерного перепада давления $\Delta\bar{P}$ в канале. Для этого введем относительное отклонение среднего безразмерного давления $\bar{\Pi}$, вычисленного с учетом инерционных свойств (8.84) от $\bar{\Pi}$, рассчитанного без такого учета (3.32), т.е. при $\mathrm{Re}_1 = 0$ в (8.84)

$$\varepsilon_F(t) = \left| \frac{\bar{\Pi} - \bar{\Pi}_{dis}}{\bar{\Pi}_{dis}} \right|. \tag{8.91}$$

Мы видели на рисунках 8.16 и 8.17, что зависимость $\varepsilon_F(t)$ является монотонной функцией, а это значит, что функция $\varepsilon_F(t)$ принимает свои минимальное и максимальное значения на границах интервала определения. Найдем, на какой из границ интервала определения $\varepsilon_F(t)$, т.е. $[0, \xi_1 - \xi_0]$, функция (8.91) принимает максимальное значение, а на какой – минимальное, и определим эти величины. Сначала определим значение $\varepsilon_F(0)$, т.е. на входе в канал. Выполняя подстановку выражений, определяющих $\bar{\Pi}$ и $\bar{\Pi}_{dis}$, в (8.91) перепишем его в виде

$$\varepsilon_F(t) = \left| \frac{3\mathrm{Re}_1 \xi_1^3 \left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} \right)^4 \right]}{2\left(\lambda_C + 6\xi_1^2 \right) \left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} \right)^3 \right]} \right|, \tag{8.92}$$

и если в него вместо t подставить значение 0, то получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности вычислим предел $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_F(t)$, применяя правило Лопиталя [117]

$$\varepsilon_F(0) = \lim_{t \to 0} \varepsilon_F(t) = \frac{3\mathrm{Re}_1 \xi_1^3}{2\left(\lambda_C + 6\xi_1^2 \right)} \lim_{t \to 0} \left| \frac{1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} \right)^4}{1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} \right)^3} \right| \Rightarrow$$

(8.93)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Правило} \\ \text{Лопиталя} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{3\,\mathrm{Re}_1\,\xi_1^3}{2\left(\lambda_C + 6\xi_1^2\right)}.$$

И если воспользоваться приближением (7.81) для вычисления постоянной разделения λ_C, то (8.93) можно преобразовать к более простому виду

$$\varepsilon_F(0) = \frac{\mathrm{Re}_1}{6\xi_1}. \tag{8.94}$$

Заметим, что использование правила Лопиталя при нахождении предела (8.93) имеет вполне определенный физический смысл, поскольку отношение давлений при определенной координате, в данном случае это координата входа, заменяется на отношение их градиентов. С этим связана и конечная величина относительного отклонения среднего по сечению безразмерного давления от его диссипативной составляющей на входе в канал (рис. 8.16б). В то время, как $\bar{\Pi}(0) = 0$ и $\bar{\Pi}_{dis}(0) = 0$, их градиенты на входе в канал имеют конечную величину, поэтому и $\varepsilon_F(0)$ отлично от 0. Это же замечание можно отнести и к использованию правила Лопиталя в разделах 8.5 и 8.6.

На второй границе области определения $\varepsilon_F(t)$, т.е. на выходе из канала, определим ε_F, подставляя значение $t = \xi_1 - \xi_0$ в (8.92)

$$\varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0) = \left| \frac{3\,\mathrm{Re}_1\,\xi_1^3\left(1 - \dfrac{\xi_1^4}{\xi_0^4}\right)}{2\left(\lambda_C + 6\xi_1^2\right)\left(1 - \dfrac{\xi_1^3}{\xi_0^3}\right)} \right|. \tag{8.95}$$

Сравнение значений (8.95) с (8.93) или (8.94) достаточно сложно без прямого вычисления, но мы можем сделать оценку величины (8.95) на выходе из канала, т.е. при $\xi = \xi_0$. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{\xi_1 \to \xi_0} \varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0)$. Прямая подстановка ξ_0 вместо ξ_1 в

(8.95) приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую раскроем с помощью правила Лопиталя

$$\varepsilon_F(\xi_0) = \lim_{\xi_1 \to \xi_0} \varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0) = \lim_{\xi_1 \to \xi_0} \left| \frac{3\mathrm{Re}_1 \xi_1^3 \left(1 - \frac{\xi_1^4}{\xi_0^4}\right)}{2\left(\lambda_C + 6\xi_1^2\right)\left(1 - \frac{\xi_1^3}{\xi_0^3}\right)} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Правило} \\ \text{Лопиталя} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{3\mathrm{Re}_1 \xi_0^3}{2\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)}. \tag{8.96}$$

Далее используя выражение (6.111) для приближенного вычисления λ, получим

$$\varepsilon_F(\xi_0) = \frac{\mathrm{Re}_1}{6\xi_0}. \tag{8.97}$$

В данном случае необходимо учитывать, что ξ_0 определяется в соответствие с (8.65), т.е. за масштаб линейного размера принята ширина канала на его входе, поэтому значение ξ_0 будет всегда меньше, чем ξ_1, т.е. $\xi_0 < \xi_1$, а это значит, что всегда выполняется неравенство

$$\varepsilon_F(\xi_0) > \varepsilon_F(0), \tag{8.98}$$

что вполне согласуется с данными, представленными на рисунках 8.15 и 8.16.

Если в качестве значимой величины относительного отклонения $\bar{\Pi}$, вычисленного с учетом характерной для конфузорного течения силы инерции от $\bar{\Pi}$, определенного без такого учета, выбрать значение в n %, то мы можем записать, что при выполнении неравенства

$$\mathrm{Re}_1 \le \frac{6}{100} n \xi_0 \tag{8.99}$$

можно при вычислении безразмерного давления $\bar{\Pi}$ для ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале с общей

вершиной границ пренебречь инерционной составляющей давления. Выбирая для n величину равную 1 % из (8.99), получаем

$$\mathrm{Re}_1 \le 0.06\xi_0 . \qquad (8.100)$$

При выполнении условия (8.100) вычисление безразмерного среднего по площади поперечного сечения канала давления $\bar{\Pi}$ без учета динамической составляющей приводит к погрешности, величина которой не превышает 1 %.

8.11. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь трением при вычислении перепада давления в ламинарном конфузорном течении жидкости в соосном коническом канале с общей вершиной границ

Сущность всех вещей есть число.

Пифагор

В предыдущем разделе мы по сути дела определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором при расчете безразмерного давления $\bar{\Pi}$ по (8.84) можно не учитывать величину первого члена. И очевидно, что существуют такие значения чисел Re_1, при которых можно пренебрегать значением второго слагаемого в (8.84). На рисунке 8.19 мы видели, что уже при $\mathrm{Re}_1 = 50$ изменение безразмерного давления вдоль ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале происходит за счет динамической его составляющей. При больших значениях Re_1 трением в расчетах перепада давления, по-видимому, можно будет пренебречь. Определим критическое значение числа Re_1, при котором второй член (8.84) будет несущественен в расчетах, и зависимость этого числа от основных параметров канала. Для этого воспользуемся определением относительного отклонения среднего безразмерного давления от его динамической составляющей (8.48), которая в конфузорном течении определится как

$$\bar{\Pi}_{din} = \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right]. \tag{8.101}$$

Подставляя в (8.48) выражения (8.84) и (8.101), получаем

$$\varepsilon_D(t) = \left| \frac{2\left(\lambda_C + 6\xi_1^2\right)\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right]}{3\,\mathrm{Re}_1\,\xi_1^3\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right]} \right|. \tag{8.102}$$

Сравнивая (8.102) и (8.92), находим соотношение

$$\varepsilon_D(t) = \frac{1}{\varepsilon_F(t)}, \tag{8.103}$$

аналогичное (8.51). Следовательно, там, где величина ε_F имеет минимальное значение, ε_D имеет максимальное значение и наоборот. Это понятно потому, что $\bar{\Pi}$ является суммой двух слагаемых, и там, где сумма имеет минимальное относительное отклонение от одного из них, она будет иметь максимальное относительное отклонение от другого.

Если ввести величину значимого отклонения равную n %, то критическое значение числа Рейнольдса, при превышении которого можно пренебрегать трением, рассчитывая безразмерное давление в конфузоре, будет определяться из соотношения

$$\varepsilon_D \le \frac{n}{100}. \tag{8.104}$$

Понятно, что для того, чтобы Re_1, определенное из (8.104), было действительно для всей длины канала, мы должны выбрать наибольшее значение ε_D. Исходя из (8.98) и (8.103), наибольшим в пределах канала ε_D будет величина

$$\varepsilon_D = \frac{1}{\varepsilon_F(0)}. \tag{8.105}$$

Подставляя в (8.105) значение (8.94) и используя (8.104), находим критическое значение числа Re_1

$$\mathrm{Re}_1 \geq \frac{600}{n}\xi_1 = \frac{600}{n}\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1), \qquad (8.106)$$

и, если выбрать n = 1 %, то получим

$$\mathrm{Re}_1 \geq 600\xi_1 = 600\,\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1). \qquad (8.107)$$

Итак, мы определили диапазоны изменения чисел Рейнольдса Re_1, в которых при расчете среднего по площади поперечного сечения канала безразмерного давления для ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной границ можно пренебречь одной из его составляющих, либо необходимо учитывать обе. Выбирая существенным значением относительного отклонения безразмерного давления от его составляющих величину, равную n %, запишем диапазоны для критических чисел Рейнольдса:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}_1 \leq \dfrac{6n}{100}\xi_0; & \text{можно пренебрегать динамической составляющей,} \\ \dfrac{6n}{100}\xi_0 \leq \mathrm{Re}_1 \leq \dfrac{600}{n}\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1); & \text{необходимо учитывать обе составляющие,} \\ \mathrm{Re}_1 \geq \dfrac{600}{n}\mathrm{ctg}(\theta_2 - \theta_1), & \text{можно пренебрегать диссипативной составляющей.} \end{cases} \qquad (8.108)$$

8.12. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических диффузорах с общей вершиной его границ, рассчитанной с учетом инерционных свойств

Этот каторжный инженерный путь называется у них, кажется, логикой и последовательностью и обязателен для тех, кто хочет быть умным; для всех остальных он не обязателен, и они могут блуждать как им угодно.

Л. Андреев

Используя решение, полученное для задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с учетом характерной для диффузорных течений инерционной силы (8.21), построим расходно-напорную характеристику таких каналов при ламинарных течениях. Учитывая безразмерные параметры (8.1) и следуя правилу, представленному в (2.78), получим расходно-напорную характеристику для соосного конического диффузора с общей вершиной границ и определенного параметрами: шириной канала на входе – h_0, полууглами раскрытия внутренней и внешней границ – θ_1, и θ_2, радиальной координатой выхода из канала – R_1. Непосредственно из (8.21) имеем

$$\Delta\bar{P}(Q)=\frac{\rho Q^2\operatorname{tg}^4(\theta_2-\theta_1)}{8\pi^2h_0^4(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2}\left[1-\frac{h_0^4\operatorname{ctg}^4(\theta_2-\theta_1)}{R_1^4}\right]+$$

$$+\frac{\mu Q\left[6+\lambda\operatorname{tg}^2(\theta_2-\theta_1)\right]}{6\pi h_0^3(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\operatorname{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}\left[\frac{h_0^3\operatorname{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}{R_1^3}-1\right]. \qquad (8.109)$$

В разделах 8.1–8.7 данной главы мы с помощью полученного в безразмерном виде решения проанализировали наиболее общие свойства ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ. Сейчас мы рассмотрим зависимость перепада давления в конкретном канале с заданными размерами и для конкретных физических свойств жидкости. Пусть канал определяется следующими геометрическими параметрами: $h_0 = 0.01$ м, $\theta_2 - \theta_1 = 21°$, и будем считать, что координата выхода из канала больше координаты входа в три раза, т.е. выполняется отношение

$$\frac{R_1}{h_0\operatorname{ctg}(\theta_2-\theta_1)}=3.$$

Для однозначного определения геометрии канала нам необходимо задать еще значение одного из полууглов раскрытия границ. Чтобы не ограничивать себя каким-нибудь одним значением перепада давления, мы построим зависимость $\Delta\bar{P}(Q,\theta_2)$, т.е. расходно-напорную характеристику при изменении значения полуугла

раскрытия внешней границы при остальных заданных геометрических характеристиках. Физические свойства жидкости будем считать равными: $\rho = 1200$ кг/м^3, $\mu = 10$ Па·с. Предположим, что объемный расход жидкости изменяется в интервале $0 \ldots 1 \times 10^{-2}$ м^3/с.

В пределах изменения расхода жидкости расходно-напорная характеристика (8.109) не для всех значений полуугла раскрытия θ_2

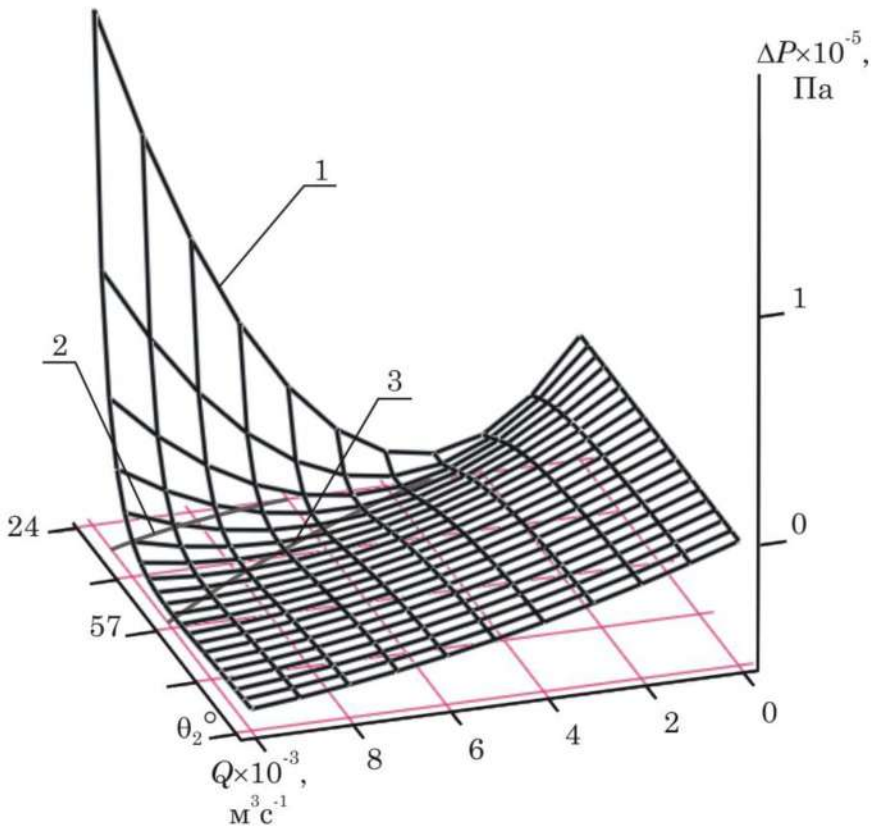


Рис. 8.21. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с общей вершиной границ при ламинарном течении в зависимости от полуугла раскрытия внешней границы θ_2 и постоянной разностью полууглов раскрытия внешней и внутренней границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$ и отношением радиальной координаты входа к координате выхода $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала на входе – $h_0 = 0.01$ м – 1; 2 – линия в области определения функции $\Delta\bar{P}(Q,\theta_2)$, на которой перепад давления в канале равен 0; 3 – линия максимального по абсолютной величине отрицательного перепада давления.

является монотонной функцией (рис. 8.21). Видно, что при значениях θ_2, находящихся в интервале [24°, 57°], функция $\Delta\bar{P}(Q)$ немонотонная. Это происходит вследствие того, что при малых расходах, а значит и малых значениях числа Re, инерционные свойства течения пренебрежимо малы, и с увеличением расхода Q перепад давления увеличивается за счет трения на границах.

Значения $\Delta\bar{P}$ при этом отрицательны и течение происходит в сторону уменьшения давления. В соответствии с (8.47), число Рейнольдса, до которого можно не учитывать инерционную составляющую давления при расчете перепада давления с точностью, не превышающей 5 % погрешности, равно $\mathrm{Re} = 0.3\mathrm{ctg}(\Delta\theta) = 0.78$.

Дальнейшее увеличение расхода приводит к большему перепаду давления, но также и к увеличению числа Re, а значит и увеличению влияния инерционных свойств. При некотором значении расхода Q перепад давления $\Delta\bar{P}$ достигает своего максимума. Для $\theta_2 = 24°$ это значение $Q \approx 3\times10^{-3}$ м^3/с (рис. 8.21), что приблизительно соответствует значению числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 10$ (рис. 8.22). Мы видим, что для различных θ_2, в нашем случае, минимальные значения распределения $\Delta\bar{P}(Q)$, т.е. максимальный перепад давления, достигаются на различных значениях расхода Q. Визуально мы можем видеть, что этим расходам соответствуют числа Рейнольдса, близкие к 10 (рис. 8.22).

Дальнейшее увеличение расхода жидкости ведет к уменьшению абсолютного значения перепада давления $\Delta\bar{P}$ в канале. Это происходит вследствие увеличения влияния характерной для диффузорного течения инерционной силы. В соответствии с (8.35), начиная с чисел $\mathrm{Re} = 6\xi_0 \approx 15.6$, что соответствует для $\theta_2 = 24°$ расходу $\sim 4\times10^{-3}$ м^3/с, в изменении давления становятся преобладающими инерционные силы. Затем на некотором значении объемного расхода Q перепад $\Delta\bar{P}$ становится равным 0. Как видно из рисунка 8.21 для $\theta_2 = 24°$ это происходит при $Q \approx 6\times10^{-3}$ м^3/с или при $\mathrm{Re} \approx 18$. Из последних рисунков также видно, что значение $\Delta\bar{P} = 0$ для различных значений полуугла раскрытия внешней границы θ_2 будет достигаться при разных значениях Q и Re. Дальнейшее увеличение

значений расхода уже приведет к тому, что течение в канале, в целом, будет происходить в сторону увеличения давления и ΔP будет

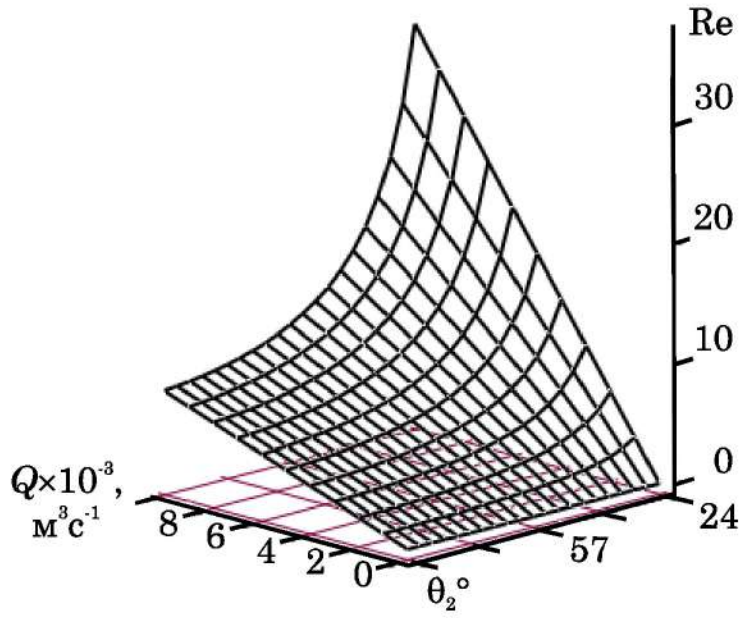


Рис. 8.22. Зависимость числа Рейнольдса на входе в соосный конический диффузор с общей вершиной от объемного расхода жидкости и полууугла раскрытия внешней границы θ_2 при постоянной разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$и для ширины канала на входе $h_0 = 0.01$ м .

положительной величиной (рис. 8.22).

С помощью расходно-напорной характеристики канала при ламинарном течении (8.109) можно получить функциональные зависимости расходов Q от параметров задачи, для которых перепад давления будет иметь максимальный модуль при отрицательном значении, а также значения расхода, для которых перепад давления будет равен 0. Действительно, (8.109) мы можем записать в виде

$$\Delta\bar{P}(Q) = AQ^2 + BQ, \qquad (8.110)$$

где A и B легко идентифицируются при сравнении (8.110) и (8.109).

Значение расхода, при котором достигается максимальный отрицательный перепад давления, определим из условия

$$\frac{d\left[\Delta\bar{P}(Q)\right]}{dQ}=0, \tag{8.111}$$

откуда получаем

$$Q_{\Delta\bar{P}}=-\frac{B}{2A}= \tag{8.112}$$

$$\frac{-3\rho\,\mathrm{tg}(\theta_2-\theta_1)\left[R_1^4-h_0^4\,\mathrm{ctg}^4(\theta_2-\theta_1)\right]}{8\pi\mu h_0(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\left[6+\lambda\,\mathrm{tg}^2(\theta_2-\theta_1)\right]\left[h_0^3\,\mathrm{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)-R_1^3\right]R_1}.$$

Значение расхода, при котором выполняется условие $\Delta\bar{P}=0$, также получаем из (8.110)

$$Q^*_{\Delta\bar{P}}=-\frac{B}{A}=2Q_{\Delta\bar{P}}. \tag{8.113}$$

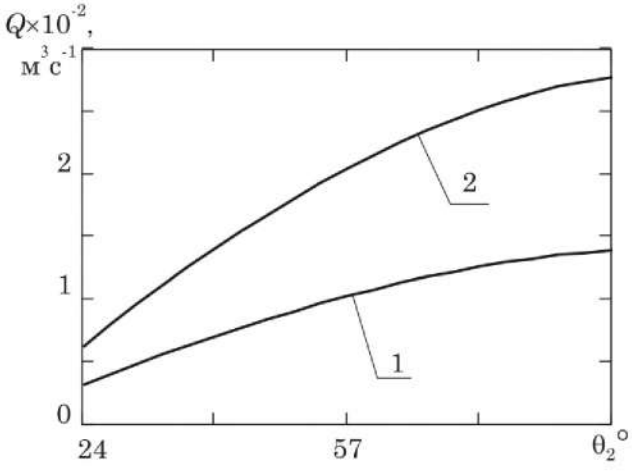


Рис. 8.23. Зависимость объемного расхода жидкости через соосный конический диффузор, при котором наблюдается максимальный по модулю отрицательный перепад давления –1; 2 – расход, при котором наблюдается нулевой перепад давления в канале.

При увеличении полуугла раскрытия θ_2 и при постоянной разности θ_2 - θ_1 будут увеличиваться и значения $Q_{\Delta\bar{P}}$ и $Q^*_{\Delta\bar{P}}$ (рис. 8.21, рис. 8.23). Это происходит потому, что при росте θ_2 будет увеличиваться и площадь поверхности поперечного сечения канала, а значит при одинаковых Q будет уменьшаться средняя по поперечному сечению скорость $\bar{V}$ (2.17) и значит число Рейнольдса, т.е. при больших θ_2 необходим и

больший расход жидкости, чтобы достичь тех чисел Re, при которых влияние инерционных сил будет соответствовать их влиянию при малых значениях θ_2.

Заметим, что мощность, необходимая на поддержание заданного расхода в диффузоре, в котором напорно-расходная зависимость была найдена с учетом характерной инерционной силы, будет определяться выражением (2.79). Но если необходимо рассчитать мощность на валу перекачивающего устройства, в гидравлической системе которого присутствует диффузор необходимо также учесть мощность создания динамического напора, т.е. мощность, идущую на разгон жидкости, но это происходит в проточных частях системы, расположенных до диффузора, и поэтому здесь мы ее не рассматриваем

8.13. Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосных конических конфузорах с общей вершиной границ, рассчитанная с учетом инерционных свойств

Коль знанием овладел, дари его другим;
Костру, что сам в душе зажег, не дай растаять в дым.

Джами

Для получения расходно-напорной характеристики конфузорного ламинарного течения с существенными характерными для конфузорных течений силами инерции в соосных конических каналах преобразуем зависимость (8.84) в размерный вид с помощью определений (8.65) и (3.2). В результате запишем

$$\Delta\bar{P}(Q)=\frac{\rho Q^2\,\mathrm{tg}^4(\theta_2-\theta_1)}{8\pi^2 h_0^4(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2}\left[1-\frac{h_0^4}{R_0^4\,\mathrm{tg}^4(\theta_2-\theta_1)}\right]+$$

$$+\frac{\mu Q\left[6+\lambda\,\mathrm{tg}^2(\theta_2-\theta_1)\right]}{6\pi h_0^3(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\,\mathrm{ctg}^3(\theta_2-\theta_1)}\left[1-\frac{h_0^3}{R_0^3\,\mathrm{tg}^3(\theta_2-\theta_1)}\right]. \qquad (8.114)$$

Рассмотрим зависимость (8.114) для канала с конкретными геометрическими размерами и для жидкости с заданными физическими свойствами. Предположим, что ширина конфузорного канала на его входе равна $h_0 = 0.02$ м, разность между полууглами раскрытия граничных конических поверхностей возьмем равной $\theta_2 - \theta_1 = 21°$, радиальная координата выхода из конфузора меньше координаты входа в 3 раза, т.е. $\dfrac{h_0 \operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1)}{R_0} = 3$. Для исследования примем, что полуугол раскрытия внешней границы канала изменяется от 24° до 90°. Физические свойства жидкости, также как и в предыдущем разделе, будем считать равными $\rho = 1200$ кг/м^3, $\mu = 10$ Па·с. Исследуем зависимость $\Delta\bar{P}(Q)$ в пределах изменения объемного расхода жидкости $Q = 0\ldots5\times10^{-3}$ м^3/с.

Расходно-напорная характеристика (8.114) существенно отличается от характеристики диффузорного течения, рассмотренной в предыдущем разделе настоящей главы. Заметим, что распределение значений чисел Рейнольдса в зависимости от объемного расхода жидкости Q и полуугла раскрытия θ_2 (рис. 8.24) аналогично рас-

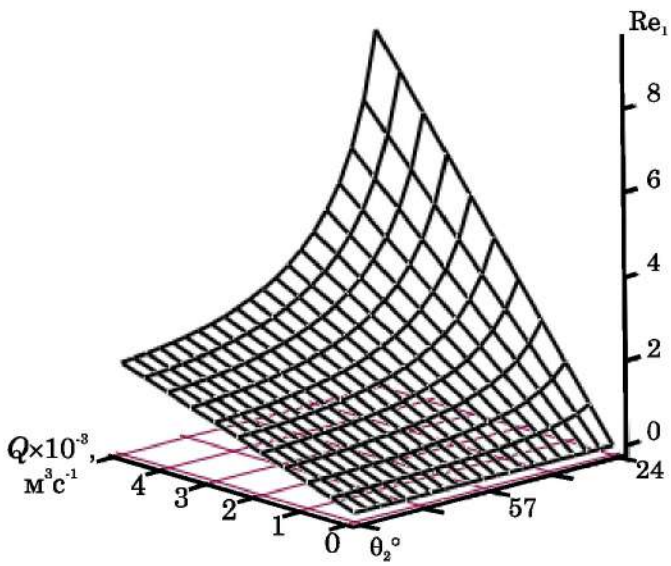


Рис. 8.24. Зависимость числа Рейнольдса на входе в соосный конический конфузор с общей вершиной от объемного расхода жидкости и полуугла раскрытия внешней границы θ_2 при постоянной разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$и для ширины канала на входе – $h_0 = 0.02$ м .

пределению при диффузором течении (рис. 8.22), хотя значения Re_1 меньше, чем Re по причине, которую мы уже отметили ранее (см. стр. 326), а также мы для рассмотрения характеристики в конфузоре диапазон изменения Q уменьшили в два раза по сравнению с анализом характеристики для диффузорного течения.

Расходно-напорная зависимость при конфузорном течении является монотонно убывающей функцией для всего возможного диапазона значений полуугла раскрытия внешней границы θ_2 (рис. 8.25).

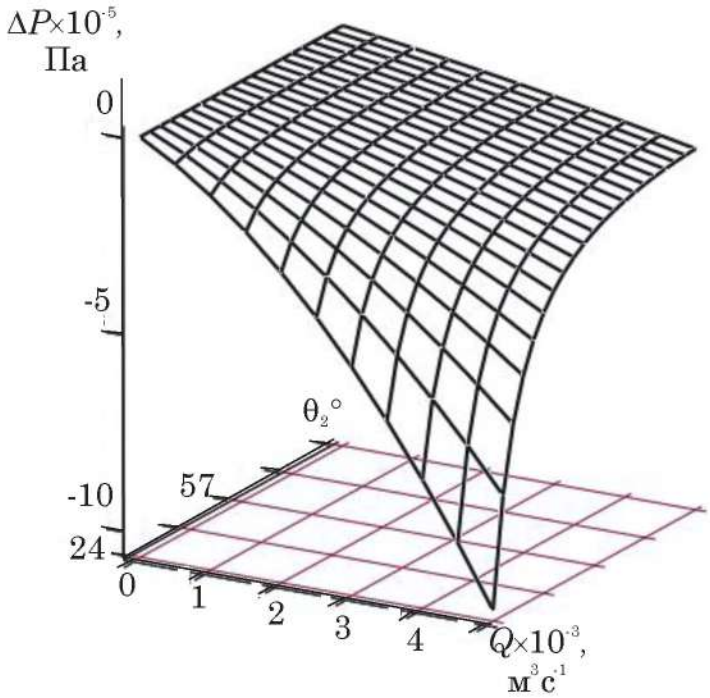


Рис. 8.25. Расходно-напорная характеристика соосного конического кофузора с общей вершиной границ при ламинарном течении в зависимости от полуугла раскрытия внешней границы θ_2 и постоянной разностью полууглов раскрытия внешней и внутренней границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$ и отношением радиальной координаты входа к координате выхода $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала на входе – $h_0 = 0.02$ м.

Это происходит вследствие того, что увеличение объемного расхода жидкости приводит к увеличению перепада давления в ка-

нале как за счет трения на границах канала, так и за счет перехода потенциальной энергии напряженного состояния жидкости в ее кинетическую энергию, т.е. динамическая составляющая давления увеличивается по модулю, с увеличением Q будучи отрицательной (рис. 8.26).

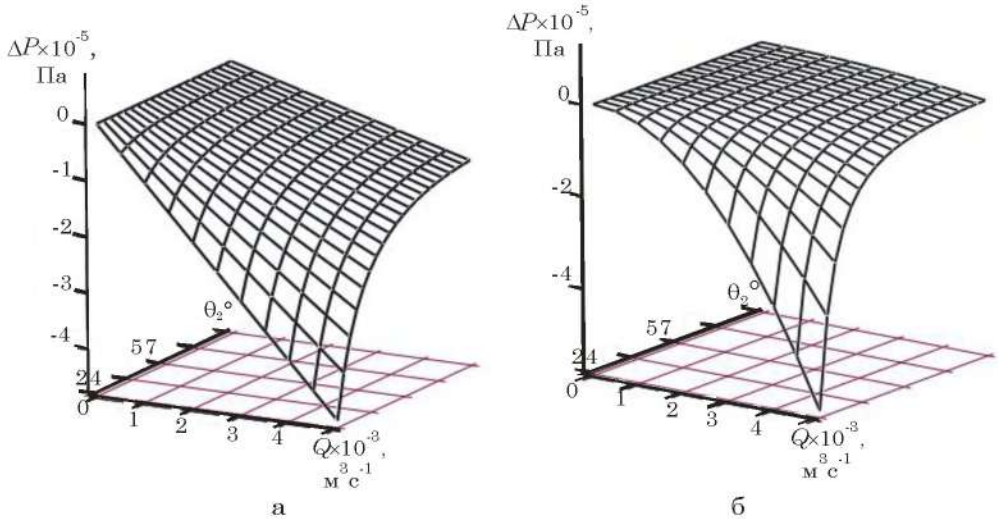


Рис. 8.26. Компоненты расходно-напорной характеристики соосного конического конфузора с общей вершиной границ при ламинарном течении в зависимости от полууугла раскрытия внешней границы θ_2 и постоянной разностью полууглов раскрытия внешней и внутренней границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$ и отношением радиальной координаты входа к координате выхода $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала на входе – $h_0 = 0.02$ м: а – диссипативная составляющая; б – динамическая составляющая.

Мощность, необходимая для обеспечения заданного расхода в соосном коническом конфузоре при течении с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса, т.е. при ползущем течении будет определяться выражением (2.79), где $\Delta\bar{P}(Q)$ – перепад давления, обусловленный трением жидкости на границах канала. Зависимость $N(Q)$, также как и при диффузорном течении будет нелинейная (рис. 8.27). В остальном же она подобна напорно-расходной зависимости для рассмотренного течения.

В случае течения в соосном коническом конфузоре с существенной характерной инерционной силой, мощность для обеспече-

ния заданного расхода жидкости необходимо рассчитывать с учетом динамической составляющей перепада давления, поскольку именно в конфузоре происходит ускорение жидкости. Следовательно функция $N(Q)$ определится выражением

$$N(Q) = \left|\Delta\bar{P}(Q)\right| \times Q, \tag{8.115}$$

где $\Delta\bar{P}(Q)$ определяется выражением (8.114). В данном случае зависимость $N(Q)$ существенно более нелинейная, чем функция $\Delta\bar{P}(Q)$ (рис. 8.27).

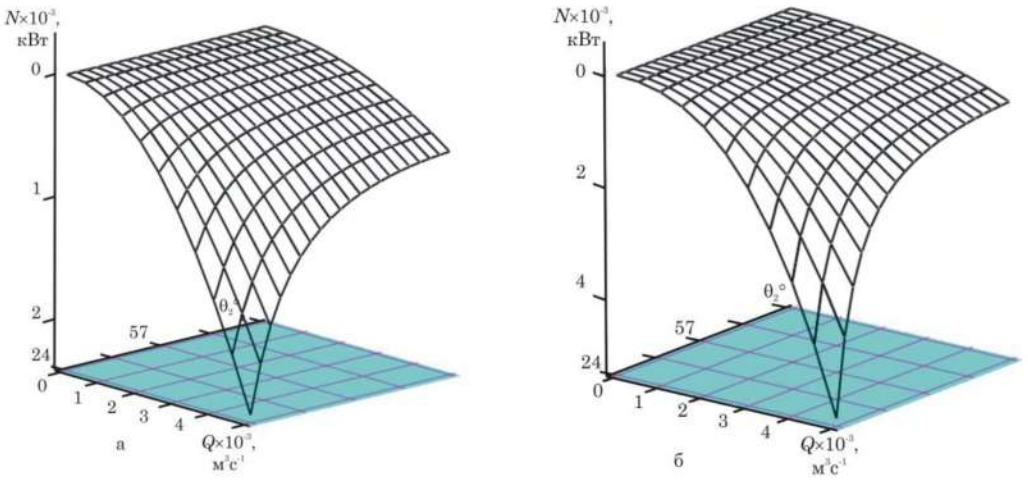


Рис. 8.27. Мощность, необходимая для обеспечения заданного расхода при ламинарном течении в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ в зависимости от полуугла раскрытия внешней границы θ_2 и постоянной разностью полууглов раскрытия внешней и внутренней границ $\theta_2 - \theta_1 = 21°$ и отношением радиальной координаты входа к координате выхода $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала на входе – $h_0 = 0.02$ м: а – течение с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса; б – расчет с учетом характерной инерционной силы.

ГЛАВА 9

АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ

Их следует добавить к геометрии для того, чтобы вообще можно было говорить о какой-либо физике.

Ч. Мизнер, Дж. Уилер

9.1. Замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических каналах постоянной ширины и учетом инерционных свойств

Это займет, впрочем, не много времени и места, потому что не много нужно прибавить к тому, что читатель уже знает...

Н.В. Гоголь

В главе 4 мы уже отмечали, что публикаций, посвященных исследованию ламинарного течения в соосных конических каналах, крайне мало, это же относится и к работам, рассматривающим течение с учетом инерционных свойств. А если ограничиться каналами постоянной ширины, то к ранним работам в этом направлении можно отнести только публикации [125, 126].

Для решения уравнений движения жидкости авторы указанных работ используют регулярные разложения безразмерной скорости жидкости и безразмерного давления по степеням числа Рейнольдса, что является некоторым обобщением метода разложения по малому параметру на системы дифференциальных уравнений в частных производных. Использование данного подхода к решению уравнений гидродинамики правомерно только при исчезающе ма-

лых значениях чисел Рейнольдса, что вполне оправдано в задачах, для которых были проведены исследования [125, 126]. В этих работах изучались течения в очень тонких щелевых системах, применяемых в космической технике.

Автор данной монографии в работах [31, 33] исследовал ламинарные течения в соосных конических каналах постоянной ширины с учетом инерционных свойств на основе уравнений Озеена, записанных в биконической системе координат. Дальнейшее изложение материала в настоящей главе является естественным углублением и развитием результатов работ [31, 33].

9.2. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины и с частичным учетом инерционных свойств

Представляется непоследовательным употребление футов для измерения ширины шоссе и миль для измерения его длины.

Дж. Уилер

Так же, как и в течениях, рассмотренных в предыдущей главе при диффузорном течении в соосных конических каналах постоянной ширины, практически всегда инерционная сила, действующая на жидкость, будет отлична от нуля. Это происходит вследствие того, что вдоль канала средняя скорость течения жидкости изменяется. При диффузорном течении скорость уменьшается вследствие увеличения площади поверхности поперечного сечения канала. Инерционную силу, возникающую вследствие изменения средней по площади поперечного сечения соосного конического диффузора, будем называть характерной инерционной силой, появляющейся при ламинарном течении жидкости в соосном коническом диффузоре.

В настоящем разделе данной главы мы дадим математическую формулировку задачи ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в соосном коническом диффузоре постоянной ширины и с учетом инерционных свойств течения.

Геометрия соосного конического диффузора постоянной ширины представлена в главе 1 на рис. 1.6. Там получены уравнения стационарного ламинарного движения жидкости в биконической системе координат в наиболее общем виде, т.е. записанные в терминах напряжений (1.41)–(1.43). После этого для практически интересных случаев течения в соосных конических каналах были выполнены оценки величины членов в уравнениях, описывающих течения несжимаемой ньютоновской жидкости в таких каналах. В результате, для осесимметричного стационарного ламинарного течения жидкости в соосных конических диффузорах постоянной ширины была записана, с учетом сделанных оценок и предложений, упрощенная система уравнений гидродинамики (1.56), (1.57) с условиями однозначности, записанными в (1.63)–(1.65).

Для того, чтобы получить наиболее общие характеристики течения жидкости в рассматриваемых каналах, независящие от конкретных свойств жидкости или размеров канала, решим задачу ламинарного течения (1.56), (1.57), (1.63)–(1.65) в безразмерных координатах. Используем для этого безразмерные переменные и параметры, следующие непосредственно из указанных уравнений, и которыми мы уже пользовались в главе 4 (4.5), но с дополнительным безразмерным критерием – числом Рейнольдса:

$$\xi = \frac{R}{h};\ \chi = \frac{\mathrm{X}}{h};\ \upsilon = \frac{V_R}{V_0};\ \Pi = \frac{(P - P_0)h}{\mu V_0};\ \mathrm{Re} = \frac{\rho h V_0}{\mu}, \qquad (9.1)$$

где Re – число Рейнольдса, V_0 – средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной поверхностью скорость, определенная выражением (4.3), h – ширина канала (см. рис. 4.1), а P_0 определено в (1.65), и там же в главе 1 дано обоснование выбору P_0.

Далее, используя безразмерные переменные (9.1), запишем уравнения (1.57), (1.56) в безразмерном виде:

$$\mathrm{Re}\,\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sigma\frac{\partial\upsilon}{\partial\chi}\right); \qquad (9.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma\upsilon) = 0, \qquad (9.3)$$

где величина σ определена в (4.8).

При решении задачи ламинарного течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины вместо уравнения неразрывности (9.3), также как и в главе 4, будем использовать его интегральный аналог, т.е. условие постоянства расхода жидкости в любом поперечном сечении канала, которое в безразмерном виде определится выражением (см. рисунок 4.1)

$$\int_0^1 \sigma v d\chi = \frac{1}{2}\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right). \tag{9.4}$$

Обоснование использования уравнения (9.4) вместо (9.3) приведено в разделе 4.2.

Граничные и начальное условия (1.63)–(1.65) в безразмерных переменных примут вид:

$$v = 0, \quad \chi = 0; \tag{9.5}$$

$$v = 0, \quad \chi = 1; \tag{9.6}$$

$$\Pi = 0, \quad \xi = \xi_0. \tag{9.7}$$

Таким образом, математическая формулировка задачи ламинарного течения при малых и умеренных числах Рейнольдса в соосном коническом диффузоре постоянной ширины определяется системой уравнений (9.2), (9.4) с условиями однозначности (9.5)–(9.7).

9.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом диффузоре постоянной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат

Я в совершенстве математикой владею,
Тех уравнений нет, что в миг не одолею,
Идеи Римана открыты для меня –
Гипотенузы все секреты знаю я.

Д. Гильберт

В работах [28, 32] автором данной монографии показано, что при выполнении условия

$$\xi \gg 2.22\mathrm{ctg}\alpha, \tag{9.8}$$

которое выполняется для большинства практических приложений [6, 7], [56–61], [110], [113], [123], влиянием различия в кривизне граничных поверхностей в уравнении движения можно пренебречь. В настоящей монографии это условие будет обсуждаться в главе 21, а в данном разделе мы используем его для упрощения выражения (4.8), определяющего σ. С помощью (9.8) выражение (4.8) может быть записано в виде

$$\sigma = \xi \sin\alpha. \tag{9.9}$$

Уравнение движения (9.2) при подстановке в него выражения (9.9) примет вид

$$\mathrm{Re}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\upsilon}{\partial\chi^2}. \tag{9.10}$$

В левой части уравнения (9.10) записано выражение, определяющее распределение инерционной силы, действующей на жидкость по поперечному сечению канала. Учет такого распределения важен для решения задачи ламинарного течения в пределах начального гидродинамического участка [132].

Из работ Н.А. Слезкина и С.М. Тарга [111, 132] следует, что при течении с малыми и умеренными числами Рейнольдса начальный гидродинамический участок представляет величину порядка ширины канала. Поэтому в данной главе мы будем рассматривать развитые течения, а это позволяет сделать предположение, что основной вклад в инерционный член (9.10) будет давать инерционная сила, возникающая вследствие изменения средней скорости жидкости вдоль течения, т.е. мы можем записать

$$\mathrm{Re}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} \approx \mathrm{Re}\bar{\upsilon}\frac{d\bar{\upsilon}}{d\xi}. \tag{9.11}$$

Этот же результат можно получить, рассматривая одномерный баланс сил вдоль течения на элементарном участке канала. Замена, аналогичная (9.11) достаточно часто применяется при ре-

шении задач конвективного переноса. В работе [133] приводится обоснование данного подхода.

Вопросы развития и стабилизации ламинарного течения в соосных конических диффузорах будут рассмотрены в главах 19 и 20, там же мы сравним решения, полученные в настоящей главе, с решениями, учитывающими начальный гидродинамический участок в соосных конических диффузорах.

Очевидно, что средняя безразмерная скорость при диффузорном течении будет определяться выражением (4.18), с помощью которого вычислим производную и произведение в правой части (9.11). Подставляя полученный результат в (9.10), запишем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - 2\,\mathrm{Re}\frac{\sin\alpha\left(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(2\xi\sin\alpha-\cos\alpha\right)^3} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \chi^2}. \qquad (9.12)$$

Обозначив разность в левой части последнего уравнения через $B(\xi)$

$$B(\xi) = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - 2\,\mathrm{Re}\frac{\sin\alpha\left(2\xi_0\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(2\xi\sin\alpha-\cos\alpha\right)^3}, \qquad (9.13)$$

перепишем (9.12) в виде равенства

$$B(\xi) = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \chi^2}, \qquad (9.14)$$

дважды интегрируя которое и определяя произвольные постоянные интегрирования с помощью граничных условий (9.5) и (9.6), получим для распределения безразмерной скорости υ выражение

$$\upsilon = \frac{1}{2}B(\xi)\left(\chi^2-\chi\right). \qquad (9.15)$$

Выражение, определяющее $B(\xi)$, находим, подставляя (9.15) в условие, определяющее постоянство расхода в любом поперечном сечении канала (9.4), т.е. совершенно аналогично тому, как мы определяли градиент давления в ползущем диффузорном течении (4.22). Проводя интегрирование в (9.4) и разрешая полученное уравнение относительно $B(\xi)$, находим

$$B(\xi) = -12\frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha}. \qquad (9.16)$$

Далее подставляя (9.16) в (9.13), получаем выражение, определяющее градиент безразмерного давления в канале

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\frac{2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha}{2\xi \sin\alpha - \cos\alpha} + 2\mathrm{Re}\frac{\sin\alpha\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2}{\left(2\xi \sin\alpha - \cos\alpha\right)^3}. \qquad (9.17)$$

Мы видим, что выражение, определяющее безразмерный градиент давления, состоит из суммы двух членов. Первый из них определяется трением на границах канала, т.е. характеризует диссипативную компоненту безразмерного градиента давления. Очевидно, что этот член совпадает с выражением (4.23), которое определяет безразмерный градиент давления при ползущем диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины.

Выражение, определяющее распределение безразмерного давления вдоль течения, найдем, проинтегрировав (9.17) с начальным условием (9.7). Для удобства примем, что $z = 2\xi\sin\alpha - \cos\alpha$, и тогда мы можем записать интеграл от (9.17) как

$$\Pi(\xi) = \int\frac{d\Pi}{d\xi}d\xi = -6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\int\frac{dz}{z} + \mathrm{Re}\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2\int\frac{dz}{z^3} = \qquad (9.18)$$

$$= -6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\ln\left(2\xi \sin\alpha - \cos\alpha\right) - \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2}{\left(2\xi \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2} + C,$$

где C – постоянная интегрирования, которую определяем из начального условия (9.7)

$$C = 6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\ln\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right) + \frac{\mathrm{Re}}{2}, \qquad (9.19)$$

и после подстановки (9.19) в (9.18) получаем выражение, определяющее распределение безразмерного давления при ламинарном диффузорном течении с малыми и умеренными числами Рейнольдса в соосном коническом канале

$$\Pi(\xi) = 6\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \left(\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\right]. \qquad (9.20)$$

В последнем выражении, так же как и в (9.17), первое слагаемое в правой части определяет изменение безразмерного давления вдоль течения за счет трения на границах канала и представляет диссипативную компоненту безразмерного давления. Второй член суммы (9.20) представляет динамическую составляющую безразмерного давления и определяет изменение безразмерного давления вдоль течения за счет действия инерционной силы, характерной для течения в соосных конических диффузорах.

Выражения (9.15) и (9.16) показывают, что распределение безразмерной скорости будет определяться той же зависимостью, что и при течении с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса, т.е. (4.25).

Решения, полученные нами для безразмерного давления и его градиента (9.20) и (9.17) с учетом выражения для безразмерной средней по поперечному сечению канала скорости (4.18), можно записать в виде:

$$\Pi(\xi) = 6\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\bar{v} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1 - \bar{v}^2\right); \qquad (9.21)$$

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\bar{v} + \frac{2\,\mathrm{Re}}{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}\bar{v}^3. \qquad (9.22)$$

Если в выражениях (9.17), (9.20)–(9.22) положить $\mathrm{Re} = 0$, то мы получим соотношения (4.23), (4.28), (4.24) и (4.29), определяющие распределение безразмерного давления и его градиента при ползущем диффузорном течении в каналах рассматриваемой геометрии.

Здесь следует заметить, что если в выражениях (9.17) и (9.20) положить $\alpha = 90°$, то получим выражения, описывающие распределения безразмерного давления и его градиента при радиальном расходящимся ламинарном течении жидкости с малыми и умеренными числами Рейнольдса между параллельными плоскостями:

$$\Pi(\xi) = 12\xi_0 \ln\frac{\xi_0}{\xi} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2\right]; \tag{9.23}$$

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\frac{\xi_0}{\xi} + \mathrm{Re}\frac{\xi_0^2}{\xi^3}, \tag{9.24}$$

или, учитывая определение безразмерной средней по площади поперечного сечения скорости в таком канале (4.33), перепишем два последних равенства в форме:

$$\Pi(\xi) = 12\xi_0 \ln\overline{v} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \overline{v}^2\right]; \tag{9.25}$$

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\overline{v} + \mathrm{Re}\frac{\overline{v}^3}{\xi_0}. \tag{9.26}$$

Итак, мы получили решение задачи стационарного установившегося ламинарного течения жидкости при малых и умеренных значениях числа Рейнольдса в соосном коническом диффузоре (9.17), (9.20)–(9.26). И поскольку распределение скорости при ламинарном диффузорном течении в таких каналах мы достаточно детально рассмотрели в разделе 4.4 четвертой главы, в настоящей главе мы основное внимание уделим анализу влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления (перепада давления) в канале.

9.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины

Там — власть, там творческие горны,
Пред волей числ мы все — рабы,
И солнца путь вершат, покорны
Немым речам их ворожбы.

В. Я. Брюсов

Определяющими параметрами задачи являются значение числа Re, величина полуугла раскрытия диффузоров, образующих

граничные поверхности канала – α, и безразмерной координаты входа в канал ξ_0.

Для выяснения характера влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления вдоль канала рассмотрим распределение П в канале при различных значениях числа Рейнольдса.

Рассмотрим сначала ламинарное течение жидкости в соосном коническом диффузоре с малым полууглом раскрытия его границ, например, примем $\alpha = 5°$ (рис. 4.1), и с безразмерной радиальной координатой входа в канал $\xi_0 = 26$, что вполне удовлетворяет соотношению (9.8). Исследовать распределение безразмерного давления и его градиента будем при следующих значениях числа Рейнольдса: $\mathrm{Re} = 5$, $\mathrm{Re} = 50$, $\mathrm{Re} = 150$, $\mathrm{Re} = 200$, и сравним распределения, полученные с указанными значениями чисел Рейнольдса, с распределением безразмерного давления и его градиента для ползущего течения, т.е. при $\mathrm{Re} = 0$. А рассматривать течения будем на участке соосного конического диффузора, ограниченного безразмерными координатами ξ_0 и $\xi_1 = 56$.

При малых значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 5$ распределение градиента безразмерного давления очень близко к распределению Π_ξ для ползущего течения (рис. 9.1). Очевидно, что в этом случае течения будут близки и распределения безразмерного давления (рис. 9.2).

Определим относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом действия характерной инерционной силы от безразмерного давления, вычисленного без такого учета, как

$$\varepsilon_F(\xi) = \left| \frac{\Pi(\xi) - \Pi_{dis}(\xi)}{\Pi_{dis}(\xi)} \right| = \left| \frac{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1 - \bar{v}^2\right)}{\Pi_{dis}(\xi)} \right|, \qquad (9.27)$$

где $\Pi_{dis}(\xi)$ определяется выражением (4.28), и, как мы уже отмечали, является диссипативной компонентой безразмерного давления, а величина

$$\Pi_{din}(\xi) = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1 - \overline{v}^2\right), \tag{9.28}$$

в соответствии с (9.21) представляет динамическую его компоненту.

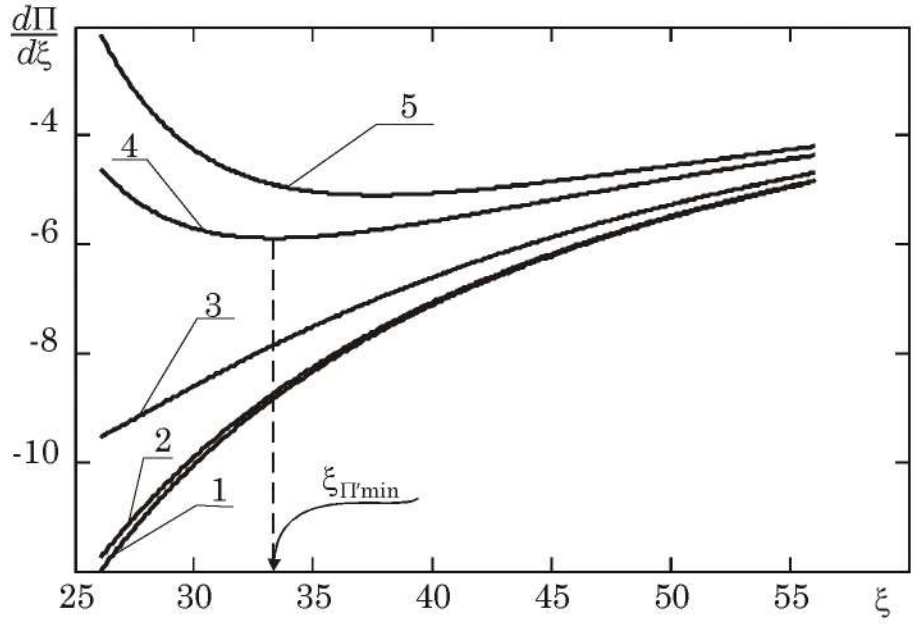


Рис. 9.1. Распределение безразмерного градиента давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины и полууглом раскрытия границ $\alpha = 5°$. 1 – расчет без учета инерционной составляющей, т.е. при Re = 0; 2 – распределение при Re = 5; 3 – Re = 50; 4 – Re = 150; 5 – Re = 200.

Для числа Рейнольдса Re = 5 модуль относительного отклонения в пределах рассматриваемого канала достигает величины 2 % (рис. 9.3). Распределение $\varepsilon_F(\xi)$ вдоль безразмерной координаты ξ является монотонно возрастающим, и, очевидно, при увеличении Re значения $\varepsilon_F(\xi)$ будут пропорционально увеличиваться, не меняя характера зависимости (9.27).

Увеличение числа Рейнольдса до 50 увеличивает отклонение распределение градиента безразмерного давления от распределения безразмерного давления при ползущем течении (рис. 9.1). Градиент безразмерного давления монотонно убывает по абсолютной величине вдоль течения. Модуль безразмерного давления также

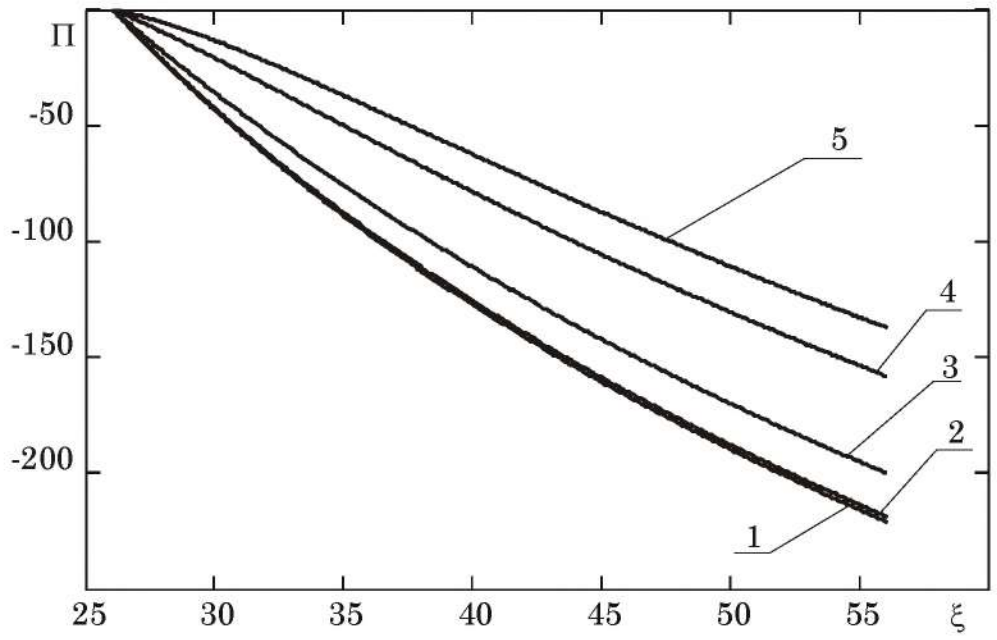


Рис. 9.2. Распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины и полууглом раскрытия границ $\alpha = 5°$. 1 – расчет без учета инерционной составляющей, т.е. при Re = 0; 2 – распределение при Re = 5; 3 – Re = 50; 4 – Re = 150; 5 – Re = 200.

монотонно увеличивается вдоль течения, оставаясь меньше, чем в случае ползущего течения (рис. 9.2).

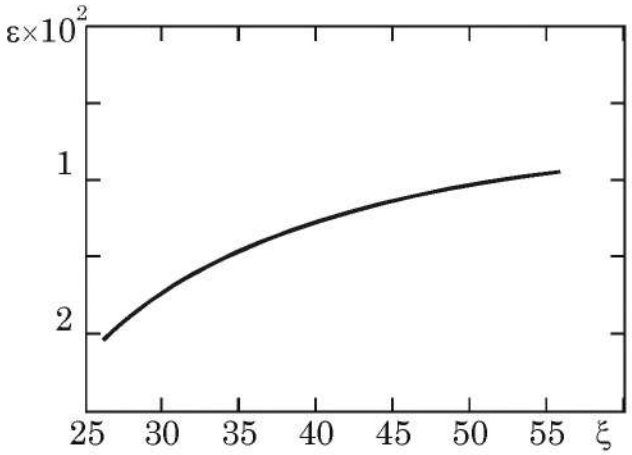


Рис. 9.3. Распределение модуля относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативной составляющей при Re = 5 от диссипативной его составляющей для диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с полууглом раскрытия границ $\alpha = 5°$.

Увеличение числа Рейнольдса до значения 150 приводит к более существенному изменению в распределении градиента дав-

ления вдоль течения. Распределение $\Pi_\xi(\xi)$ становится немонотонным вдоль течения (рис. 9.1).

Это происходит вследствие того, что возрастает роль инерционной составляющей вблизи входа в канал, где скорость течения жидкости максимальна (рис. 9.4), а инерционная составляющая безразмерного градиента давления является положительной величиной (9.22), и поэтому модуль ее суммы с диссипативной составля-

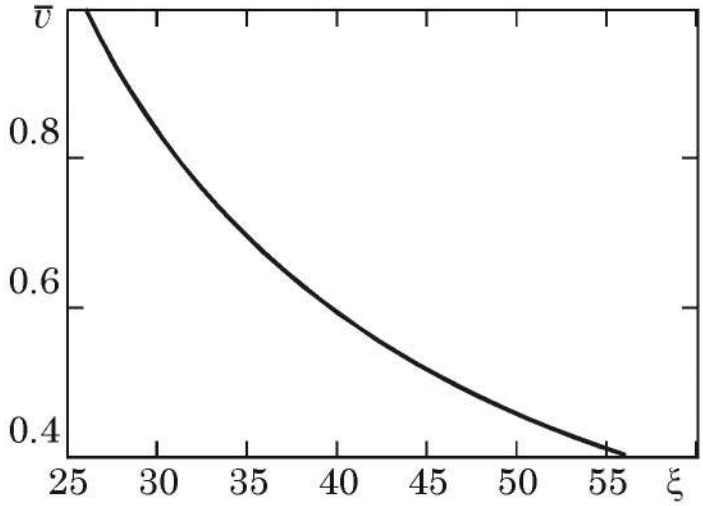


Рис. 9.4. Распределение безразмерной средней по площади поперечного сечения скорости при ламинарном течении жидкости в соосном коническом диффузоре с полууглом раскрытия границ $\alpha = 5°$.

ющей оказывается меньше модуля безразмерного градиента давления при ползущем течении, т.е. диссипативной его составляющей, поскольку она не зависит от Re. Далее вдоль течения средняя скорость жидкости уменьшается (рис. 9.4) вследствие увеличения площади поверхности поперечного сечения канала (4.16), и поскольку инерционная составляющая градиента давления пропорциональна 3 степени средней скорости (9.22), а диссипативная – первой степени, то инерционная составляющая уменьшается вдоль течения интенсивнее, чем уменьшается модуль диссипативной составляющей (рис. 9.5). Поэтому модуль градиента безразмерного давления в начале течения увеличивается, на некотором расстоянии от входа в канал достигает своего максимума и затем уменьшается вместе с уменьшением модуля диссипативной составляющей (рис. 9.1), поскольку вдали от входа величина модуля динамической составля-

ющей безразмерного градиента давления намного меньше величины модуля диссипативной его составляющей (рис. 9.5, рис. 9.1).

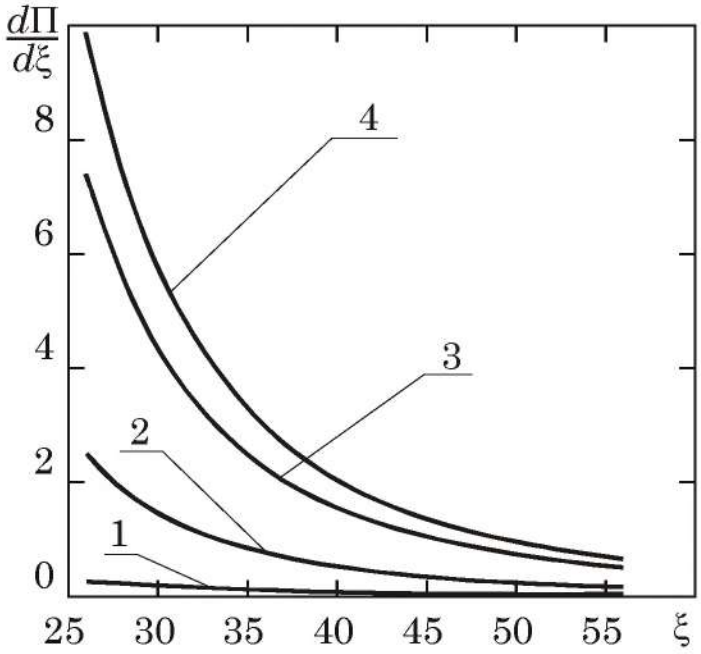


Рис. 9.5. Распределение инерционной составляющей безразмерного градиента давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины и полууглом раскрытия границ $\alpha = 5°$. 1 – распределение при Re = 5; 2 – Re = 50; 3 – Re = 150; 4 – Re = 200.

Безразмерную радиальную координату, на которой будет наблюдаться максимальный модуль градиента безразмерного давления, можно вычислить из условия

$$\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = 0\,. \tag{9.29}$$

Вторую производную от давления определим, дифференцируя (9.17)

$$\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = 24\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{\left(2\xi - \operatorname{ctg}\alpha\right)^2} - 12\,\mathrm{Re}\frac{\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)^2}{\left(2\xi - \operatorname{ctg}\alpha\right)^4}, \tag{9.30}$$

подставляя (9.30) в (9.29), находим координату локализации экстремального значения безразмерного градиента давления

$$\xi_{\Pi'\min} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)}\right]. \tag{9.31}$$

Для рассматриваемых случаев течения координаты локализации минимального значения безразмерного давления будут равны: для Re = 5, $\xi_{П'min}$ = 10.75, т.е. находится за пределами канала: для Re = 50, $\xi_{П'min}$ = 21.64, т.е. и эта находится за пределами канала, а для Re = 150, $\xi_{П'min}$ = 33.30, т.е. лежит в пределах канала, в котором рассматривается течение. Итак, мы видим, что не для всех значений числа Рейнольдса достигается локализация величины минимального градиента давления в пределах канала. Если известны геометрические параметры канала, то мы можем определить значения числа Рейнольдса, начиная с которого минимальное значение градиента давления будет находиться в пределах канала, приравняв $\xi_{П'min}$ значению безразмерной координаты входа в канал, т.е. из условия $\xi_{П'min} = \xi_0$, откуда получаем

$$\mathrm{Re}_{П'min} = 2\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right). \qquad (9.32)$$

Для рассматриваемого канала эта величина принимает значение $\mathrm{Re}_{П'min}$ = 81.14.

Дальнейшее увеличение числа Re приводит к еще большему росту инерционной составляющей безразмерного градиента давления по сравнению с его диссипативной составляющей (рис. 9.5). но при течении в рассматриваемом канале даже при Re = 200 величина динамической составляющей $П_\xi$ еще остается меньше абсолютного значения диссипативной составляющей (рис. 9.1), и поэтому градиент безразмерного давления является отрицательной величиной, и, в итоге, безразмерное давление падает вдоль течения (рис. 9.2), т.е. для всех рассматриваемых значений чисел Рейнольдса течение происходит в сторону падения давления. Но абсолютные значения П(ξ) при увеличении числа Re уменьшаются (рис. 9.2). Это происходит потому, что при диффузорных течениях, вследствие уменьшения скорости жидкости вдоль течения, ее кинетическая энергия трансформируется в потенциальную энергию напряженного состояния, что и приводит к некоторому восстановлению давления в течениях с существенными значениями чисел Рейнольдса по

сравнению с течениями, происходящими при пренебрежимо малых числах Re.

Увеличение динамической составляющей безразмерного градиента давления приводит к тому, что минимальное значение Π_ξ смещается вниз по течению (рис. 9.1) и при некотором значении Re достигает выхода из канала, т.е. из условия $\xi_{\Pi'\min} = \xi_1$ мы можем определить величину числа Рейнольдса , начиная с которого распределение безразмерного давления становится монотонно убывающей функцией

$$\mathrm{Re}_{\Pi' de} = 2\frac{\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}. \tag{9.33}$$

Для рассматриваемого случая значение (9.33) будет равно $\mathrm{Re}_{\Pi' de} = 498.6$.

Сейчас мы можем записать условия, при выполнении которых градиент давления в пределах канала будет монотонной либо немонотонной функцией вдоль течения:

$$\mathrm{Re} < 2\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right); \quad \text{монотонно растущая функция,} \tag{9.34}$$

$$2\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right) \le \mathrm{Re} \le 2\frac{\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}; \quad \text{немонотонная функция,} \tag{9.35}$$

$$\mathrm{Re} \ge 2\frac{\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}, \quad \text{монотонно убывающая функция.} \tag{9.36}$$

Если в выражениях (9.34)–(9.36) положить $\alpha = 90°$, то мы получим критические значения числа Рейнольдса, при переходе через которые изменяется характер функциональной зависимости градиента давления вдоль ламинарного радиального течения между параллельными плоскостями:

$$\mathrm{Re} < 4\xi_0; \quad \text{монотонно растущая функция,} \tag{9.37}$$

$$4\xi_0 \le \mathrm{Re} \le 4\frac{\xi_1^{\,2}}{\xi_0}; \quad \text{немонотонная функция,} \tag{9.38}$$

$$\mathrm{Re} \ge 4\frac{\xi_1^{\,2}}{\xi_0}, \quad \text{монотонно убывающая функция.} \tag{9.39}$$

Рассмотрим ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале с большим полууглом раскрытия и для тех же значений числа Рейнольдса. Для полуугла раскрытия граничных поверхностей выберем значение $\alpha = 13°$. В этом случае безразмерная радиальная координата входа в канал может быть уменьшена до величины $\xi_0 = 10$, что вполне удовлетворяет соотношению (9.8).

Если выберем участок с безразмерной длиной, равной безразмерной длине участка канала, течение в котором мы только что изучали, то канал будет ограничен радиальными координатами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$.

В этом случае безразмерная средняя по поперечному сечению канала скорость уменьшается вдоль течения в пределах канала почти в 5 раз (рис. 4.3), в то время как в только что рассмотренном канале $\bar{v}$ уменьшается на длине канала немногим более, чем в 2 раза (рис. 9.4). Это позволяет ожидать более существенное влияние инерционных сил на распределение безразмерного давления при течении со значимыми числами Рейнольдса.

Действительно, уже при $\mathrm{Re} = 5$ относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом динамической компоненты (рис. 9.6) от распределения безразмерного давления, вычисленного без такого учета, достигает 5 % (рис. 9.7).

Увеличение числа Рейнольдса до 50 приводит к тому, что распределение безразмерного градиента давления становится немонотонным. Такое поведение распределения безразмерного давления наблюдается для всех чисел Re, которые принадлежат, как следует из (9.35), интервалу [31.34, 739.86]. Мы видим, что диапазон значений чисел Рейнольдса, при которых распределение градиента давления вдоль рассматриваемого сейчас канала является немонотонным, значительно шире, чем в случае канала с полууглом раскрытия границ $\alpha = 5°$ и той же длины, течение в котором, мы рассмотрели несколько ранее.

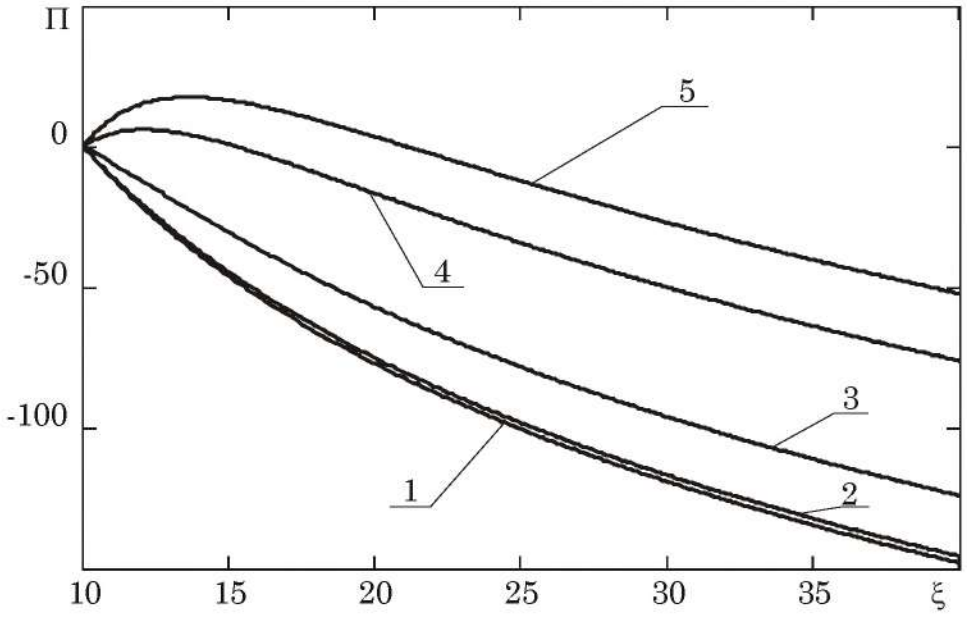


Рис. 9.6. Распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины и полууглом раскрытия границ $\alpha = 13°$. 1 – расчет без учета инерционной составляющей, т.е. при Re = 0; 2 – распределение при Re = 5; 3 – Re = 50; 4 – Re = 150; 5 – Re = 200.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса до величины 150 действие характерной инерционной силы возрастает настолько, что значение градиента безразмерного давления вблизи входа в канал, где скорость жидкости наибольшая, становится положительным, т.е. инерционная его составляющая превосходит модуль дис-

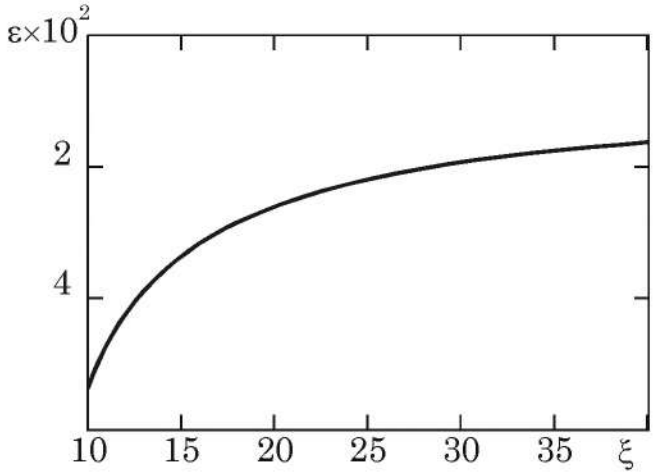


Рис. 9.7. Распределение модуля относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативной составляющей при Re = 5 от его диссипативной составляющей для диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с полууглом раскрытия границ $\alpha = 13°$.

сипативной составляющей давления (рис. 9.8).

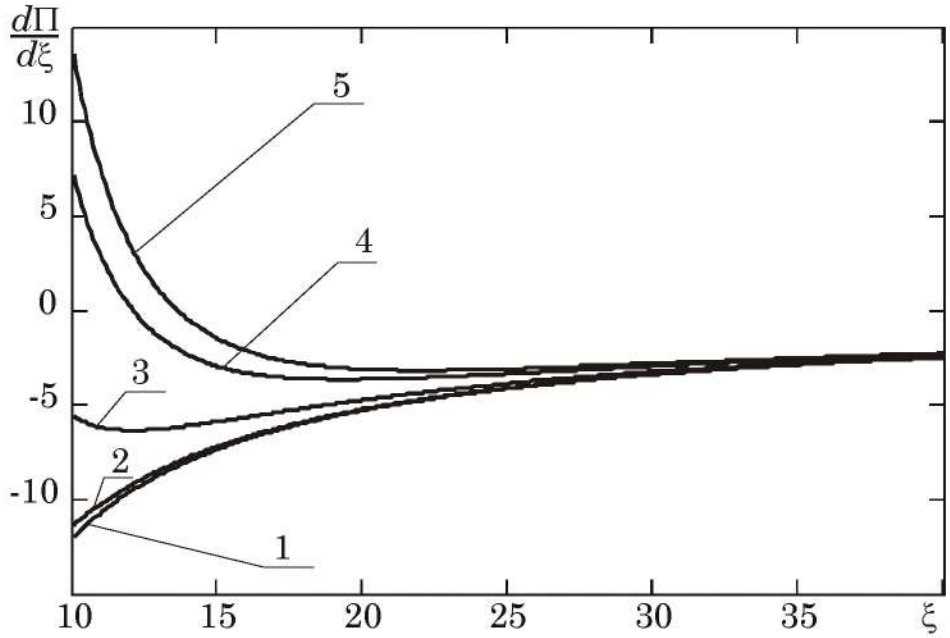


Рис. 9.8. Распределение безразмерного градиента давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины и полууглом раскрытия границ $\alpha = 13°$. 1 – расчет без учета инерционной составляющей, т.е. при Re = 0; 2 – распределение при Re = 5; 3 – Re = 50; 4 – Re = 150; 5 – Re = 200.

Поэтому и динамическая составляющая безразмерного давления на входе в канал превосходит по абсолютной величине диссипативную составляющую при Re = 150 (рис. 9.9, рис. 9.6), и в итоге безразмерное давление вблизи входа в канал растет и жидкость течет в направлении возрастания давления.

Появление такого течения в соосном коническом диффузоре, а значит и начала преобладания инерционной силы над силами трения, можно определить из условия

$$\left.\frac{d\Pi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0, \qquad (9.40)$$

аналогичного условию (8.33), которое мы использовали при исследовании течения в соосном коническом диффузоре с общей верши-

ной границ. Из (9.40) находим значение числа Рейнольдса, начиная с которого в канале начинают преобладать инерционные силы, т.е. в пределах канала появляется максимум П

$$\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right). \tag{9.41}$$

Сравнивая (9.41) и (9.32), можно записать

$$\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 3\mathrm{Re}_{\Pi'\min}, \tag{9.42}$$

т.е. при диффузором ламинарном течении в соосном коническом канале постоянной ширины число Рейнольдса, при котором в канале начинает преобладать характерная сила инерции над силами трения, в 3 раза больше числа Re, при котором появляется немонотонность в распределении градиента давления.

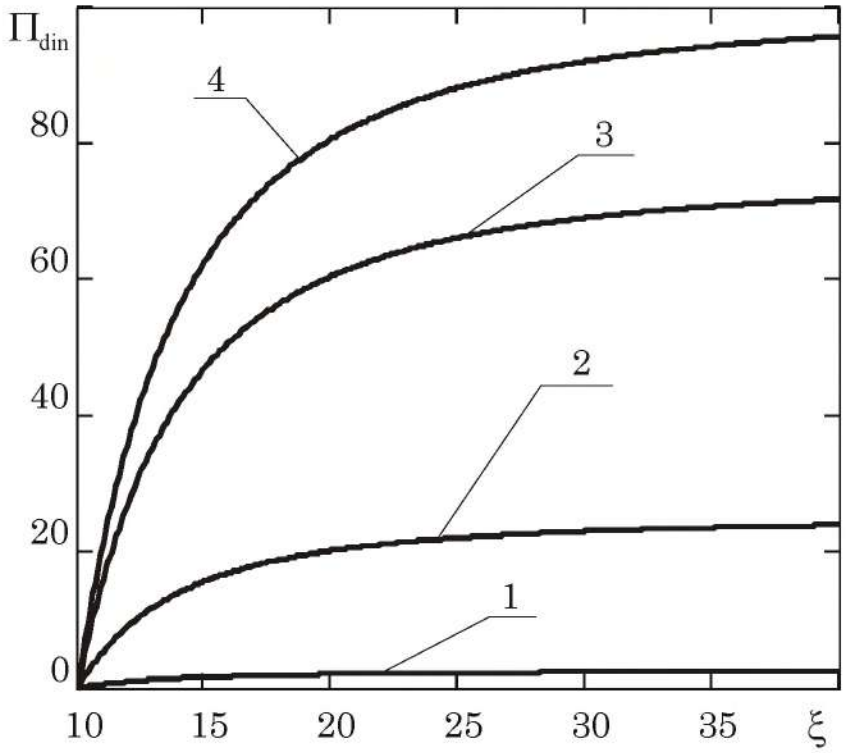


Рис. 9.9. Распределение инерционной составляющей безразмерного градиента давления при диффузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины и полууглом раскрытия границ $\alpha = 13°$. 1 – распределение при Re = 5; 2 – Re = 50; 3 – Re = 150; 4 – Re = 200.

При числах Рейнольдса, превышающих $\mathrm{Re}_{\Pi\max}$, распределение безразмерного давления вдоль канала становится немонотонной функцией. В рассматриваемом случае это числа большие, чем $\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 94.01$. А происходит это потому, что в начале течения, где инерционная составляющая безразмерного давления больше его диссипативной составляющей, безразмерное давление увеличивается. Далее вниз по течению инерционная составляющая замедляет свой рост и стремится к своему предельному значению (рис. 9.9), которое мы найдем из (9.28), устремляя $\xi \to \infty$

$$\Pi_{din}(\infty) = \frac{\mathrm{Re}}{2}. \tag{9.43}$$

В то же время диссипативная составляющая, как мы отмечали в главе 4, для диффузорного ламинарного течения в соосном коническом канале постоянной ширины при $\xi \to \infty$, $\Pi \to -\infty$. Это означает, что на некотором расстоянии от входа диссипативная составляющая безразмерного давления по модулю станет большей Π_{din}, и Π начнет уменьшаться, т.е. в течении начнут преобладать силы трения.

Расстояние, на котором безразмерное давление достигает максимума, определим из условия

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = 0, \tag{9.44}$$

и учитывая (9.17), получаем

$$\xi_{\Pi\max} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{6}\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)}\right]. \tag{9.45}$$

Полагая $\xi_{\Pi\max} = \xi_1$, из (9.45) определим значение числа Рейнольдса, начиная с которого распределение безразмерного давления будет монотонно растущей функцией, т.е. течение в пределах всей длины канала будет происходить в сторону увеличения давления

$$\mathrm{Re}_{\Pi de} = 6\frac{\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)^2}{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{9.46}$$

Сравнивая (9.46) и (9.33), мы можем записать аналогично (9.42)

$$\mathrm{Re}_{\Pi de} = 3\mathrm{Re}_{\Pi' de}. \tag{9.47}$$

Используя выражения (9.43) и (9.28), можно определить безразмерную радиальную координату $\xi_{\Pi din\infty}$, начиная с которой инерционная составляющая безразмерного давления будет отличаться от своего максимального значения $\Pi_{din}(\infty)$ не более, чем на 1 % из условия

$$\left|\frac{\Pi_{din}(\xi) - \Pi_{din}(\infty)}{\Pi_{din}(\infty)}\right| = \left|1 - \overline{v}^2\right| = 0.01.$$

Откуда получаем

$$\xi_{\Pi din\infty} = 10\xi_0 - 4.5\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \tag{9.48}$$

Для рассматриваемого течения с $\alpha = 13°$, находим $\xi_{\Pi din\infty}$ = 80.5, а для предыдущего случая $\xi_{\Pi din\infty}$ = 208.6.

Теперь с большой степенью точности для вычисления безразмерного давления в диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале при выполнении условия $\xi \geq \xi_{\Pi din\infty}$ можно использовать выражение

$$\Pi = \frac{\mathrm{Re}}{2} + 6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\ln\overline{v}. \tag{9.49}$$

Заметим, что если в выражениях (9.41), (9.45), (9.46), (9.48) и (9.49) положить $\alpha = 90°$, то мы получим аналоги для радиального расходящегося течения между параллельными плоскостями.

Число Рейнольдса, с которого начинается преобладание инерционных сил в таком течении, определяется из (9.41) как

$$\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 12\xi_0, \tag{9.50}$$

координата локализации максимального значения безразмерного давления, определяется выражением

$$\xi_{\Pi max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\xi_0}{3}}, \tag{9.51}$$

величина числа Рейнольдса, при котором в ламинарном расходящемся течении в канале между параллельными плоскими дисками будет наблюдаться монотонно растущее распределение безразмерного давления вдоль радиуса, определится выражением

$$\mathrm{Re}_{\Pi de} = 12\frac{\xi_1^2}{\xi_0}. \tag{9.52}$$

Координата, на которой инерционная составляющая радиального течения между параллельными плоскостями достигает 99 % своего максимального значения, определится как

$$\xi_{\Pi din\infty} = 10\xi_0, \tag{9.53}$$

и наконец приближенное выражение для вычисления безразмерного давления в таком канале при $\xi \geq \xi_{\Pi din\infty}$ запишется как

$$\Pi = \frac{\mathrm{Re}}{2} + 12\xi_0 \ln\bar{v}. \tag{9.54}$$

Итак, мы выяснили некоторые особенности распределения безразмерного давления и его градиента при ламинарных диффузорных течениях в соосных конических каналах постоянной ширины для разных полууглов раскрытия поверхностей, образующих канал.

Для того, чтобы сравнить распределения безразмерного давления для различных α, нам необходимо перейти к безразмерным переменным, в которых исключена зависимость масштаба скорости от угла α, поскольку переменные, которыми мы пользовались в данной главе до сих пор имеют ясный физический смысл, но приводят к тому, что для различных α решения будут записаны в различных масштабах.

Поскольку зависимость от угловой координаты входит в масштабный множитель скорости V_0 (4.3) и через него в масштабный множитель давления (9.1), определим масштабный множитель скорости как

$$V_0^* = \frac{Q}{\pi h^2}, \tag{9.55}$$

а это повлечет за собой изменение условия постоянства расхода (9.4), которое теперь запишется в виде

$$\int_0^1 \left(\xi \sin\alpha - \chi\cos\alpha\right) \upsilon^* d\chi = \frac{1}{2}, \tag{9.56}$$

где υ^* – безразмерная скорость в масштабе (9.55).

Формально определения всех остальных параметров остаются прежними, т.е. (9.1), но вследствие изменения формулировки постоянства расхода в произвольном поперечном сечении канала (9.56) изменится и запись решения задачи (9.2)–(9.7):

$$\upsilon^* = \frac{6\left(\chi - \chi^2\right)}{2\xi\sin\alpha - \cos\alpha}; \tag{9.57}$$

$$\Pi^* = \frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha} + \\ + \frac{\mathrm{Re}^*}{2\left(2\xi_0\sin\alpha - \cos\alpha\right)^2}\left[1 - \left(\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\right]. \tag{9.58}$$

Данные результаты можно получить, просто выполнив замену переменных в выражениях (4.25) и (9.20).

Принимая во внимание, что безразмерная средняя по площади поперечного сечения скорость в данном случае определяется, как

$$\overline{\upsilon}^* = \frac{1}{2\xi\sin\alpha - \cos\alpha}, \tag{9.59}$$

выражения (9.57), (9.58) можно записать в виде:

$$\upsilon^* = 6\overline{\upsilon}^*\left(\chi - \chi^2\right); \tag{9.60}$$

$$\Pi^* = \frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{\overline{\upsilon}^*}{\overline{\upsilon}_0^*} + \frac{\mathrm{Re}^*}{2}\left(\overline{\upsilon}_0^{*2} - \overline{\upsilon}^{*2}\right). \tag{9.61}$$

Заметим, что определение числа Рейнольдса в (9.58) и (9.61) отличается от определения (9.1) отсутствием множителя $\overline{v}_0^*$, т.е. $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^* \cdot \overline{v}_0^*$, и тогда

$$\mathrm{Re}^* = \frac{\rho Q}{\mu \pi h}. \qquad (9.62)$$

Величина $\overline{v}_0^*$ – это безразмерная средняя по поперечному сечению скорость жидкости на входе в канал, и она зависит от полуугла раскрытия границ α при постоянном значении ξ_0 (рис. 9.10). Величина числа Re отражает реальное соотношение инерционных и вязких сил на входе в канал, и с изменением α это соотношение меняется при постоянных значениях h, R_0 и Q.

Значение Re^* не зависит от α и, используя (9.58), мы можем выяснить особенности распределения безразмерного давления Π^* для различных углов α, и поскольку масштабный множитель давления также не зависит от полуугла раскрытия границ, поэтому величина Π^* будет характеризовать и распределение размерного перепада давления $\Delta P = P - P_0$.

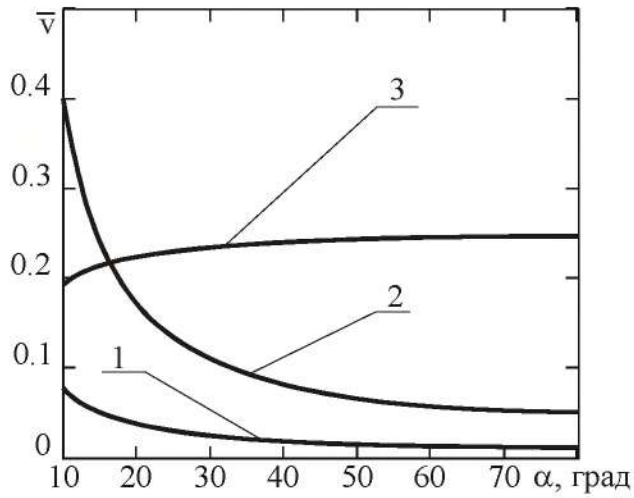


Рис. 9.10. Зависимость средней безразмерной скорости при диффузорном течении в соосном коническом канале: 1 – на выходе из канала ($\xi_1 = 40$); 2 – на входе в канал ($\xi_0 = 10$); 3 – отношение средней скорости на выходе из канала к скорости на входе в канал.

Очевидно, что особенности распределения безразмерного давления $\Pi(\xi)$ (9.20), определенные для числа Re, будут повторяться для распределения $\Pi^*(\xi)$, но при Re^* равном $\mathrm{Re}^* = \mathrm{Re}/\overline{v}_0^*$.

При $\mathrm{Re}^* = 0$ мы получаем ранее изученную на рис. 4.5 зависимость. Увеличение числа Re^* ведет к линейному увеличению Π^* (рис. 9.11) в соответствии с (9.61).

При малых значениях α угол наклона зависимости $\Pi^*(\mathrm{Re}^*)$ больше, чем для больших значений α, что происходит в соответ-

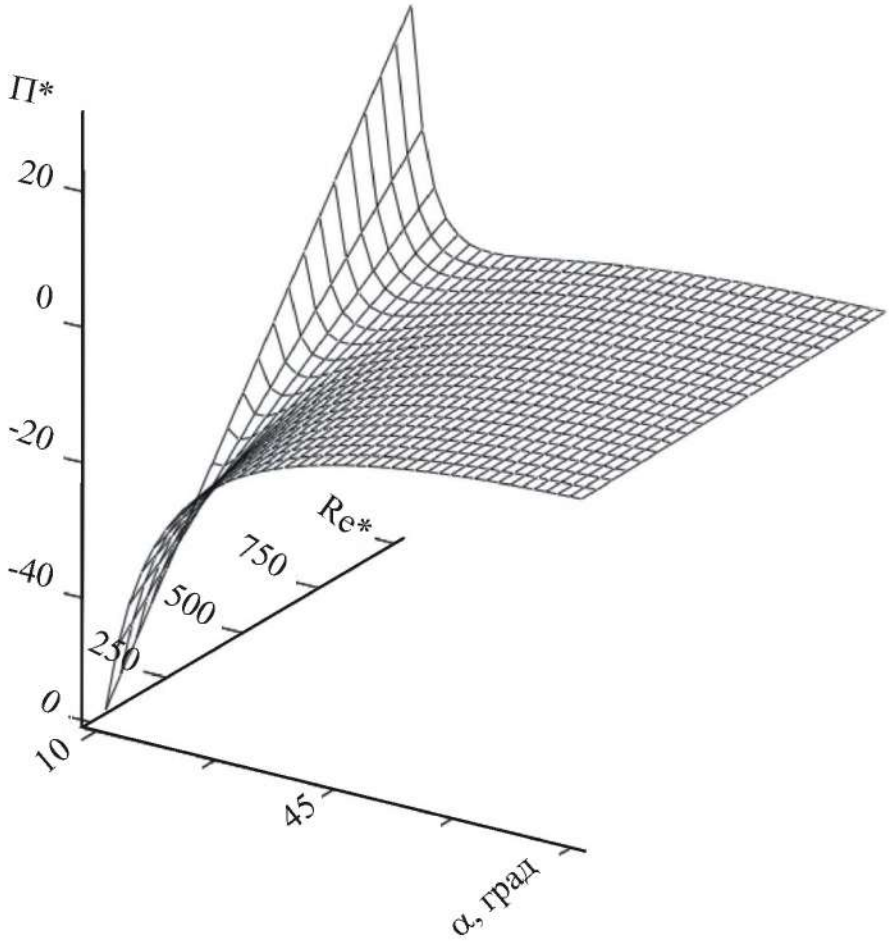


Рис. 9.11. Зависимость безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора с безразмерными координатами входа $\xi_0 = 10$ и выхода $\xi_1 = 40$ от числа Re^* и полуугла раскрытия поверхностей, образующих канал.

ствии с (9.61) вследствие большего различия средних скоростей на входе в канал и выходе из него для малых значений α, чем для больших значений α (рис. 9.10).

9.5. Условия, при котором можно пренебречь инерционными свойствами диффузорного ламинарного течения при расчете перепада давления в соосном коническом канале постоянной ширины

Современные теории представляют собой более искусную форму пифагорейства

М. Клайн

С помощью полученного нами распределения безразмерного давления (9.20) можно определить интервалы изменения значений числа Рейнольдса, в которых можно упростить расчет безразмерного давления П, а значит и перепада давления ΔP в канале.

В предыдущем разделе мы определили критические значения чисел Рейнольдса, при которых инерционные силы оказывают преобладающее влияние на распределение безразмерного давления в канале.

Мы также ввели относительное отклонение ε_F (9.27) значения безразмерного давления П, вычисленного с учетом инерционных свойств (8.20) от $П_{dis}$, рассчитанного без этого учета (4.28), т.е. при $\mathrm{Re} = 0$ в (9.20). Это дает возможность количественно определить влияние инерционных свойств течения на распределение среднего по сечению давления. Мы уже видели, что относительное отклонение $\varepsilon_F(\xi)$ является монотонной функцией (рис. 9.3, рис. 9.7), а это значит, что свое максимальное значение ε_F принимает на одной из границ своей области определения, т.е. на входе в канал или на выходе из него. Нам необходимо определить, на какой из границ своей области определения ε_F максимально, и затем определить величину относительного отклонения, которую можно считать значимой.

Найдем сначала значение ε_F на входе в канал, т.е. $\varepsilon_F(\xi_0)$. Выражение (9.27) при подстановке конкретных значений П и $П_{dis}$ примет вид

$$\varepsilon_F(\xi) = \left| \frac{\mathrm{Re}\left[1 - \left(\dfrac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2\right]}{12(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\ln\dfrac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi - \mathrm{ctg}\,\alpha}} \right|, \qquad (9.63)$$

и, если в него вместо ξ подставить ξ_0, то получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся правилом Лопиталя [117], и после этого вычислим предел ε_F при $\xi \to \xi_0$

$$\varepsilon_F(\xi_0) = \lim_{\xi\to\xi_0} \varepsilon_F(\xi) = \left| \frac{\mathrm{Re}}{12(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)} \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{\left[1 - \left(\frac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2\right]}{\ln\frac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi - \mathrm{ctg}\,\alpha}} \right| \Rightarrow \tag{9.64}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Правило} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left| \frac{\mathrm{Re}}{6} \lim_{\xi\to\xi_0} - \frac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{(2\xi - \mathrm{ctg}\,\alpha)^2} \right| = \frac{\mathrm{Re}}{6(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}.$$

Поскольку функция $\varepsilon_F(\xi)$ монотонна, то для того, чтобы определить максимальную величину из $\varepsilon_F(\xi_0)$ и $\varepsilon_F(\xi_1)$ нам достаточно вычислить предел $\lim\limits_{\xi\to\infty} \varepsilon_F$

$$\varepsilon_F(\infty) = \lim_{\xi\to\infty} \varepsilon_F(\xi) = 0, \tag{9.65}$$

и, следовательно, $\varepsilon_F(\xi_0) > \varepsilon_F(\xi_1)$, поскольку в качестве ξ_1 мы можем выбрать любую величину из интервала $[\xi_0, \infty]$.

Для общности рассуждения выберем в качестве значимой величины относительного отклонения величину, равную n %, т.е. при вычислении безразмерного давления в соосном коническом диффузоре постоянной ширины для ламинарного течения можно пренебречь влиянием инерционной силы, возникающей из-за изменения средней по поперечному сечению канала скорости течения жидкости вследствие изменения площади поверхности поперечного сечения канала при выполнении условия

$$\varepsilon_F(\xi_0) \le \frac{n}{100}. \tag{9.66}$$

Откуда мы получаем условие для чисел Рейнольдса, при выполнении которого можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в канале:

$$\mathrm{Re} \le \frac{6n}{100}\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right). \qquad (9.67)$$

При $n = 1\,\%$ имеем $\mathrm{Re} \le 0.06\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)$, а при $n = 5\,\%$ – $\mathrm{Re} \le 0.3\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)$.

Если положить $\alpha = 90°$, то из (9.67) получим значение числа Рейнольдса, вплоть до которого можно не учитывать инерционную составляющую давления при его расчете для ламинарного расходящегося течения между параллельными плоскостями

$$\mathrm{Re} \le 0.12n\xi_0 . \qquad (9.68)$$

Сравнивая (9.67) и (9.41), замечаем, что число Re, вплоть до которого можно пренебрегать инерционными силами, в $100/n$ раз меньше числа Re, при котором в канале начинают преобладать инерционные силы.

9.6. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре постоянной ширины

Не существует и не может существовать никакого числа в себе.

О. Шпенглер

В предыдущем разделе мы определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в соосном коническом диффузоре постоянной ширины. Это возможно в тех случаях течения, когда в выражении (9.20) второй член, показывающий компоненту безразмерного давления, определяемую трением на границах канала, значительно превосходит первый член, определяющий динамическую компоненту давления. Но, очевидно, могут существовать значения чисел Рейнольдса, при которых первый член (9.20) будет значительно превосходить второй. В данном разделе мы определим диапазон чисел Re, в котором при расчете давления в коническом соос-

ном диффузоре постоянной ширины можно с заданной точностью пренебречь изменением давления за счет трения на границах канала по сравнению с изменением динамической его составляющей, т.е. по сравнению с изменением давления в канале за счет изменения средней по площади поперечного сечения скорости жидкости.

Также, как и в предыдущем разделе настоящей главы, определим относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативного члена от его динамической составляющей, как

$$\varepsilon_D(\xi) = \left| \frac{\Pi - \Pi_{din}}{\Pi_{din}} \right|, \tag{9.69}$$

где Π_{din} определяется выражением (9.28).

Для определения критического значения числа Рейнольдса, при превышении которого можно пренебречь трением в расчетах давления, как и раньше в качестве значимой величины ε_D можно выбрать значение в n %, чтобы не снизить общность рассуждений, а при необходимости анализ можно уточнить, подставив какое-нибудь конкретное значение n. Расписывая (9.69), получим

$$\varepsilon_D(\xi) = \left| \frac{12(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)\ln\dfrac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha}}{\operatorname{Re}\left[1 - \left(\dfrac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\right]} \right|. \tag{9.70}$$

Сравнивая (9.70) и (9.63), получим соотношение, связывающее величину относительного отклонения безразмерного давления от его диссипативной части со значением относительного отклонения безразмерного давления от его динамической части

$$\varepsilon_D = \frac{1}{\varepsilon_F}, \tag{9.71}$$

откуда следует, что ε_D будет стремиться к своему максимальному значению при $\xi \to \infty$, и это значение равно бесконечности, но в то же

время вследствие монотонности функции $\varepsilon_D(\xi)$ оно говорит нам, что должно всегда выполняться соотношение $\varepsilon_D(\xi_1) > \varepsilon_D(\xi_0)$. Следовательно, максимальное относительное отклонение ε_D будет наблюдаться на выходе из канала

$$\varepsilon_D(\xi_1) = \left| \frac{12(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)\ln\dfrac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}}{\mathrm{Re}\left[1 - \left(\dfrac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\right]} \right|. \qquad (9.72)$$

Пользоваться выражением (9.72) для быстрых оценок весьма неудобно, поэтому упростим его, выполняя предельный переход $\xi_0 \to \xi_1$

$$\varepsilon_D(\xi_1) = \lim_{\xi_0 \to \xi_1} \varepsilon_D(\xi_1) = \frac{6(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha)}{\mathrm{Re}}. \qquad (9.73)$$

Поскольку мы предположили, что силами трения можно пренебречь, при относительном отклонении ε_D меньше, чем n %, т.е. при выполнении условия

$$\varepsilon_D \le \frac{n}{100}, \qquad (9.74)$$

откуда получаем условие для Re

$$\mathrm{Re} \ge \frac{600}{n}(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha). \qquad (9.75)$$

Следовательно, из предположения, что $n = 1$ %, условие $\mathrm{Re} \ge 600(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha)$, а из $n = 5$ % получим $\mathrm{Re} \ge 120(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha)$.

Если положить $\alpha = 90°$, то из (9.75) получим значение числа Рейнольдса, при превышении которого можно не учитывать силу трения при его расчете для ламинарного расходящегося течения между параллельными плоскостями

$$\mathrm{Re} \geq \frac{1200\xi_1}{n}. \tag{9.76}$$

9.7. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических диффузорах постоянной ширины, рассчитанной с учетом инерционных свойств

...сила теории заключается в ее внутренней согласованности и простоте ее приложений.

А. Эйнштейн

Используя решение, полученное для задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с учетом характерной для диффузорных течений инерционной силы (9.20) либо (9.58), построим расходно-напорную характеристику таких каналов при ламинарных течениях. Учитывая безразмерные параметры (9.1) для (9.20) или (9.55) и (9.62) для (9.58) и следуя правилу, представленному в (2.78), получим расходно-напорную характеристику для соосного конического диффузора постоянной вдоль течения ширины и определенного параметрами: шириной канала – h, полууглом раскрытия границ – α и радиальными координатами входа в канал и выхода из него – R_0 и R_1. В итоге получаем

$$\Delta P = \frac{\rho Q^2}{2\pi h^2 \left(2R_0 \sin\alpha - h\cos\alpha\right)^2}\left[1 - \left(\frac{2R_0 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2R_1 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2\right] + \tag{9.77}$$

$$+ \frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin\alpha} \ln \frac{2R_0 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2R_1 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Зависимость (9.77) имеет явно выраженный немонотонный характер (рис. 9.12). Значения расходов жидкости, на которых будет локализоваться наибольший по абсолютной величине перепад давления в канале, можно найти из условия

$$\frac{\partial(\Delta P)}{\partial Q}=0. \tag{9.78}$$

Откуда получаем

$$Q_e=-\frac{6\pi\mu h\left(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\sin\alpha}{\rho}\frac{\ln\dfrac{2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}}{1-\left(\dfrac{2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2}. \tag{9.79}$$

Для достаточно больших значений $\xi_0 >> \operatorname{ctg}\alpha$ можно упростить выражение (9.79). Действительно, пренебрегая величиной $\operatorname{ctg}\alpha$, получим

$$Q_e=\frac{24\pi\mu h\xi_0^2\xi_1^2\sin\alpha}{\rho}\frac{\ln\dfrac{\xi_0}{\xi_1}}{\xi_1^2-\xi_0^2}=\frac{24\pi\mu h\xi_0^2\xi_1^2\sin\alpha}{\rho}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta\xi}{\xi_0}\right)}{\left(\xi_1+\xi_0\right)\Delta\xi}= \tag{9.80}$$

$$=\frac{24\pi\mu h\xi_0^2\xi_1^2\sin\alpha\Delta\xi}{\rho\left(\xi_1+\xi_0\right)\xi_0\Delta\xi}=\frac{24\pi\mu h\xi_0\xi_1^2\sin\alpha}{\rho\left(\xi_1+\xi_0\right)}\approx\frac{12\pi\mu R_0^2}{\rho h}\sin\alpha,$$

где $\Delta\xi$ – безразмерная длина соосного конического канала. В (9.80) существенным является условие $\Delta\xi/\xi_0 < 1$.

С увеличением объемного расхода жидкости от 0 до Q_e давление на выходе из соосного конического диффузора уменьшается, т.е. модуль перепада давления ΔP растет вследствие действия сил трения на границах канала, и для малых значений α практически совпадает с перепадом давления при ползущем течении (рис. 9.12).

При $Q = Q_e$ размерное давление достигает своего минимума, а абсолютная величина ΔP достигает максимальной величины (рис. 9.12). Дальнейшее увеличение Q ведет к увеличению роли инерционных свойств течения, и давление на выходе из канала начинает восстанавливаться (рис. 9.12) вследствие перехода кинетической энергии движения в потенциальную энергию напряженного состояния при уменьшении средней по поперечному сечению скорости течения жидкости.

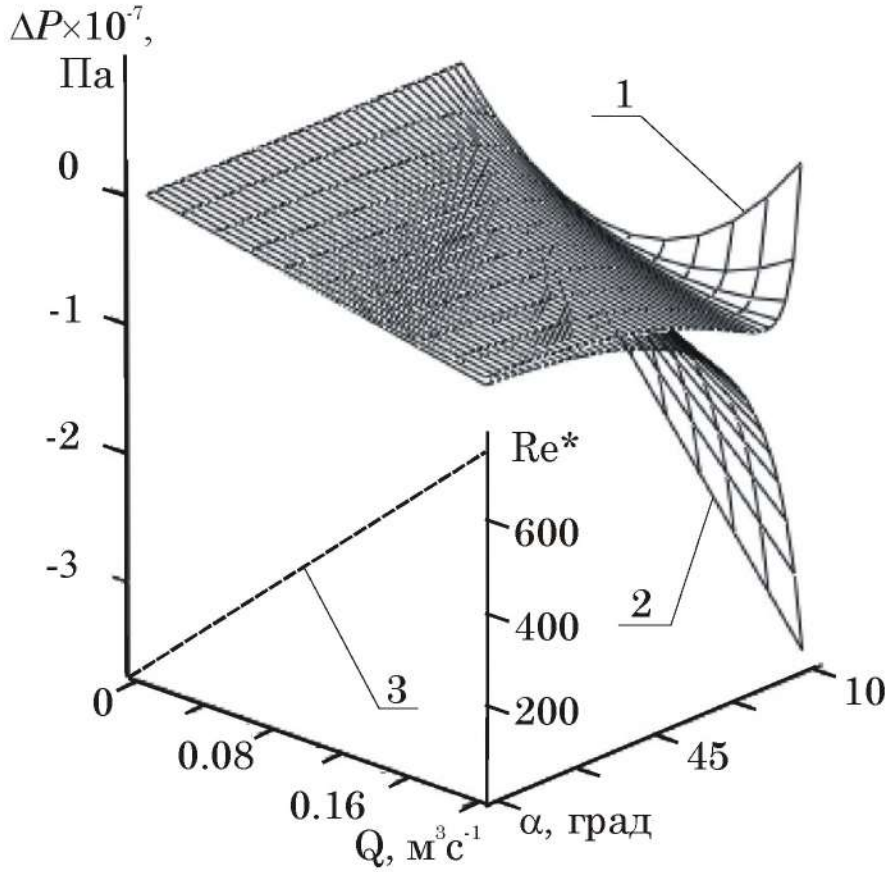


Рис. 9.12. Расходно-напорная характеристика соосного конического канала постоянной ширины при диффузорном течении жидкости с физическими свойствами $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3 для различных значений полуугла раскрытия канала. 1 – характеристика, полученная с учетом инерционных свойств; 2 – без учета инерционных свойств; 3 – изменение числа Re^* в диапазоне изменения значения объемного расхода жидкости Q.

Следует отметить, что при малых значениях Q для всех α преобладают диссипативные силы. Действительно, вычисляя выражение $\left.\dfrac{\partial \Delta P}{\partial Q}\right|_{Q=0}$, получим

$$\left.\frac{\partial \Delta P}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{6\mu}{\pi h^3} \ln \frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha} < 0, \qquad (9.81)$$

поскольку всегда $\xi_0 < \xi_1$. Из геометрических соображений ясно, что наименьшее возможное значение ξ_0 равно $\mathrm{ctg}\alpha$ (рис. 4.1), но как будет показано в главе 21, результаты, получаемые с помощью рассматриваемого приближения, могут быть распространены на все возможные значения безразмерной координаты входа в канал.

Выражение (9.81) свидетельствует, что с увеличением Q для малых его значений модуль перепада давления для всех возможных значений α будет увеличиваться.

Аналогичным образом мы можем определить для каждого значения объемного расхода Q полуугол раскрытия α, для которого возможна локализация наибольшей по модулю величины перепада давления из условия

$$\frac{\partial(\Delta P)}{\partial\alpha} = 0. \tag{9.82}$$

Далее подставляя соотношение (9.79) в (9.77), мы получим выражение для определения максимального перепада давления в соосном коническом канале постоянной ширины

$$\Delta P_{\max} = -18\frac{\mu^2\left(2R_0 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2}{\rho h^4}\frac{\left(\ln\dfrac{2R_0 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2R_1 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2}{1-\left(\dfrac{2R_0 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2R_1 - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2}. \tag{9.83}$$

Мы видим, что максимально возможный перепад давления в канале полностью определяется свойствами жидкости и геометрией канала точно так же, как и объемный расход жидкости (9.79), при котором достигается значение $\Delta P_{\max}$.

Выражение (9.83) для радиального ламинарного течения между плоскими дисками приобретает более простой вид

$$\Delta P_{\max} = -72\frac{\mu^2 R_0^2}{\rho h^4}\frac{\left(\ln\dfrac{R_0}{R_1}\right)^2}{1-\left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^2}. \tag{9.84}$$

Для случая течения в канале, в котором выполняется условие $\Delta R/R_0 = (R_1 - R_0)/R_0 < 1$, выражение (9.83) может быть упрощено и записано в виде

$$\Delta P_{\max} = -72\frac{\mu^2 R_0^2 R_1^2}{\rho h^4}\frac{\left[\ln\left(1+\dfrac{\Delta R}{R_0}\right)\right]^2}{(R_1 - R_0)\Delta R} \approx -36\frac{\mu^2}{\rho h^4}R_0(R_1 - R_0). \quad (9.85)$$

$\Delta P_{\max}$ практически линейно зависит от координаты ξ_1, а значит и от R_1, и имеет немонотонную зависимость от ξ_0, т.е. от R_0 при постоянных остальных параметрах (рис. 9.13). Характер этой зависимости хорошо виден в выражении (9.85), относительное отклоне-

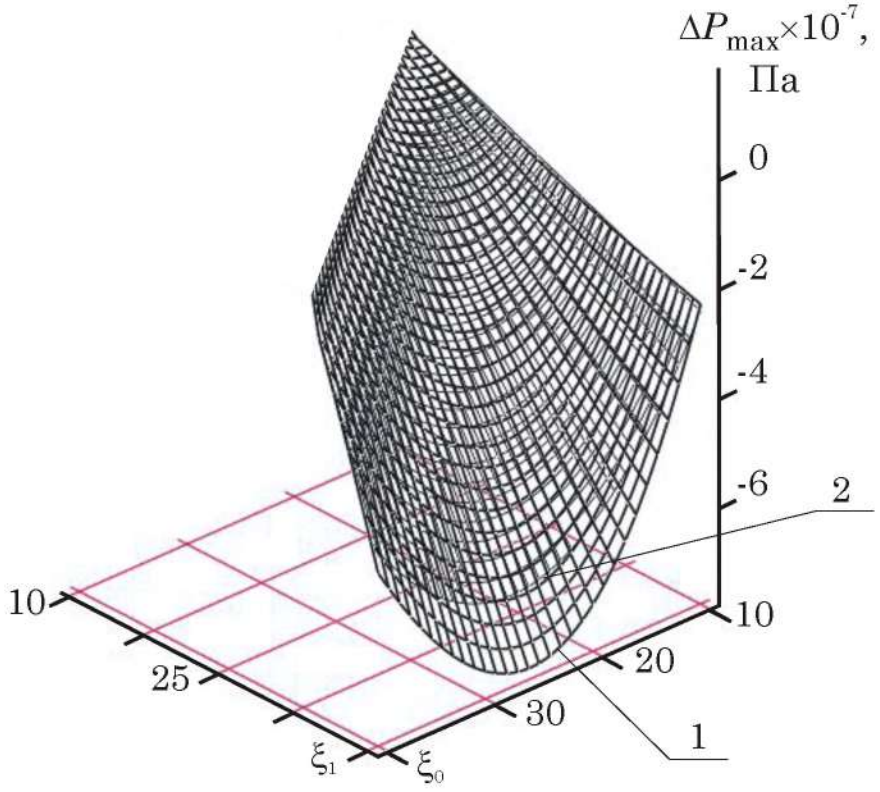


Рис. 9.13. Зависимость максимального перепада давления, рассчитанного с учетом характерной инерционной силы, при диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале постоянной ширины h = 0.01 м и α = 15° от безразмерных радиальных координат, ограничивающих канал. 1 – распределение (9.83); 2 – распределение (9.84).

ние которого от (9.83) не превышает 20 % (рис. 9.13, рис. 9.14). Поэтому для оценки максимального перепада давления при диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале можно оценивать с помощью выражения (9.85). Действительно, зависимость $\Delta P_{\max}(\alpha)$ существенна только при больших значениях ξ_1 и малых α (рис. 9.15), а в остальной области изменения геометрических параметров, определяющих задачу, она практически отсутствует.

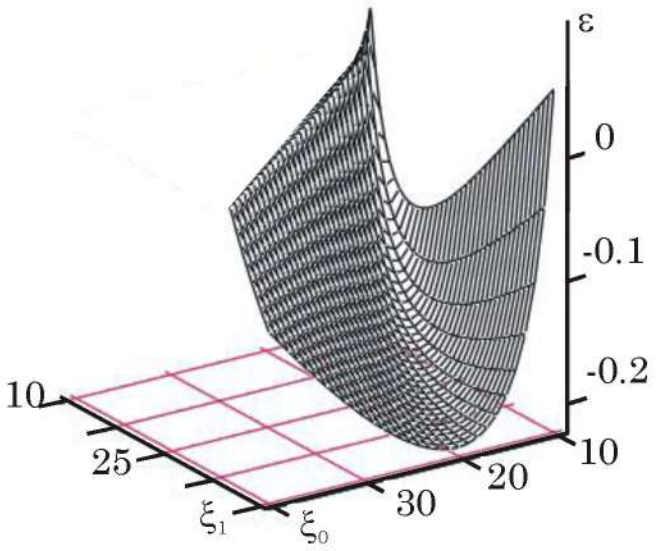


Рис. 9.14. Распределение относительного отклонения приближенного выражения для расчета максимального перепада давления (9.85) от выражения (9.84) в зависимости от безразмерных радиальных координат, ограничивающих канал с параметрами h = 0.01 м и $\alpha = 15°$.

Выражение (9.79) для вычисления экстремальных расходов жидкости позволяет определить числа Рейнольдса, для которых перепад давления в рассматриваемых каналах будет максимальный

$$\mathrm{Re}_{\max} = -6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\frac{\ln\dfrac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}}{1 - \left(\dfrac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2}, \qquad (9.86)$$

и для рассмотренных условий течения $\mathrm{Re}_{\max}$ не превосходит значения 500 (рис. 9.16). В случае диффузорного радиального течения между плоскими пластинами (9.86) преобразуется к виду

$$\mathrm{Re}_{\max} = -12\xi_0 \frac{\ln \frac{\xi_0}{\xi_1}}{1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2}. \qquad (9.87)$$

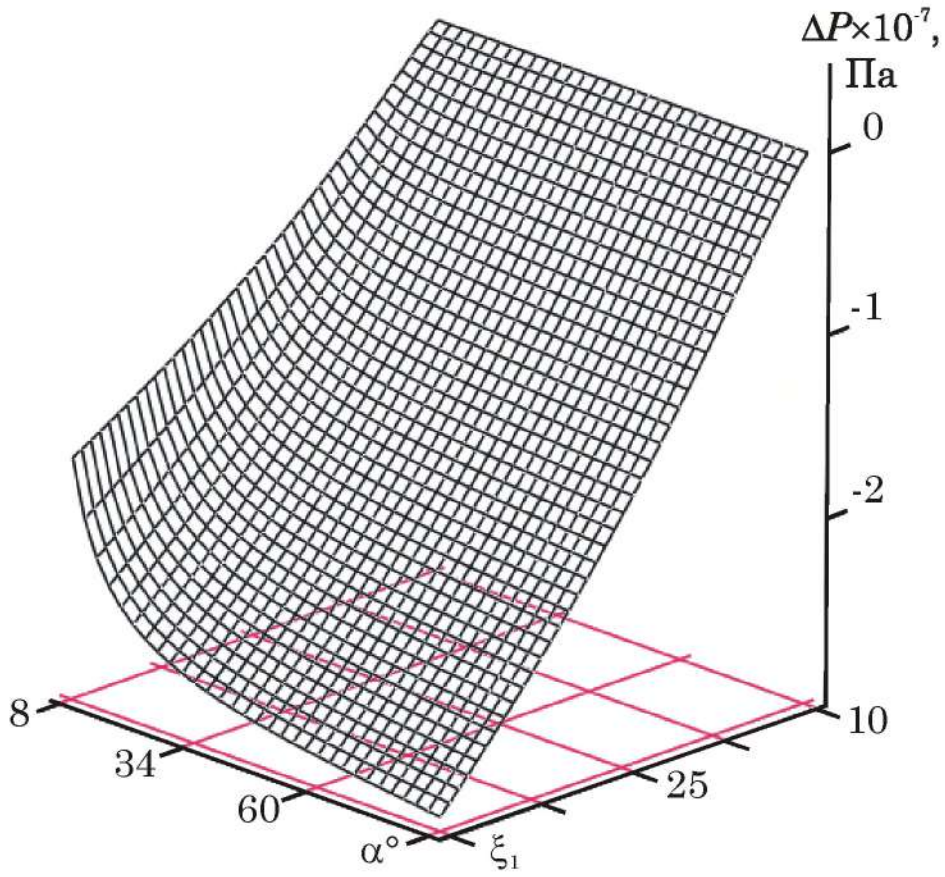


Рис. 9.15. Зависимость максимального перепада давления, рассчитанного с учетом характерной инерционной силы при диффузорном ламинарном течении в соосном коническом канале постоянной ширины h = 0.01 м и с ξ_0 = 10 от полуугла раскрытия границ и координаты выхода из канала.

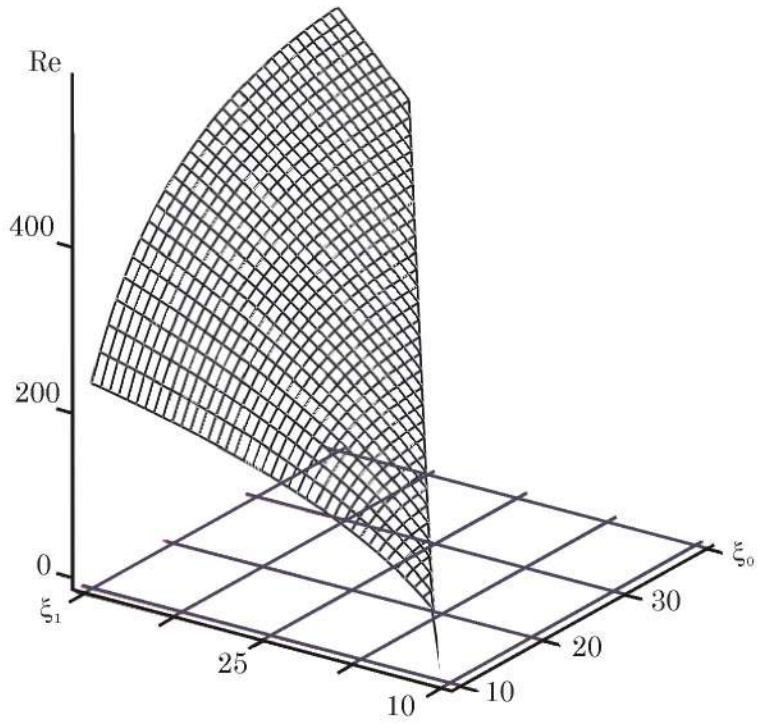


Рис. 9.16. Зависимость числа Рейнольдса, при котором наблюдается максимальный перепад давления в соосном коническом диффузоре постоянной ширины $h = 0.01$ м и $\alpha = 15°$ от безразмерных радиальных координат, ограничивающих канал.

9.8. Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины и частичным учетом инерционных свойств

Правильная постановка вопроса свидетельствует о некотором знакомстве с делом.

Ф. Бэкон

Так же, как и в диффузорных течениях, рассмотренных ранее в настоящей главе, при конфузорном течении в соосных конических каналах постоянной ширины практически всегда инерционная сила, действующая на жидкость, будет отлична от нуля. Это происхо-

дит вследствие того, что вдоль канала средняя скорость течения жидкости изменяется. При конфузорном течении скорость увеличивается вследствие уменьшения площади поверхности поперечного сечения канала. Инерционную силу, возникающую вследствие изменения средней по площади поперечного сечения соосного конического конфузора, будем называть характерной инерционной силой, появляющейся при ламинарном течении жидкости в соосном коническом конфузоре.

В настоящем разделе данной главы мы дадим математическую формулировку задачи ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины с учетом инерционных свойств течения.

Геометрия соосного конического конфузора постоянной ширины представлена в главе 1 на рис. 1.6. Там получены уравнения стационарного ламинарного движения жидкости в биконической системе координат в наиболее общем виде, т.е. записанные в терминах напряжений (1.41)–(1.43), но записанных для диффузорного течения. К конфузорному течению в данной системе можно перейти заменой знака скорости и при необходимости выбором направления интегрирования. После чего для практически интересных случаев течения в соосных конических каналах были выполнены оценки величины членов в уравнениях, описывающих течения несжимаемой ньютоновской жидкости в таких каналах. В результате, для осесимметричного стационарного ламинарного течения жидкости в соосных конических конфузорах постоянной ширины была записана, с учетом сделанных оценок и предложений, упрощенная система уравнений гидродинамики (1.66)–(1.69) с условиями однозначности, записанными в (1.70)–(1.72).

Для того, чтобы получить наиболее общие характеристики течения жидкости в рассматриваемых каналах, не зависящие от конкретных свойств жидкости или размеров канала, решим задачу ламинарного течения (1.66)–(1.69), (1.70)–(1.72) в безразмерных координатах. Используем для этого безразмерные переменные и параметры, следующие непосредственно из указанных уравнений, и которыми мы уже пользовались в главе 5 (5.1):

$$t=\xi_1-\xi;\ \xi=\frac{R}{h};\ \chi=\frac{\mathrm{X}}{h};\ \upsilon=\frac{V_R}{V_0};\ \Pi=\frac{(P-P_0)h}{\mu V_0};\ \mathrm{Re}_1=\frac{\rho h V_0}{\mu},\quad (9.88)$$

где Re_1 – число Рейнольдса, V_0 – средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной поверхностью скорость, определенная выражением (5.2), h – ширина канала (см. рис. 4.1), а P_0 определено в (1.72), и там же в главе 1 дано обоснование выбору P_0. Безразмерная координата t является результатом обезразмеривания координаты $T=R_1-R$ (1.66).

Далее, используя безразмерные переменные (9.88), запишем уравнения (1.67), (1.68) в безразмерном виде:

$$\mathrm{Re}_1\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\frac{1}{\sigma'}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sigma'\frac{\partial\upsilon}{\partial\chi}\right);\quad (9.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma'\upsilon)=0,\quad (9.90)$$

где величина σ' определена в (5.7).

При решении задачи ламинарного течения в соосном коническом конфузоре постоянной ширины вместо уравнения неразрывности (9.90), также как и для диффузорного течения, будем использовать его интегральный аналог, т.е. условие постоянства расхода жидкости в любом поперечном сечении канала, которое в безразмерном виде определится выражением (см. рисунок 4.1)

$$\int_0^1\sigma'\upsilon d\chi=\frac{1}{2}(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha).\quad (9.91)$$

Обоснование использования уравнения (9.91) вместо (9.90) приведено в разделе 4.2.

Граничные и начальное условия (1.70)–(1.72) в безразмерных переменных примут вид:

$$\upsilon=0,\quad \chi=0;\quad (9.92)$$

$$\upsilon=0,\quad \chi=1;\quad (9.93)$$

$$\Pi=0,\quad t=0.\quad (9.94)$$

Таким образом, математическая формулировка задачи ламинарного течения при малых и умеренных числах Рейнольдса в соосном коническом диффузоре постоянной ширины определяется системой уравнений (9.89), (9.91) с условиями однозначности (9.92)–(9.94).

9.9. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат

Я на груди своей ношу три звонких колокольца.
Они ведут меня вперед и ведают дорожку.
Сработал их под Новый Год знакомый мастер Прошка.

А. Башлачев

Данная постановка задачи (9.89), (9.91)–(9.94) позволяет получить ее аналитическое решение, что в свою очередь дает возможность определить наиболее общие характеристики течения и исследовать с их учетом влияние инерционной силы, характерной для конфузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины. Для выполнения решения, прежде всего, преобразуем инерционный член в уравнении (9.89) в соответствии с предположением, которое было использовано нами ранее для преобразования уравнения, описывающем диффузорное течение (9.11), т.е. безразмерную скорость v в произведении левой части (9.89) заменим на безразмерную среднюю по площади поперечного сечения канала скорость

$$\mathrm{Re}_1 \bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} \approx \mathrm{Re}_1 \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dt}, \qquad (9.95)$$

тем самым мы распределенную по поперечному сечению канала инерционную силу заменяем на среднюю по площади поверхности поперечного сечения канала инерционную силу, характерную для конфузорного течения, т.е. силу, возникающую вследствие измене-

ния средней по площади поперечного сечения канала скорости вдоль течения.

Очевидно, что безразмерная средняя по площади поперечного сечения соосного конического конфузора скорость будет определяться выражением (5.16), т.е.

$$\overline{v} = \frac{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha}. \tag{9.96}$$

Вычисляя производную в правой части (9.95) и затем, вычисляя все произведение и подставляя результат в (9.89), получаем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathrm{Re}_1 \frac{2\sin\alpha\left(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2}{\left[2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha\right]^3} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \tag{9.97}$$

Обозначим разность в левой части последнего уравнения через $B(t)$

$$B(t) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathrm{Re}_1 \frac{2\sin\alpha\left(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2}{\left[2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha\right]^3}, \tag{9.98}$$

и перепишем (9.97) в виде равенства

$$B(t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}, \tag{9.99}$$

дважды интегрируя которое и определяя произвольные постоянные интегрирования с помощью граничных условий (9.92) и (9.93), получим для распределения безразмерной скорости v выражение

$$v = \frac{1}{2} B(t)\left(\chi^2 - \chi\right). \tag{9.100}$$

Выражение определяющее $B(t)$ находим, подставляя (9.100) в условие, определяющее постоянство расхода в любом поперечном сечении канала (9.91), т.е. совершенно аналогично тому, как мы определяли градиент давления в ползущем конфузорном течении (5.18). Проводя интегрирование в (9.91) и разрешая полученное уравнение относительно $B(t)$, находим:

$$B(t) = -12\frac{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha}. \qquad (9.101)$$

Далее подставляя (9.101) в (9.98), получаем выражение, определяющее градиент безразмерного давления в канале

$$\frac{d\Pi}{dt} = -12\frac{2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha} - \qquad (9.102)$$

$$-\mathrm{Re}_1 \frac{2\sin\alpha(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\left[2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha\right]^3}.$$

Мы видим, что выражение, определяющее безразмерный градиент давления, состоит из суммы двух членов. Первый из них определяется трением на границах канала, т.е. характеризует диссипативную компоненту безразмерного градиента давления. Очевидно, что этот член совпадает с выражением (5.19), которое определяет безразмерный градиент давления при ползущем конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины. Второй член суммы (9.102) представляет динамическую составляющую Π_t.

Выражение, определяющее распределение безразмерного давления вдоль течения, найдем, проинтегрировав (9.102) с начальным условием (9.94). Для удобства примем, что $z = 2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha$, и тогда мы можем записать интеграл от (9.102) как

$$\Pi(t) = \int \frac{d\Pi}{dt} dt = 6(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\int \frac{dz}{z} + \mathrm{Re}_1 (2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)^2 \int \frac{dz}{z^3} =$$

$$= 6(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\ln\left[2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha\right] - \qquad (9.103)$$

$$-\frac{\mathrm{Re}_1}{2}\frac{(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\left[2(\xi_1 - t)\sin\alpha - \cos\alpha\right]^2} + C,$$

где C – постоянная интегрирования, которую определяем из начального условия (9.94)

$$C = -6\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\left(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha\right) + \frac{\mathrm{Re}_1}{2}, \qquad (9.104)$$

и после подстановки (9.104) в (9.103) получаем выражение, определяющее распределение безразмерного давления при ламинарном течении в соосном конфузоре

$$\Pi(t) = -6\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\left(\xi_1 - t\right) - \operatorname{ctg}\alpha} + \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left\{1 - \left[\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\left(\xi_1 - t\right) - \operatorname{ctg}\alpha}\right]^2\right\}. \qquad (9.105)$$

В последнем выражении, так же как и в (9.102), первое слагаемое в правой части определяет изменение безразмерного давления вдоль течения за счет трения на границах канала и представляет диссипативную компоненту безразмерного давления. В дальнейшем мы будем обозначать его, как Π_{dis}. Второй член суммы (9.105) представляет динамическую составляющую безразмерного давления и определяет изменение безразмерного давления вдоль течения за счет действия инерционной силы, характерной для течения в соосных конических конфузорах. В дальнейшем мы будем обозначать его как Π_{din}.

Выражения (9.100) и (9.101) показывают, что распределение безразмерной скорости будет определяться тем же выражением, что и при течении с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса, т.е. в случае ползущего течения (5.21).

Решения, полученные нами для безразмерного давления и его градиента (9.105) и (9.102) с учетом выражения для безразмерной средней по площади поперечного сечения канала скорости (9.94), можно записать в виде:

$$\Pi(t) = -6\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\bar{v} + \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left(1 - \bar{v}^2\right); \qquad (9.106)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -12\bar{v} - \frac{2\mathrm{Re}_1}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}\bar{v}^3. \qquad (9.107)$$

Если в выражениях (9.102), (9.105)–(9.107) положить Re = 0, то мы получим соотношения (5.19), (5.23), (5.24) и (5.20), определяющие распределение безразмерного давления и его градиента при ползущем конфузорном течении в каналах рассматриваемой геометрии.

Здесь следует заметить, что, если в выражениях (9.102) и (9.105) положить $\alpha = 90°$, то получим выражения, описывающие распределения безразмерного давления и его градиента при радиальном сходящемся ламинарном течении жидкости с малыми и умеренными числами Рейнольдса между параллельными плоскостями:

$$\Pi(t) = -12\xi_1 \ln\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} + \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^2\right]; \tag{9.108}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -12\frac{\xi_1}{\xi_1 - t} - \mathrm{Re}_1\frac{\xi_1^2}{(\xi_1 - t)^3}, \tag{9.109}$$

или учитывая определение безразмерной средней по площади поперечного сечения скорости в таком канале, которое мы получим из (9.96)

$$\overline{v}_{90} = \overline{v}\left(\alpha = 90^{\circ}\right) = \frac{\xi_1}{\xi_1 - t}, \tag{9.110}$$

перепишем два последних равенства форме:

$$\Pi(t) = -12\xi_1 \ln\overline{v}_{90} + \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1 - \overline{v}_{90}^2\right]; \tag{9.111}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -12\overline{v}_{90} - \mathrm{Re}_1\frac{\overline{v}_{90}^3}{\xi_1}. \tag{9.112}$$

Итак, мы получили решение задачи стационарного установившегося ламинарного течения жидкости при малых и умеренных значениях числа Рейнольдса в соосном коническом конфузоре (9.102), (9.105)–(9.112). И поскольку распределение скорости при ламинарном течении в таких каналах мы достаточно детально рассмотрели в главах 4 и 5, в настоящей главе мы основное внимание

уделим анализу влияния инерционных свойств конфузорного течения на распределение безразмерного давления (перепада давления) в канале.

9.10. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины

...пора чудес прошла, и нам
Подыскивать приходится причины
Всему, что совершается на свете.

В. Шекспир

Так же, как и при диффузорном течении, определяющими параметрами задачи являются значения числа Re_1 и величина полууглов раскрытия граничных поверхностей α. В главе 5 мы кратко рассмотрели распределение безразмерного давления вдоль ползучего течения, т.е. при $\mathrm{Re}_1 = 0$, в соосном коническом конфузоре постоянной ширины. В настоящем разделе мы сосредоточим внимание на изучение влияния ненулевых значений числа Рейнольдса на распределение безразмерного давления вдоль течения, т.е. изучим влияние характерной инерционной силы, возникающей при течениях в соосных конических конфузорах на распределение давления.

Для выяснения характера такого влияния рассмотрим распределение $\Pi(t)$ при различных значениях числа Рейнольдса. Анализировать распределение безразмерного давления будем с помощью решения, записанного в форме (9.105).

Рассмотрим течение в канале с геометрическими параметрами $\alpha = 5°$, $\xi_0 = 26$, $\xi_1 = 56$ и числах Рейнольдса, равных 5, 50, 100 и 150.

Распределение безразмерного давления Π при $\mathrm{Re} = 5$ отличается от распределения Π при $\mathrm{Re}_1 = 0$ не более, чем на 3 % (рис. 9.17), причем максимальное отклонение достигается на выходе из кана-

ла. Это говорит, что при данных параметрах течения оценить изменение давления в канале можно, используя только диссипативную составляющую давления (5.23).

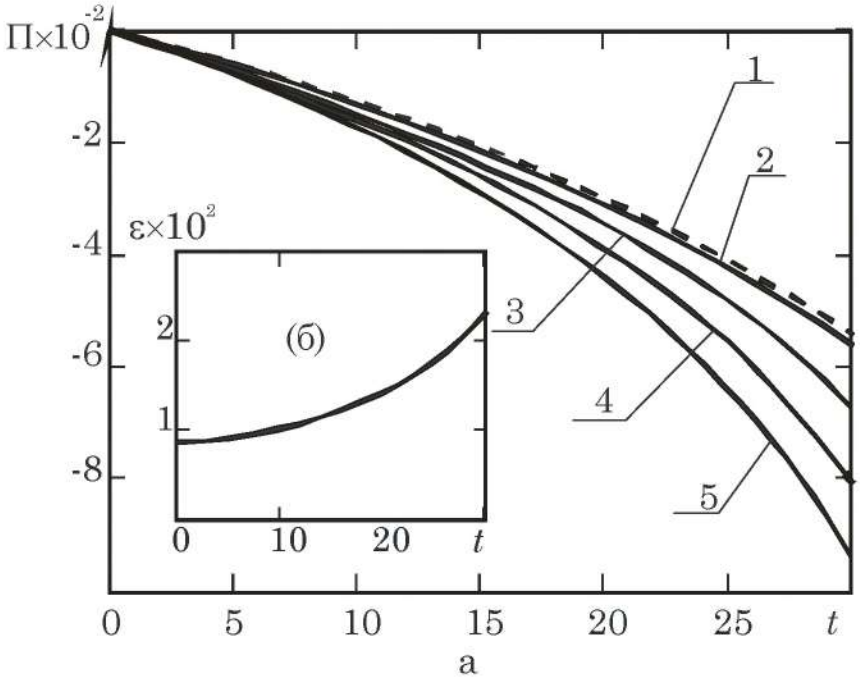


Рис. 9.17. Распределение безразмерного давления вдоль течения в канале с размерами: $\alpha = 5°$, $\xi_0 = 26$, $\xi_1 = 56$ – а; 1 – Re = 0, 2 – Re = 5, 3 – Re = 50, 4 – Re = 100, 5 – Re = 150; б – распределение вдоль течения относительного отклонения между значениями безразмерного давления, вычисленными по (5.23) и (9.105) при Re = 5.

Увеличение числа Re_1 приводит к более существенному влиянию инерционного члена, и падение безразмерного давления вдоль канала увеличивается. Это происходит потому, что с увеличением расхода жидкости, т.е. числа Re_1, все большая часть энергии напряженного состояния переходит в кинетическую энергию в соответствии с законом Бернулли вследствие увеличения скорости течения вдоль канала. Поскольку безразмерный градиент давления пропорционален $-\overline{v}^3$ (9.107), то наиболее значительное падение давления будет наблюдаться вблизи выхода из канала, где средняя скорость жидкости максимальная (рис. 9.17, 9.18).

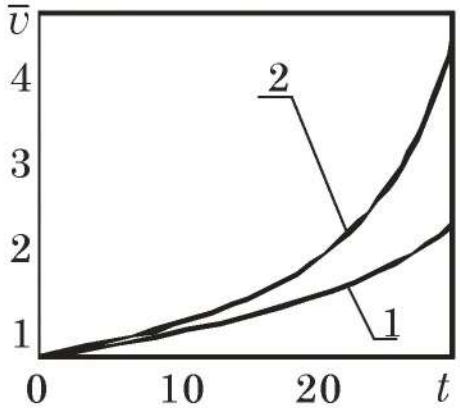


Рис. 9.18. Изменение средней безразмерной скорости вдоль течения: 1 – в канале с размерами: $\alpha = 5°$, $\xi_0 = 26$, $\xi_1 = 56$; 2 – $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$.

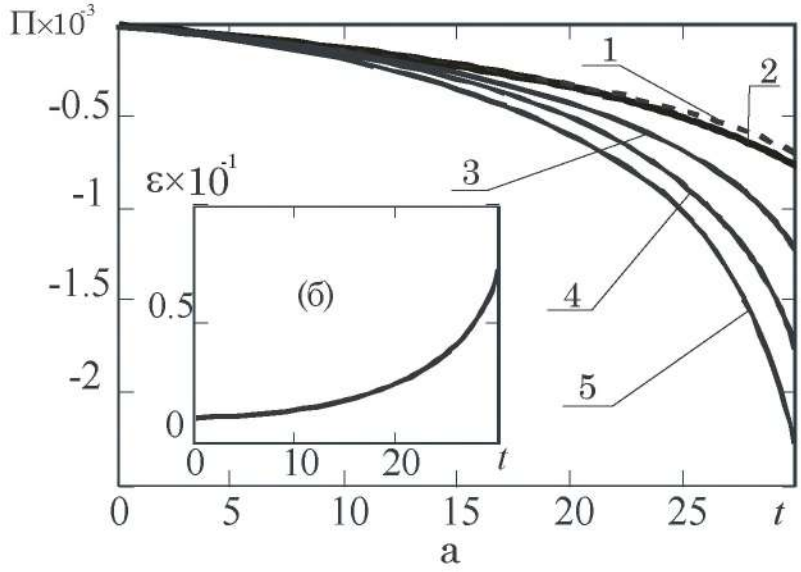


Рис. 9.19. Распределение безразмерного давления вдоль течения в канале с размерами: $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ – а; 1 – Re = 0, 2 – Re = 5, 3 – Re = 50, 4 – Re = 100, 5 – Re = 150; б – распределение вдоль течения относительного отклонения между значениями безразмерного давления, вычисленными по (5.23) и (9.105) при Re = 5.

Увеличивая угол α, можно одновременно уменьшать значение ξ_0 и исследовать течение в рамках выбранного приближения.

В случае течения в канале с геометрическими размерами $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ относительное отклонение между величинами безразмерного давления при $Re_1 = 5$, рассчитанными по (9.105) и (5.23), т.е. при $Re_1 = 0$ на выходе из канала, несколько превышает 5 % (рис. 9.19).

Поскольку в данном случае относительное увеличение средней скорости течения вдоль канала несколько больше, чем в ранее рассмотренном случае, то и падение безразмерного давления здесь больше для всех соответствующих чисел Рейнольдса (рис. 9.17).

И для числа Рейнольдса, равного 150, в данном случае с хорошим приближением можно оценить безразмерное давление на выходе из канала с помощью вычисления его инерционной компоненты.

Таким образом, анализ распределения безразмерного давления, его градиента и их составляющих в зависимости от величины числа Рейнольдса показал, что существуют числа Re_1, вплоть до которых, при расчете безразмерного среднего по поперечному сечению соосного конического конфузора постоянной ширины, в случае ламинарного течения, можно пренебречь инерционной силой, возникающей вследствие увеличения скорости жидкости вдоль канала. Мы также видели, что существует диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого необходимо учитывать как влияние трения, так и влияние динамической составляющей при расчете безразмерного давления, а значит и перепада давления в конфузоре.

Для того, чтобы исследовать зависимость перепада давления от полуугла раскрытия конических поверхностей в общем случае, необходимо перейти к безразмерным координатам, в которых будет исключена зависимость масштаба скорости от угла α. Это позволит сравнивать значения безразмерного давления в канале для различных полууглов раскрытия граничных конических поверхностей, как мы уже поступали в разделе 9.4 при изучении диффузорного течения. В качестве масштаба скорости выберем величину (9.55), что конечно повлечет и изменение записи условия постоянства расхода в любом поперечном сечении конфузора (9.91), которое теперь запишется в виде

$$\int_0^1 \left[(\xi_1 - t)\sin\alpha - \chi\cos\alpha \right] v^* d\chi = \frac{1}{2}. \qquad (9.113)$$

Формально определения всех остальных параметров остаются прежними, т.е. (9.88), но вследствие изменения формулировки по-

стоянства расхода в произвольном поперечном сечении канала (9.113) изменится и запись решения задачи (9.89)–(9.94). Действительно, принимая во внимание распределение (5.21), получим выражение, определяющее безразмерную скорость в новом масштабе

$$\upsilon^* = \frac{V}{V_0^*} = \upsilon\frac{V_0}{V_0^*} = \frac{\upsilon}{2\xi_1\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{6\left(\chi - \chi^2\right)}{2\left(\xi_1 - t\right)\sin\alpha - \cos\alpha}. \quad (9.114)$$

Аналогично для средней скорости получим

$$\overline{\upsilon}^* = \frac{1}{2\left(\xi_1 - t\right)\sin\alpha - \cos\alpha}, \quad (9.115)$$

и, следовательно, (9.111) мы можем записать как

$$\upsilon^* = 6\overline{\upsilon}^*\left(\chi - \chi^2\right). \quad (9.116)$$

Число Рейнольдса в новом масштабе определится выражением (9.62), а безразмерное давление, учитывая (9.88), определим с помощью преобразования, аналогичного (9.114)

$$\Pi^* = \frac{\left(P - P_0\right)h}{\mu V_0}\frac{V_0}{V_0^*} = \Pi\frac{V_0}{V_0^*} = -\frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\left(\xi_1 - t\right) - \operatorname{ctg}\alpha} + \quad (9.117)$$

$$+\frac{\mathrm{Re}_1^*}{2\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)^2}\left\{1 - \left[\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\left(\xi_1 - t\right) - \operatorname{ctg}\alpha}\right]^2\right\},$$

или, учитывая (9.115), запишем последнее выражение в виде

$$\Pi^* = -\frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{\overline{\upsilon}^*}{\overline{\upsilon}_0^*} + \frac{\mathrm{Re}_1^*}{2}\left(\overline{\upsilon}_0^{*2} - \overline{\upsilon}^{*2}\right). \quad (9.118)$$

Заметим, что число Рейнольдса – Re_1^*, определенное по (9.62), в $2\xi_1\sin\alpha - \cos\alpha$ раза больше, чем число Re_1, определенное выражением (9.88) для равных условий течения. Для уже рассмотренных случаев эти величины равняются 8.8 и 19.7 в соответсвии с порядком рассмотрения.

Существенная зависимость Π^* от Re_1^* наблюдается только при малых значениях α, когда средние по поперечному сечению канала скорости имеют наибольшее значение (рис. 9.20). Заметим, что зависимость безразмерного давления на выходе из канала от параметров α и Re_1^* представлена на рисунке 9.20 для постоянных значений ξ_0 и ξ_1.

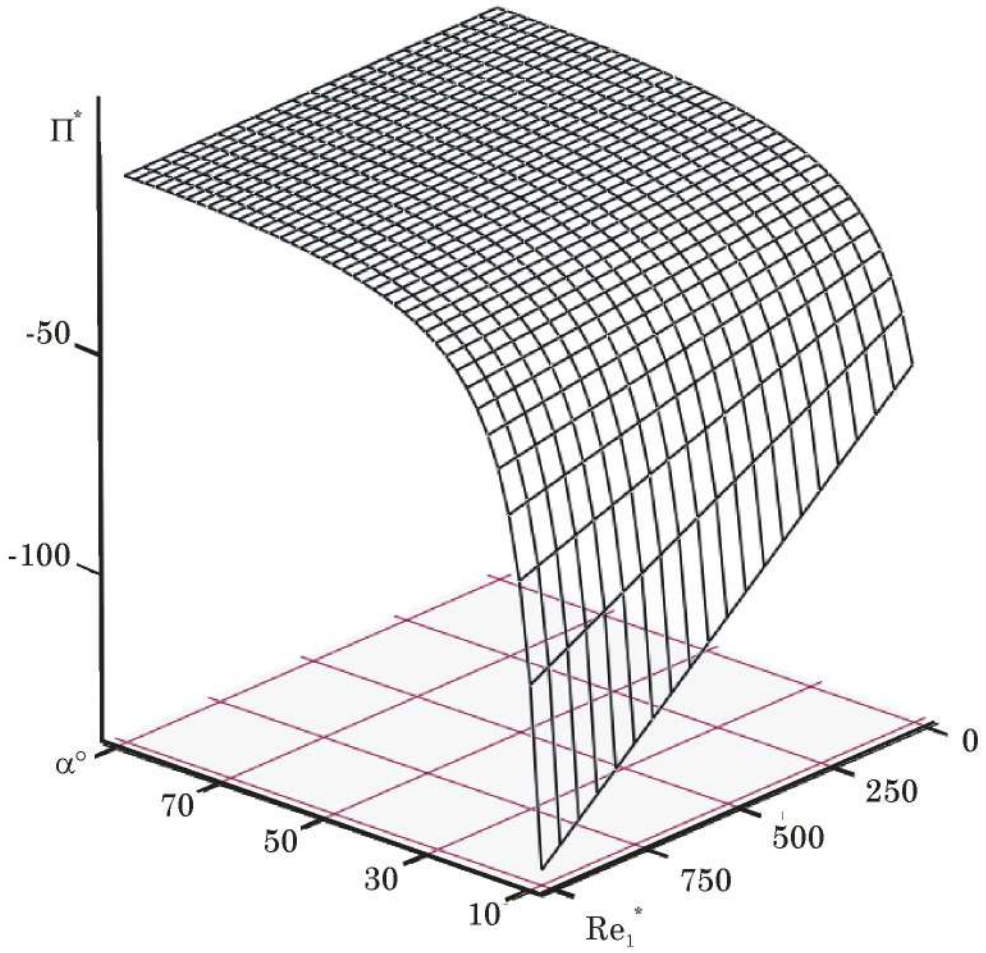


Рис. 9.20. Зависимость безразмерного давления на выходе из соосного конического конфузора, ограниченного безразмерными координатами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$, вычисленного по (9.117) от полуугла раскрытия границ канала и числа Рейнольдса (9.62).

Приведенные на рисунках (9.17, 9.19) распределения безразмерного давления показывают, что существуют числа Рейнольдса, при превышении которых можно пренебречь силой трения, вычисляя безразмерное давление, а значит и перепад давления в конфузоре.

Определением указанных чисел Рейнольдса в зависимости от других параметров задачи мы и займемся в следующем разделе данной главы.

9.11. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь инерционными свойствами ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины при вычислении перепада давления

Что великие числа –
Пастухи моей мысли.

В. Хлебников

С помощью полученного нами распределения безразмерного давления при течении жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины (9.105), которое является суммой динамической и диссипативной его компонент, мы можем определить критические значения числа Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать динамической частью при вычислении безразмерного давления, а значит и размерного перепада давления ΔP в канале. Для этого введем относительное отклонение безразмерного давления П, вычисленного с учетом инерционных свойств (9.105) от его диссипативной составляющей Π_{dis}, т.е. при $\mathrm{Re}_1 = 0$ в (9.105)

$$\varepsilon_F(t) = \left| \frac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}} \right|, \qquad (9.119)$$

которое практически аналогично определению (9.27), данного для диффузорного течения.

Мы видели на рисунках 9.17 и 9.19, что зависимость $\varepsilon_F(t)$ является монотонной функцией, а это значит, что функция $\varepsilon_F(t)$ принимает свои минимальное и максимальное значения на границах

интервала определения. Найдем, на какой из границ интервала определения $\varepsilon_F(t)$, т.е. $[0, \xi_1 - \xi_0]$ функция (9.119), принимает максимальное значение, а на какой – минимальное, и определим эти величины. Сначала определим значение $\varepsilon_F(0)$, т.е. на входе в канал. Выполняя подстановку выражений, определяющих Π и Π_{dis}, в (9.119) перепишем его в виде

$$\varepsilon_F(t) = \left| \frac{\frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left\{1 - \left[\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2(\xi_1 - t) - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right]^2\right\}}{-6(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\ln\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2(\xi_1 - t) - \mathrm{ctg}\,\alpha}} \right|, \qquad (9.120)$$

и если в него вместо t подставить значение 0, то получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности вычислим предел $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_F(t)$, применяя правило Лопиталя [117]

$$\varepsilon_F(0) = \lim_{t\to 0}\varepsilon_F(t) =$$

$$= \frac{\mathrm{Re}_1}{12(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}\lim_{t\to 0}\left| \frac{1 - \left[\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2(\xi_1 - t) - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right]^2}{\ln\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{2(\xi_1 - t) - \mathrm{ctg}\,\alpha}} \right| \Rightarrow \qquad (9.121)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{Re}_1}{6(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}.$$

Заметим, что использование правила Лопиталя при нахождении предела (9.120) имеет вполне определенный физический смысл, поскольку отношение давлений при определенной координате, в данном случае это координата входа, заменяется на отношение их градиентов. С этим связана и конечная величина относительного отклонения безразмерного давления от его диссипативной

составляющей на входе в канал (рис. 9.17б и рис. 9.19б). В то время, как $\Pi(0)=0$ и $\Pi_{dis}(0)=0$ их градиенты на входе в канал имеют конечную величину, поэтому и $\varepsilon_F(0)$ отлично от 0. Это же замечание можно отнести и к использованию правила Лопиталя в разделе 9.6.

На второй границе области определения $\varepsilon_F(t)$, т.е. на выходе из канала определим ε_F, подставляя значение $t = \xi_1 - \xi_0$ в (9.120)

$$\varepsilon_F(\xi_1-\xi_0)=\left|\frac{\mathrm{Re}_1\left[1-\left(\dfrac{2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2\right]}{-12(2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha)\ln\dfrac{2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha}}\right|. \qquad (9.122)$$

Сравнение значений (9.122) с (9.121) достаточно сложно без прямого вычисления, но мы можем сделать оценку величины (9.122) на выходе из канала, т.е. при $\xi=\xi_0$. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{\xi_1\to\xi_0}\varepsilon_F(\xi_1-\xi_0)$. Прямая подстановка ξ_0 вместо ξ_1 в (9.122) приводит к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$, которую раскроем с помощью правила Лопиталя

$$\varepsilon_F(\xi_0)=\lim_{\xi_1\to\xi_0}\varepsilon_F(\xi_1-\xi_0)=\lim_{\xi_1\to\xi_0}\left|\frac{\mathrm{Re}_1\left[1-\left(\dfrac{2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2\right]}{-12(2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha)\ln\dfrac{2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha}}\right|\Rightarrow \qquad (9.123)$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\mathrm{Re}_1}{6(2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha)}.$$

В данном случае необходимо учитывать, что ξ_0 определяется в соответствии с (9.88), т.е. за масштаб линейного размера принята ширина канала, и в то же время должно быть выполнено условие

(9.8), поэтому значение ξ_0 будет всегда меньше, чем ξ_1, т.е. $\xi_0 < \xi_1$, а это значит, что всегда выполняется неравенство

$$\varepsilon_F(\xi_0) > \varepsilon_F(0), \tag{9.124}$$

что вполне согласуется с данными, представленными на рисунках 9.17 и 9.19.

Заметим, что чем короче канал, тем точнее формула (9.123) аппроксимирует выражение (9.122), но для практически интересных случаев относительное отклонение (9.123) от (9.122) не превышает 30 %.

Если в качестве значимой величины относительного отклонения Π, вычисленного с учетом характерной для конфузорного течения силы инерции от Π, определенного без такого учета, выбрать значение в n %, то используя (9.123), можно записать, что при выполнении неравенства

$$\mathrm{Re}_1 \le \frac{6}{100} n\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right), \tag{9.125}$$

можно при вычислении безразмерного давления для ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины пренебречь инерционной составляющей давления. Выбирая для n величину равную 1 %, из (9.125) получаем

$$\mathrm{Re}_1 \le 0.06\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right). \tag{9.126}$$

Заметим, что в случаях течения, рассмотренных в разделе 9.10, числа Рейнольдса, вплоть до которых можно было пренебрегать инерционными свойствами при расчете перепада давления с точностью до 1 %, составляют значения 0.98 и 2.43 соответственно.

Если в (9.125) мы положим $\alpha = 90°$, то получим соотношение

$$\mathrm{Re}_1 \le 0.12 n \xi_0, \tag{9.127}$$

определяющее число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать, с точностью в n%, характерной инерционной силой при расчете давления для расходящегося ламинарного течения между параллельными плоскостями.

9.12. Диапазон чисел Рейнольдса, в пределах которого можно пренебречь трением при вычислении перепада давления в ламинарном конфузорном течении жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины

Совершенные числа красивы.

Никомах из Геразы

В предыдущем разделе мы по сути дела определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором при расчете безразмерного давления П с помощью (9.105) можно не учитывать величину второго члена. И, очевидно, существуют такие значения чисел Re_1, при которых можно пренебрегать значением первого слагаемого в (9.105). На рисунке 9.19 мы видели, что уже при $\mathrm{Re}_1 = 150$ изменение безразмерного давления вдоль ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале происходит за счет динамической его составляющей. При больших значениях Re_1 трением в расчетах перепада давления, по-видимому, можно будет пренебречь. Найдем критическое значение числа Re_1, при котором первый член (9.105) будет несущественен в расчетах, и зависимость этого числа от основных параметров канала. Для этого определим относительное отклонение безразмерного давления от его динамической составляющей аналогично (8.48)

$$\varepsilon_D(t) = \left| \frac{\Pi - \Pi_{din}}{\Pi_{din}} \right|, \tag{9.128}$$

где динамическая компонента безразмерного давления при ламинарном течении в соосном коническом конфузоре постоянной ширины из (9.105) определяется как

$$\Pi_{din} = \frac{\mathrm{Re}_1}{2} \left\{ 1 - \left[\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2(\xi_1 - t) - \operatorname{ctg}\alpha} \right]^2 \right\}. \tag{9.129}$$

Подставляя в (9.128) выражения (9.105) и (9.129), получаем

$$\varepsilon_D(t)=\left|\frac{-6(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)\ln\dfrac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{2(\xi_1-t)-\operatorname{ctg}\alpha}}{\dfrac{\mathrm{Re}_1}{2}\left\{1-\left[\dfrac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{2(\xi_1-t)-\operatorname{ctg}\alpha}\right]^2\right\}}\right|. \qquad (9.130)$$

Сравнивая (9.130) и (9.120), находим соотношение

$$\varepsilon_D(t)=\frac{1}{\varepsilon_F(t)}, \qquad (9.131)$$

аналогичное (8.51) и (8.103) и (9.70). Следовательно, там, где величина ε_F имеет минимальное значение, ε_D имеет максимальное значение и наоборот. Это понятно потому, что П является суммой двух слагаемых, и там, где сумма имеет минимальное относительное отклонение от одного из них, она будет иметь максимальное относительное отклонение от другого.

Если ввести величину значимого отклонения равную n %, то критическое значение числа Рейнольдса, при превышении которого можно пренебрегать трением, рассчитывая безразмерное давление в конфузоре, будет определяться из соотношения

$$\varepsilon_D \le \frac{n}{100}. \qquad (9.132)$$

Понятно, что для того, чтобы Re_1, определенное из (9.132), было действительно для всей длины канала, мы должны выбрать наибольшее значение ε_D. Исходя из (9.121) и (9.131), наибольшей в пределах канала ε_D будет величина

$$\varepsilon_D=\frac{1}{\varepsilon_F(0)}=\frac{6(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)}{\mathrm{Re}_1}. \qquad (9.133)$$

Используя (9.132), находим критическое значение числа Re_1

$$\mathrm{Re}_1 \ge \frac{600(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)}{n}, \qquad (9.134)$$

и если выбрать n = 1 %, то получим

$$\mathrm{Re}_1 \geq 600\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right). \qquad (9.135)$$

Итак, мы определили диапазоны изменения чисел Рейнольдса Re_1, в которых при расчете безразмерного давления для ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины можно пренебречь одной из его составляющих, либо необходимо учитывать обе. Выбирая существенным значением относительного отклонения безразмерного давления от его составляющих величину, равную n %, запишем диапазоны для критических чисел Рейнольдса:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}_1 \leq \dfrac{6}{100} n\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right); & \text{можно пренебрегать динамической составляющей,} \\ \dfrac{6}{100} n\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right) < \mathrm{Re}_1 < \dfrac{600\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}{n}; & \text{необходимо учитывать обе составляющие,} \\ \mathrm{Re}_1 \geq \dfrac{600\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}{n}, & \text{можно пренебрегать диссипативной составляющей.} \end{cases} \qquad (9.136)$$

Если в выражениях (9.136) мы положим $\alpha = 90°$, то получим определения критических значений чисел Рейнольдса, ограничивающих диапазоны изменения Re, в пределах которых вычисление безразмерного давления при ламинарном сходящемся течении между параллельными плоскостями:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}_1 \leq 0.12 n\xi_0; & \text{можно пренебрегать динамической составляющей,} \\ 0.12 n\xi_0 < \mathrm{Re}_1 < \dfrac{1200}{n}\xi_1; & \text{необходимо учитывать обе составляющие,} \\ \mathrm{Re}_1 \geq \dfrac{1200}{n}\xi_1, & \text{можно пренебрегать диссипативной составляющей.} \end{cases} \qquad (9.137)$$

9.13. Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосных конических конфузорах постоянной ширины, рассчитанная с учетом инерционных свойств

Ни одно человеческое исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

Для получения расходно-напорной характеристики конфузорного ламинарного течения с существенными характерными для конфузорных течений силами инерции в соосных конических каналах постоянной ширины преобразуем зависимость (9.105) в размерный вид с помощью определений (9.86). В результате запишем

$$\Delta P(Q)=\frac{6\mu Q}{\pi h^3\sin\alpha}\ln\frac{2R_0-h\operatorname{ctg}\alpha}{2R_1-h\operatorname{ctg}\alpha}+ \\ +\frac{\rho Q^2}{2\pi h^2\left(2R_1\sin\alpha-h\cos\alpha\right)^2}\left[1-\left(\frac{2R_1-h\operatorname{ctg}\alpha}{2R_0-h\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\right]. \qquad (9.138)$$

Рассмотрим зависимость (9.138) для канала с конкретными геометрическими размерами и для жидкости с заданными физическими свойствами. Предположим, что ширина конфузорного канала равна h = 0.01 м, безразмерная коодината входа в канал R_1 = 0.4 м, а безразмерная радиальная координата выхода из него равна R_0 = R_1 - ΔT = 0.1 м, где ΔT – длина образующей конической поверхности конфузора. Для исследования примем, что полуугол раскрытия границ канала изменяется от 10° до 90°. Физические свойства жидкости, также как в предыдущем разделе, будем считать равными: ρ = 1200 кг/м^3, μ = 10 Па·с. Исследуем зависимость $\Delta P(Q)$ в пределах изменения объемного расхода жидкости Q = 0…0.2 м^3/с.

Расходно-напорная характеристика (9.138) существенно отличается от характеристики диффузорного течения, рассмотренной в разделе 9.7 настоящей главы.

Расходно-напорная зависимость при конфузорном течении является монотонно убывающей функцией для всего возможного диапазона значений полуугла раскрытия граничных поверхностей канала (рис. 9.21). При этом перепад давления ΔP, рассчитанный с учетом характерной инерционной силы, будет больше, чем перепад давления, определенный только с учетом трения.

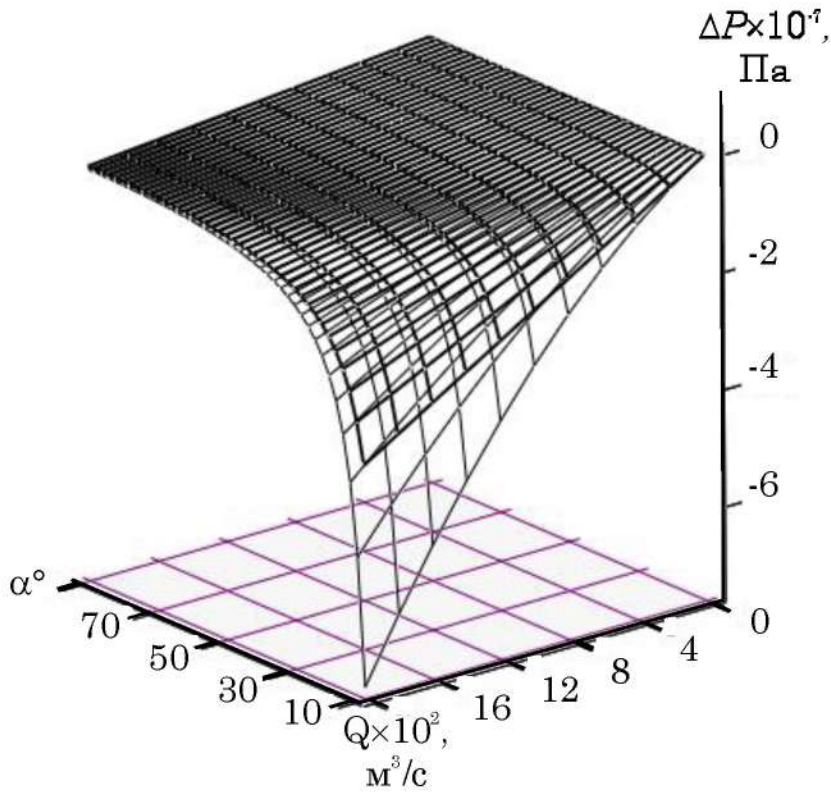


Рис. 9.21. Расходно-напорная характеристика ламинарного конфузорного течения жидкости с физическими свойствами $\mu = 10$ Па·с и $\rho = 1200$ кг/м^3 в соосном коническом канале постоянной ширины, равной $h = 0.01$ м в зависимости от полуугла раскрытия его границ.

Это происходит вследствие того, что увеличение объемного расхода жидкости приводит к увеличению перепада давления в канале как за счет трения на границах канала, так и за счет перехода потенциальной энергии напряженного состояния жидкости в ее ки-

нетическую энергию, т.е. динамическая составляющая давления увеличивается по модулю, с увеличением Q будучи отрицательной (рис. 9.21).

9.14. Мощность, необходимая для обеспечения заданного расхода жидкости в соосных конических каналах постоянной ширины

Приносить жертву чужому духу будет лесть
А видеть должное и не исполнить – трусость

Конфуций

В главе 4 мы определили мощность необходимую для обеспечения заданного расхода через соосный конический диффузор постоянной ширины в случае ползущего течения (4.66). Формальное применение выражения (4.66) для определения мощности в случае необходимости учета влияния характерной инерционной силы на распределение давления может привести к неверным результатам.

Мощность, необходимая для поддержания заданного расхода через соосный конический диффузор постоянной ширины и в рассматриваемом случае течения будет определяться выражением (4.66). Но если жидкость прокачивается через диффузор из резервуара, где ее скорость можно считать равной нулю, то при вычислении мощности, которую нужно подвести к валу двигателя насоса, необходимо учесть и мощность на разгон жидкости до скорости средней по поперечному сечению входа в канал, и следовательно, мощность на валу двигателя, обеспечивающего перекачку жидкости через диффузор с заданным расходом определиться формулой

$$N=\frac{\rho Q^3}{2\pi h^2\left(2R_0\sin\alpha-h\cos\alpha\right)^2}-\frac{6\mu Q^2}{\pi h^3\sin\alpha}\ln\frac{2R_0-h\operatorname{ctg}\alpha}{2R_1-h\operatorname{ctg}\alpha}. \quad (9.139)$$

В случае вычисления мощности, необходимой для поддержания расхода через соосный конический конфузор необходимо учитывать мощность, расходуемую на увеличение скорости жидкости при течении вдоль канала, а это значит, что можно формально ис-

пользовать выражение (4.66). Следовательно, мощность на поддержание заданного расхода в конфузоре определиться как

$$N = |\Delta P| Q, \tag{9.140}$$

где ΔP определяется выражением (9.138).

Представление (9.140) возможно в данном случае по той причине, что диссипативная и динамическая составляющие давления имеют одинаковый знак.

Если необходимо определить общую мощность, которая должна быть приложена к валу двигателя для обеспечения течения с заданным расходом через конфузор с учетом разгона жидкости до средней скорости жидкости на входе в канал, то в этом случае к (9.140) необходимо прибавить выражение

$$N_{\text{P}} = \frac{\rho Q^3}{2\pi h^2 \left(2R_1 \sin\alpha - h\cos\alpha\right)^2}, \tag{9.141}$$

т.е. мощность, необходимую для увеличения средней скорости жидкости от нуля до ее значения на входе в конфузор. После суммирования для N получим выражение

$$N = \frac{\rho Q^3}{2\pi h^2 \left(2R_1 \sin\alpha - h\cos\alpha\right)^2}\left(\frac{2R_1 - h\operatorname{ctg}\alpha}{2R_0 - h\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 + \tag{9.142}$$

$$+\left|\frac{6\mu Q^2}{\pi h^3 \sin\alpha}\ln\frac{2R_0 - h\operatorname{ctg}\alpha}{2R_1 - h\operatorname{ctg}\alpha}\right|.$$

Таким образом, мощность которую необходимо подвести к валу двигателя для перекачки жидкости через соосный конический конфузор с заданным расходом определится выражением (9.142), состоящем из суммы мощности идущей на преодоления трения в канале и мощности расходуемой на увеличение средней по поперечному сечению канала скорости жидкости от нуля до ее значения на выходе их конфузора.

В данном разделе мы изложили общую методику определения мощности, необходимой для поддержания заданного расхода в диффузорных и конфузорных каналах и в дальнейшем изложении больше возвращаться к этому вопросу не будем.

ГЛАВА 10

АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО ДИФФУЗОРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ

Физика есть геометрия.

Ч. Мизнер, Дж. Уилер

10.1. Замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических каналах переменной ширины и учетом инерционных свойств

Вы помните,
Вы все, конечно, помните,...

С. Есенин

В главе 4 мы уже отмечали, что публикаций, посвященных исследованию ламинарного течения в соосных конических каналах, крайне мало, это же относится и к работам, рассматривающим течение с учетом инерционных свойств. А если ограничиться каналами переменной ширины, то к ранним работам в этом направлении можно отнести только публикации [111, 125, 126].

Если в работе [111], рассматривающей течение в соосных конических каналах с общей вершиной границ, ее результаты в большей степени, как мы уже отмечали ранее, имеют качественный характер, то для решения уравнений движения жидкости в [125, 126] авторы используют регулярные разложения безразмерной скорости жидкости и безразмерного давления по степеням числа Рейнольдса, что является некоторым обобщением метода разложения по малому параметру на системы дифференциальных уравнений в частных производных. Использование данного подхода к решению

уравнений гидродинамики правомерно только при исчезающе малых значениях чисел Рейнольдса, что вполне оправдано в задачах, для которых были проведены исследования [125, 126]. В этих работах изучались течения в очень тонких щелевых системах, применяемых в космической технике.

Автор данной монографии в работах [34, 38] исследовал ламинарные течения в соосных конических диффузорах с переменной вдоль течения шириной с учетом инерционных свойств на основе уравнений Озеена, записанных в биконической системе координат. Дальнейшее изложение материала в настоящей главе является естественным углублением и развитием результатов работ [34, 38]. Мы решим задачу ламинарного течения и определим влияние инерционных свойств течения на перепад давления в соосном коническом диффузоре с линейно изменяющейся вдоль течения шириной канала, образованного поверхностями, не имеющими общей вершины, и определим пределы применяемости решений, полученных ранее без учета инерционных сил.

10.2. Математическая формулировка задачи ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале переменой ширины и с частичным учетом инерционных свойств

Великий архитектор Вселенной все более представляется нам чистым математиком.

Джеймс Джинс

Так же как и в течениях, рассмотренных в предыдущей главе при диффузорном течении в соосных конических каналах переменной ширины, практически всегда будет отлична от нуля инерционная сила, действующая на жидкость. Это происходит вследствие того, что вдоль канала средняя скорость течения жидкости изменяется. При диффузорном течении скорость уменьшается из-за увеличения площади поверхности поперечного сечения канала. Инерционную силу, возникающую при изменении средней по площади поперечного сечения соосного конического диффузора, как и в преды-

дущей главе, будем называть характерной инерционной силой, появляющейся при ламинарном течении жидкости в соосном коническом диффузоре.

В настоящем разделе данной главы мы дадим математическую формулировку задачи ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в соосном коническом диффузоре переменной ширины и с учетом инерционных свойств течения.

Геометрия соосного конического диффузора переменной ширины представлена в главе 6 на рисунках 6.1 и 6.2. Там же мы исследовали ползущее течение в соосных каналах переменной ширины с помощью уравнений движения, записанных в биконической системе координат. Используем эту же систему координат и для описания ламинарного течения в соосных диффузорах переменной ширины. В разделе 1.5 мы получили уравнения стационарного ламинарного движения ньютоновской жидкости в биконической системе координат. Там же для практически важных случаев течения были получены соотношения порядка для составляющих скорости $V_{\mathrm{X}} = o(V_R)$ и градиента давления $\left|\frac{\partial P}{\partial \mathrm{X}}\right| = o\left|\frac{\partial P}{\partial R}\right|$, что позволило редуцировать систему уравнений движения стационарного осесимметричного ламинарного течения ньютоновской жидкости в биконической системе (1.53), (1.57), (1.58) координат к системе двух уравнений:

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\mu}{\Omega}\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\Omega \frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}}\right); \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V) = 0, \tag{10.2}$$

где Ω определяется выражением (1.21).

Условиями однозначности для определения распределения скорости жидкости, текущей в канале, будут условия прилипания на границах канала:

$$V = 0,\ \mathrm{X} = 0; \tag{10.3}$$

$$V = 0,\ \mathrm{X} = h(R), \tag{10.4}$$

где $h(R)$ – функция, определяющая изменение ширины канала

вдоль течения.

Поскольку, как отмечалось в главе 1, в большинстве технических приложений границами соосных конических поверхностей являются круговые конусы с прямолинейными образующими, то в качестве функции $h(R)$ в дальнейшем будем использовать, если это не будет специально оговорено, линейную функцию

$$h(R) = h_0 + b(R - R_0), \tag{10.5}$$

показывающую зависимость расстояния по оси X от внешней конической поверхности до внутренней поверхности (рис. 6.1). В том случае, когда конические границы канала раскрываются в одну сторону (см. рис. 1.3), параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ канала (рис. 6.1), т.е.

$$b = \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1), \tag{10.6}$$

и, следовательно, из геометрических соображений он должен удовлетворять условию (6.10). Если конические границы канала раскрываются навстречу друг другу (рис. 6.45), то параметр b определяется тангенсом суммы полууглов раскрытия поверхностей (6.114).

Для давления условием однозначности будет заданная величина давления на входе в канал

$$P = P_0, \;\; R = R_0. \tag{10.7}$$

Обоснование такого выбора начального условия мы сделали в главе 6, (см. также гл. 1 (1.65)).

Заметим, что граничные условия аналогичные условию (10.4) многие авторы рекомендуют использовать при решении задач ламинарного течения высоковязких жидкостей в каналах с переменной площадью поверхности поперечного сечения вдоль канала (см. например [100]).

При формулировке данной задачи мы уже использовали закон сохранения вещества, записанный в дифференциальной форме уравнения неразрывности (10.2), в дальнейшем же, при решении поставленной задачи, будем применять интегральную запись дан-

ного закона, т.е. условие постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала, которое мы сформулировали в главе 6 (6.12), и для удобства читателя приводим его еще раз

$$2\pi \int_0^{h_0+b(R-R_0)} (R\sin\alpha - X\cos\alpha)VdX = Q, \qquad (10.8)$$

где Q – объемный расход жидкости, м^3/с. Краткое обоснование такого подхода было сделано в разделе 4.2.

Для того, чтобы получить наиболее общие характеристики течения жидкости в рассматриваемых каналах, независящие от конкретных свойств жидкости или размеров канала, запишем уравнения, описывающие ламинарное течение (10.1)–(10.5) в безразмерных координатах. Используем для этого безразмерные переменные и параметры, следующие непосредственно из указанных уравнений, и которыми мы уже пользовались в главе 6 (6.18), но с дополнительным безразмерным критерием – числом Рейнольдса:

$$\xi = \frac{R}{h_0};\ \chi = \frac{X}{h_0};\ \upsilon = \frac{V_R}{V_0};\ \Pi = \frac{(P-P_0)h_0}{\mu V_0};\ \mathrm{Re} = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}. \qquad (10.9)$$

где Re – число Рейнольдса, V_0 – скорость средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной поверхностью, определенная выражением (6.16), h_0 – ширина канала на его входе (см. рис. 6.1).

Изменение безразмерной ширины канала вдоль безразмерной радиальной координаты ξ определится той же самой формулой, которую мы использовали в главе 6, т.е.

$$\tilde{h}(\xi) = 1 + b(\xi - \xi_0). \qquad (10.10)$$

Далее, используя безразмерные переменные (10.9), запишем уравнения (10.3), (10.8) в безразмерном виде

$$\mathrm{Re}\,\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sigma\frac{\partial\upsilon}{\partial\chi}\right), \qquad (10.11)$$

$$\int_0^{1+b(\xi-\xi_0)} (\xi\sin\alpha - \chi\cos\alpha)\upsilon d\chi = \frac{1}{2}(2\xi_0\sin\alpha - \cos\alpha). \qquad (10.12)$$

Граничные условия (10.3), (10.4) и начальное условие (10.7) в безразмерных переменных примут вид:

$$\upsilon = 0, \ \chi = 0; \qquad (10.13)$$

$$\upsilon = 0, \ \chi = 1 + b(\xi - \xi_0); \qquad (10.14)$$

$$\Pi = 0, \quad \xi = \xi_0. \qquad (10.15)$$

Таким образом, математическая формулировка задачи ламинарного течения при малых и умеренных числах Рейнольдса в соосном коническом диффузоре переменной ширины в безразмерной постановке определяется системой уравнений: (10.11)–(10.15).

10.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом диффузоре переменной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат

Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!

В.Я. Брюсов

В работах [28, 32] автором данной монографии показано, что при выполнении условия

$$\xi \gg 2.22\operatorname{ctg}\alpha, \qquad (10.16)$$

которое выполняется для большинства практических приложений [6, 7], [56–61], [110], [113], [123], влиянием различия в кривизне граничных поверхностей в уравнении движения, записанных в биконических координатах, можно пренебречь. В настоящей монографии это условие будет также обсуждаться и для каналов с переменной шириной вдоль течения в разделе 6 главы 21, а в данном разделе мы используем его для упрощения выражения (4.8), определяющего σ. С помощью (10.16) выражение (4.8) может быть записано в виде

$$\sigma=\xi\sin\alpha\,. \tag{10.17}$$

Уравнение движения (10.11) при подстановке в него выражения (10.17) примет вид

$$\mathrm{Re}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\chi^2}\,. \tag{10.18}$$

В левой части уравнения (10.18) записано выражение, определяющее распределение действующей на жидкость инерционной силы по поперечному сечению канала. Учет такого распределения важен для решения задачи ламинарного течения в пределах начального гидродинамического участка [132].

Из работ Н.А. Слезкина и С.М. Тарга [111, 132] следует, что при течении с малыми и умеренными числами Рейнольдса начальный гидродинамический участок представляет величину порядка ширины канала. Поэтому в данной главе мы будем рассматривать развитые течения, а это позволяет сделать предположение, которое подтвердится в главах 19 и 20, что основной вклад в инерционный член (10.18) будет давать инерционная сила, возникающая вследствие изменения средней скорости жидкости вдоль течения, т.е. мы можем записать

$$\mathrm{Re}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\approx\mathrm{Re}\bar{\upsilon}\frac{d\bar{\upsilon}}{d\xi}\,. \tag{10.19}$$

Этот же результат можно получить, рассматривая одномерный баланс сил вдоль течения на элементарном участке канала. Подставляя (10.19) в (10.18), получаем

$$\mathrm{Re}\bar{\upsilon}\frac{d\bar{\upsilon}}{d\xi}=-\frac{d\Pi}{d\xi}+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\chi^2}\,, \tag{10.20}$$

т.е. мы получили упрощенное уравнение диффузорного ламинарного течения жидкости в соосном коническом канале переменной ширины, и его запись полностью совпадает с аналогичным уравнением, которое мы решили в главе 9 для течения в канале постоянной ширины.

Прежде чем приступить к решению уравнения (10.20), заметим, что для соосного конического канала, в котором здесь рассмат-

ривается течение, распределение площади поверхности поперечного сечения канала координатной поверхностью выражается соотношением (6.14) и, соответственно, средняя скорость течения выражением (6.17). Безразмерная средняя скорость определяется формулой (6.27), а относительная безразмерная площадь поверхности поперечного сечения – выражением (6.26).

Дифференцируя (6.27) и вычисляя произведение в левой части (10.20), получим

$$\frac{d\Pi}{d\xi} - \mathrm{Re}\left\{\frac{b\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2}{\left[\tilde{h}(\xi)\right]^3\left[2\xi\sin\alpha - \tilde{h}(\xi)\right]^2} + \right. \tag{10.21}$$

$$\left. + \frac{\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2\left(2\sin\alpha - b\cos\alpha\right)}{\left[\tilde{h}(\xi)\right]^2\left[2\xi\sin\alpha - \tilde{h}(\xi)\right]^3}\right\} = \frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}.$$

Левая часть (10.21) не зависит от χ, и тогда, обозначая ее через $B(\xi)$, перепишем (10.21) в виде

$$B(\xi) = \frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \tag{10.22}$$

Интегрируя (10.22) с граничными условиями (10.13) и (10.14), будем иметь

$$v = \frac{1}{2}B(\xi)\left\{\chi^2 - \left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\chi\right\}. \tag{10.23}$$

Для определения зависимости $B(\xi)$ подставим (10.23) в (10.12) и, проинтегрировав полученное выражение, найдем, что

$$B(\xi) = \frac{12\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)}{\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]^4 \cos\alpha - 2\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]^3 \xi\sin\alpha}. \tag{10.24}$$

Подставляя (10.24) в (10.22) и (10.21), находим выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления вдоль канала

$$\frac{d\Pi}{d\xi}=\frac{12(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]^4\operatorname{ctg}\alpha-2\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]^3\xi}+$$

$$+\operatorname{Re}\left\{\frac{b(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)^2}{\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]^3\left\{2\xi-\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]\operatorname{ctg}\alpha\right\}^2}+\right. \qquad (10.25)$$

$$\left.+\frac{(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)^2(2-b\operatorname{ctg}\alpha)}{\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]^2\left\{2\xi-\left[1+b(\xi-\xi_0)\right]\operatorname{ctg}\alpha\right\}^3}\right\}.$$

Мы видим, что выражение, определяющее безразмерный градиент давления, состоит из суммы двух членов. Первый из них определяется трением на границах канала, т.е. характеризует диссипативную компоненту безразмерного градиента давления. Очевидно, что этот член совпадает с выражением (6.33), которое определяет безразмерный градиент давления при ползущем диффузорном течении в соосном коническом канале переменной ширины. Второй член суммы определяется характерной для диффузорного течения инерционной силой и представляет динамическую компоненту безразмерного градиента давления.

Принимая во внимание соотношение (6.27), выражение для определения безразмерного градиента давления (10.25) можно записать в виде

$$\frac{d\Pi}{d\xi}=-12\frac{\bar{v}}{\tilde{h}^2(\xi)}+\operatorname{Re}\bar{v}^2\left[\frac{b}{\tilde{h}(\xi)}+\frac{2-b\operatorname{ctg}\alpha}{2\xi-\tilde{h}(\xi)\operatorname{ctg}\alpha}\right]. \qquad (10.26)$$

Для выяснения явного вида зависимости безразмерного давления от продольной координаты проинтегрируем (10.25) вдоль ξ с учетом (10.15). Интеграл от первого члена в сумме (10.25) определяет распределение безразмерного давления в соосном коническом диффузоре при Re = 0, т.е. без учета инерционных сил. Обозначая его через $\Pi_{dis}(\xi)$ и делая замену переменной $y = g[1 + b(\xi - \xi_0)]$, где $g=\dfrac{b\operatorname{ctg}\alpha-2}{2(1-b\xi_0)}$, запишем

$$\Pi_{dis}(\xi)=\frac{6(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)g^2}{\operatorname{tg}\alpha(1-b\xi_0)}\int_{g}^{g[1+b(\xi-\xi_0)]}\frac{dy}{y^3(1+y)}. \qquad (10.27)$$

Выполняя интегрирование в (10.27) и возвращаясь к переменным биконической системы координат, получим

$$\Pi_{dis}(\xi)=\frac{6(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{1-b\xi_0}\left\{\frac{(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2}{4(1-b\xi_0)^2}\ln\frac{(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)\tilde{h}(\xi)}{2\xi-\tilde{h}(\xi)\operatorname{ctg}\alpha}+\right. \qquad (10.28)$$

$$\left.+\frac{b(\xi-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi)}\left[\frac{2-b\operatorname{ctg}\alpha}{1-b\xi_0}+\frac{1+\tilde{h}(\xi)}{\tilde{h}(\xi)}\right]\right\}.$$

Выражение (10.28) очевидно совпадает с соотношением (6.40), которое описывает распределение безразмерного давления при ползущем диффузорном течении в соосном коническом канале переменной ширины.

Для определения интеграла от второго члена суммы (10.25) сделаем замену переменной $z = 1 + b(\xi - \xi_0)$ и введем следующие обозначения: $a = 2 - b\operatorname{ctg}\alpha$; $c = 2(b\xi_0 - 1)$; $d = 2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha$; $p=\frac{c}{a}$, после чего можем записать

$$\Pi_{din}(z)=\operatorname{Re}\frac{b^2d^2}{a^2}\int_1^z\frac{2y+p}{y^2(y+p)^3}dy=-\frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{b^2d^2}{a^2}\frac{1}{y^2(p+y)^2}\Bigg|_1^z, \qquad (10.29)$$

где y – переменная интегрирования.

Выполняя подстановку пределов интегрирования в (10.29) и возвращаясь к исходным биконическим координатам, получим

$$\Pi_{din}(\xi)=\frac{\operatorname{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha}{\tilde{h}(\xi)\left[\xi(2-b\operatorname{ctg}\alpha)+(b\xi_0-1)\operatorname{ctg}\alpha\right]}\right]^2\right\}. \qquad (10.30)$$

Принимая во внимание (6.27), перепишем выражение (10.30) в виде

$$\Pi_{din}(\xi)=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\overline{v}(\xi)\right]^2\right\}, \tag{10.31}$$

или в соответствии с (6.27) запишем

$$\Pi_{din}(\xi)=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{\left[\overline{v}(\xi_0)\right]^2-\left[\overline{v}(\xi)\right]^2\right\}. \tag{10.32}$$

Общее изменение безразмерного давления вдоль течения в соосном коническом диффузоре будет определяться суммой (17) и (19), т.е.

$$\Pi(\xi)=\Pi_{dis}(\xi)+\Pi_{din}(\xi). \tag{10.33}$$

Подставляя (10.24) в (10.23), получаем распределение скорости в канале, которое, очевидно, должно совпадать с распределением (6.35), но для удобства читателя мы приведем его еще раз

$$v=\frac{6\left(2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha\right)\left\{\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]\chi-\chi^2\right\}}{2\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^3\xi-\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^4\mathrm{ctg}\,\alpha}. \tag{10.34}$$

Если мы в выражениях (10.25), (10.33) и (10.34) положим b = 0, то получим решение задачи ламинарного диффузорного течения с частичным учетом инерционных сил в соосном коническом канале постоянной ширины, которая была рассмотрена в предыдущей главе.

Если же в (10.25), (10.33) положить Re = 0, то мы получим выражения, определяющие распределения безразмерного давления и его градиента при медленном диффузорном течении в соосном коническом канале с линейно меняющейся шириной, рассмотренной в шестой главе.

Если же в найденном нами здесь решении положить и Re = 0, b = 0, то мы получим распределение безразмерного давления и его градиента в случае медленного диффузорного течения между экви-

дистантными коническими поверхностями, которое рассмотрено в главе 4.

Но если мы положим $\alpha = 90°$, то получим случай течения, который в данной монографии еще не рассматривался. Мы получим распределение безразмерного давления и его градиента при ламинарном расходящемся течении ньютоновской жидкости между плоскостью и конусом с вершиной, не лежащей на плоскости, и осью, перпендикулярной к ней (рис. 6.3):

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \frac{\xi_0}{\left[1+b\left(\xi-\xi_0\right)\right]^3 \xi}\left[-12 + \mathrm{Re}\frac{(1+b\xi_0)\xi_0}{\xi^2}\right]; \qquad (10.35)$$

$$\Pi(\xi) = \frac{12\xi_0}{1+b\xi_0}\left\{\frac{1}{\left(1-b\xi_0\right)^2}\ln\frac{\xi_0}{\xi}\tilde{h}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{b(\xi-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi)}\left[\frac{2}{1-b\xi_0} + 1 + \frac{1}{\tilde{h}(\xi)}\right]\right\} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \frac{\xi_0^2}{\tilde{h}^2(\xi)\xi^2}\right]. \qquad (10.36)$$

Очевидно, что если в (10.36) положить $\mathrm{Re} = 0$, то мы получим выражение (6.41), описывающее распределение безразмерного давления при ползущем течении между плоскостью и круглой конической поверхностью, расположенной над плоскостью, и с вершиной, не лежащей на ней, и с осью, перпендикулярной к последней.

10.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при диффузором ламинарном течении в соосном коническом канале переменной ширины

Больше деталей, больше деталей, – воскликнул г-н Лёвен. – Только в деталях, правда и оригинальность.

Стендаль

Определяющими параметрами задачи (10.11)–(10.15) являются значения числа Re, безразмерной координаты входа в канал

ξ_0 и величина параметра b, которая определяется величиной еще двух параметров. Это значения полууглов раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала: для внешней границы – α и для внутренней – α_1 (рис. 6.2). В случае раскрытия граничных поверхностей в одну сторону параметр b определяется соотношением (6.9), в случае раскрытия границ канала навстречу друг другу – соотношением (6.114).

Рассмотрим влияние этих параметров на распределение безразмерных значений скорости, давления и его градиента в канале и сравним их между собой при различных значениях определяющих параметров. В настоящей главе будем рассматривать течение в соосных конических диффузорах с границами, раскрывающимися в одну и ту же сторону от их вершин (рис. 1.3). Сначала выберем геометрические параметры, определяющие течение, равными значениям: $\xi_0 = 10$, $\alpha = 15°$, $\mathrm{Re} = 5$, для которых рассмотрим каналы с полууглами раскрытия внутренней поверхности $\alpha_1 = 10°$ и $\alpha_2 = 16°$, что соответствует двум значениям b: $b_1 = 0.087$ и $b_2 = -0.017$. Безразмерную координату выхода из канала примем равной $\xi_1 = 40$.

Изменение безразмерной ширины канала вдоль течения и соответствующее распределение безразмерного поперечного сечения канала для указанных параметров приведено на рисунке 10.1. Мы видим, что в каналах с постоянной и увеличивающейся шириной площадь поперечного сечения монотонно возрастает с ростом ξ, а в канале с $\alpha_2 = 16°$, т.е. для $b = b_2$ (канал с уменьшающейся шириной вдоль течения) зависимость площади поперечного сечения от продольной координаты немонотонна. В начале течения с ростом ξ она возрастает, но с меньшим приростом, чем в предыдущих случаях. На некотором расстоянии от входа в канал площадь поверхности поперечного сечения достигает своего максимума и затем с увеличением ξ начинает уменьшаться вследствие уменьшения ширины канала.

Очевидно, что распределение безразмерных средних по поперечному сечению канала скоростей целиком будет соответствовать распределению относительных площадей поперечных сечений $\tilde{s}$

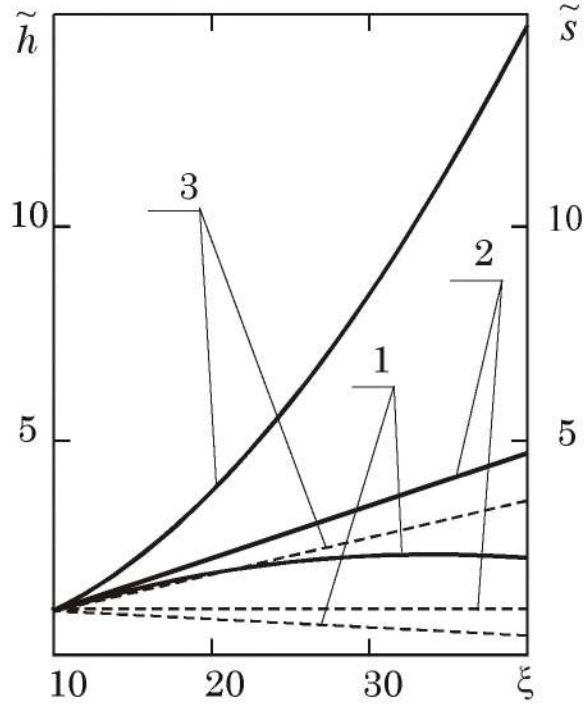


Рис. 10.1. Изменение вдоль течения безразмерной ширины канала $\tilde{h}$ – штриховые линии и относительной площади поверхности поперечного сечения $\tilde{s}$ – сплошные линии, в канале с размерами: $\xi_0 = 10$; $\xi_1 = 40$; $\alpha = 15°$. 1 – для значения $b = -0.0175$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = 0.0875$.

вдоль канала, поскольку они связаны соотношением $\bar{v} = \dfrac{1}{\tilde{s}}$. А это означает, что в каналах с постоянной шириной ($b = 0$) и $\alpha_1 = 10°$ ($b = b_1$) средняя по поперечному сечению канала скорость будет монотонно уменьшаться, а при течении в канале с уменьшающейся шириной будет иметь немонотонную зависимость от ξ (рис. 10.2). В начале канала средняя скорость будет уменьшаться, достигнет своего минимума и затем при уменьшении площади поверхности поперечного сечения (6.14) начнет возрастать (рис. 10.2).

Значение координаты ξ, при котором локализируется минимальное значение средней безразмерной скорости, определим из выражения, также, как и в главе 6, $\dfrac{d\bar{v}}{d\xi} = 0$

$$\xi_{\bar{v}\min} = \frac{(1 - b\xi_0)(b\operatorname{ctg}\alpha - 1)}{b(2 - b\operatorname{ctg}\alpha)}. \qquad (10.37)$$

В рассматриваемом случае, т.е. при $b = b_2$, $\xi_{\bar{v}\min} = 34.7$.

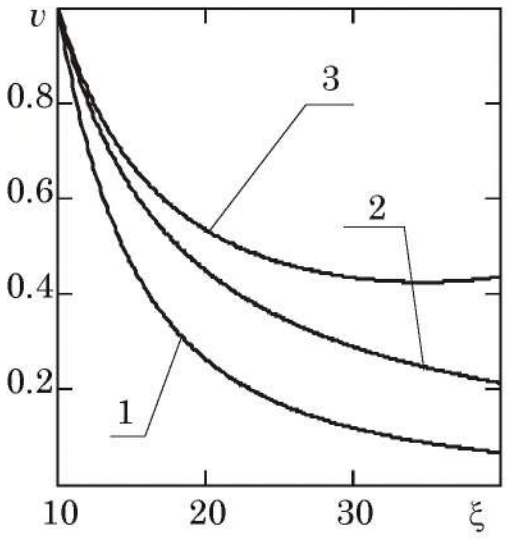


Рис. 10.2. Распределение безразмерной средней по площади поверхности поперечного сечения канала при диффузорном течении в соосном коническом канале с размерами: $\xi_0 = 10$; $\xi_1 = 40$; $\alpha = 15°$. 1 – для значения $b = 0.0875$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = -0.0175$.

С помощью соотношения (10.37) мы можем определить пределы изменения величины параметра b, при которой зависимость $\overline{v}(\xi)$ в канале может быть немонотонной.

Из геометрических соображений ясно, что немонотонная зависимость $\overline{v}(\xi)$ возможна только при отрицательных значениях b, при этом при уменьшении b минимум $\overline{v}(\xi)$ появится сначала вблизи выхода из канала. При дальнейшем уменьшении b минимальное значение средней безразмерной скорости будет перемещаться в сторону входа в канал. Определить значение b, при котором возникает минимум $\overline{v}(\xi)$ в канале, можно, приравняв $\xi_{\overline{v}\min} = \xi_1$, и решая полученное уравнение, найдем

$$b_{\overline{v}1} = \frac{2\xi_1 - \xi_0 - \sqrt{(2\xi_1 - \xi_0)^2 + 4(\xi_1 - \xi_0)\operatorname{ctg}\alpha}}{2(\xi_1 - \xi_0)\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (10.38)$$

Для выбранных параметров канала, т.е. $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ и $\alpha = 15°$, $b_{\overline{v}1} = -0.014$.

Из геометрических соображений понятно, что минимальное значение b в канале, фиксированном координатами ξ_0 и ξ_1, будет равна

$$b_{\overline{v}2} = \frac{1}{\xi_0 - \xi_1}, \qquad (10.39)$$

и в нашем случае $b_{\overline{v}2} = -0.033$. Следовательно, немонотонная зави-

симость $\bar{v}(\xi)$ возможна при изменении величины параметра b в пределах: $b_{\bar{v}2} \le b \le b_{\bar{v}1}$.

Заметим, что при некоторых геометрических параметрах канала возможно также уменьшение параметра b до значения, при котором локализация минимума $\bar{v}(\xi)$ достигает входа в канал. Действительно, если положить $\xi_{\bar{v}\min} = \xi_0$, то получим

$$b_{\bar{v}3} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha - \xi_0}. \qquad (10.40)$$

В нашем случае $b_{\bar{v}3}$= -0.16 < $b_{\bar{v}2}$, т.е. в рассматриваемом канале течение, при котором минимум $\bar{v}(\xi)$ находится вблизи входа в канал, невозможно. Но это не означает, что не существует канала, где такое распределение скорости возможно. Если положить $b_{\bar{v}2}$= $b_{\bar{v}3}$, можно при заданных значениях параметров ξ_0 и α определить значение координаты ξ_1 для канала, в котором локализация минимума $\bar{v}(\xi)$ будет вблизи входа

$$\xi_1^* = 2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha, \qquad (10.41)$$

и в нашем случае $\xi_1^* = 16.26$ при ξ_0 = 10, либо $\xi_0^* = 21.866$ при ξ_1 = 40.

Мы рассмотрели особенности распределения средней безразмерной скорости. Изменение распределения скорости в поперечном сечении канала вдоль течения также будет определяться характером изменения площади поперечного сечения канала вдоль продольной координаты (рис. 10.3). Заметим, что между областями определения скорости на рисунке 10.3 и продольным разрезом канала на рисунке 6.1 при $b \neq 0$ существует изоморфное соответствие, определяемое преобразованием:

$$\xi' = \xi\,;\chi' = \frac{\chi}{\left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]}, \qquad (10.42)$$

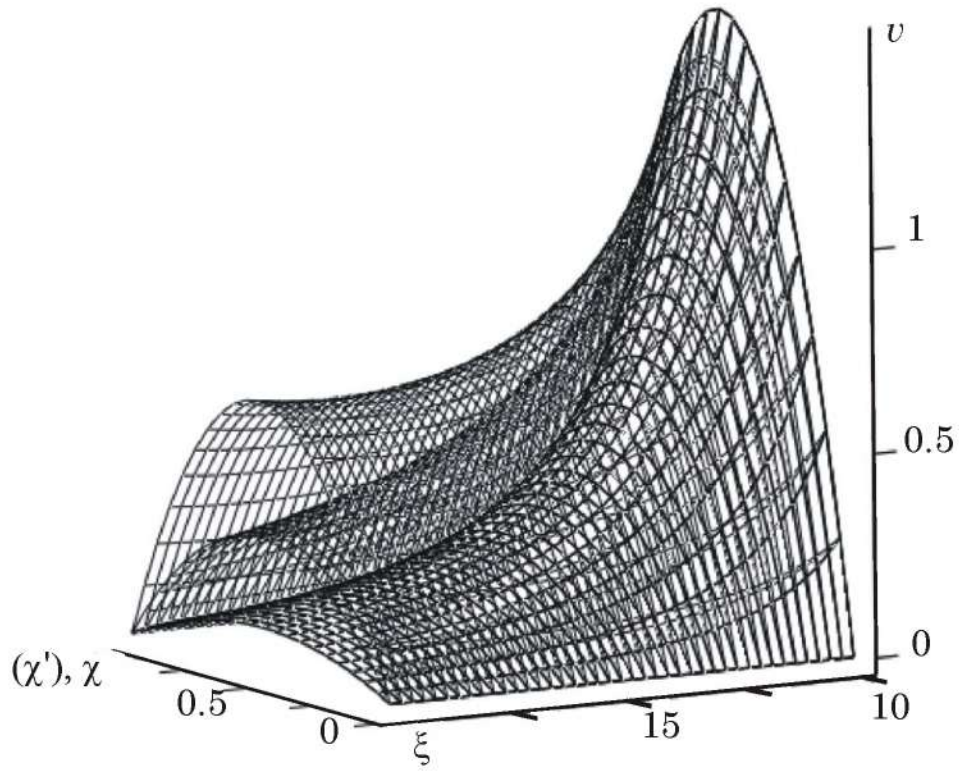


Рис. 10.3. Распределение безразмерной скорости при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 10$; $\xi_1 = 40$; $\alpha = 15°$. Нижняя поверхность для $b = 0.0875$; средняя для $b = 0$; верхняя для $b = -0.017$ (координата χ' используется для течения в канале при $b \neq 0$).

которое переводит трапециидальное, продольное сечение канала переменной ширины в координатах ξ, χ в прямоугольник в координатах ξ', χ'. Это позволило распределения скорости в рассматриваемых случаях показать на одном графике, но сравнивать их можно только по абсолютной величине.

Распределения υ в координатах (ξ, χ) представлены на рисунке 10.4.

Здесь хорошо видно различие в распределении скорости поперек течения в канале с постоянной шириной и с изменяющейся шириной вдоль продольной координаты ξ.

Распределение давления вдоль канала также в значительной степени зависит от его геометрии. В канале с увеличивающейся

шириной безразмерный перепад давления значительно меньше по абсолютной величине, чем в канале постоянной ширины (рис. 10.5), что в данном случае связано со значительно меньшей скоростью жидкости в канале с увеличивающейся шириной (рис. 10.3, 10.4). В канале с уменьшающейся шириной перепад давления значительно больше, чем в каналах с постоянной и увеличивающейся шириной. Это происходит вследствие большей скорости жидкости в этом ка-

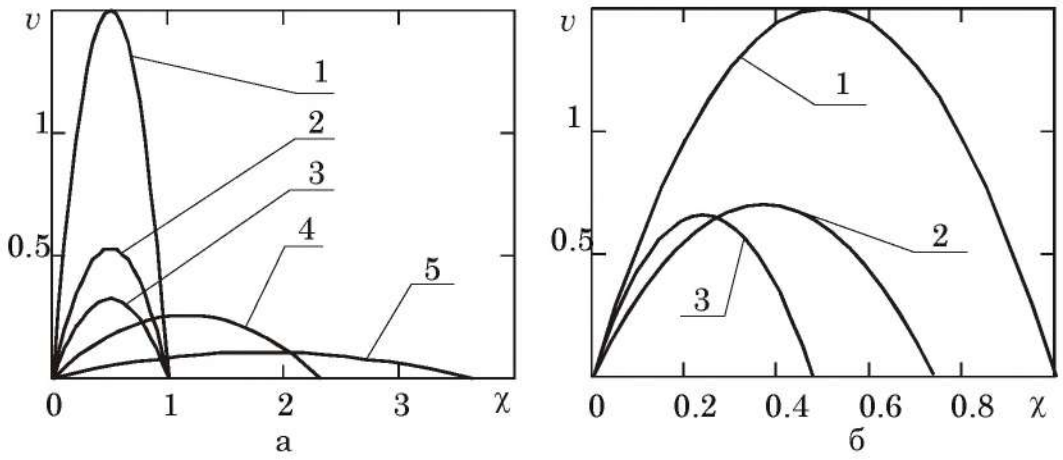


Рис. 10.4. Распределение безразмерной скорости поперек канала при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$; а – течение в канале с постоянной шириной $b = 0$: 1 – распределение на входе в канал $\xi = 10$; 2 – распределение при $\xi = 25$; 3 – на выходе из канала при $\xi = 40$ и течение в канале с увеличивающейся шириной при $b = 0.087$: 1 – распределение при $\xi = 10$, 4 – $\xi = 25$, 5 – $\xi = 40$; б – для течения в канале с уменьшающейся шириной при b = -0.017: 1 –$\xi = 10$, 2 – $\xi = 25$, 3 – $\xi = 40$.

нале (рис. 10.5а). Относительное отличие перепада давления, вычисленного с учетом инерционных свойств (10.33) и без такого учета (10.28) $-\varepsilon_F = \dfrac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}}$ для канала с $b = b_2$, не превышает 5%, а для $b = b_1$ – 8% на протяжении всего канала (рис. 10.5б). Некоторое различие в степени отклонения связано с различной интенсивностью изменения поперечного сечения рассматриваемых каналов вдоль течения (рис. 10.1). Чем сильнее меняется величина площади поперечного сечения канала вдоль течения (6.14), (6.26), тем силь-

нее меняется и средняя скорость (6.28), а значит, значительнее влияние инерционных сил (10.32), (10.33).

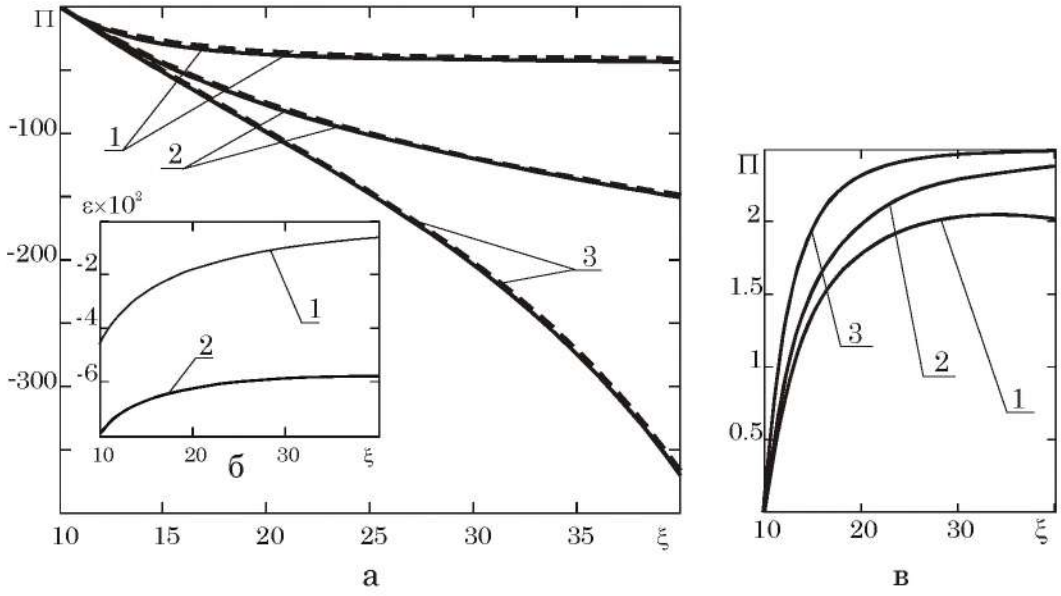


Рис. 10.5. Распределения вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных сил – сплошная линия, и с учетом характерной инерционной силы при Re = 5 – штриховая линия. 1 — в канале с линейно растущей шириной канала вдоль течения при $b = 0.0875$; 2 — в канале с постоянной шириной, т.е. $b = 0$; 3 – в канале с линейно уменьшающейся шириной $b = -0.0175$; б – относительного отклонения давления, рассчитанного с учетом инерционных сил при Re = 5 от давления, определенного без такого учета: 1 — в канале с $b = -0.0175$, 2 – $b = 0.0875$; в – части безразмерного давления, обусловленной учетом инерционного члена в уравнении движения при Re = 5: 1 – при расчете безразмерного давления для течения в канале с $b = -0.0175$, 2 – $b = 0$, 3 – $b = 0.0875$.

Заметим, что определить распределение безразмерного давления вдоль течения можно как с помощью выражений (10.33), (10.28), (10.30), так и помощью численного интегрирования уравнения (10.25). Следует сразу сказать, что во всех рассмотренных здесь случаях различие между значениями П, вычисленными двумя указанными способами, не превышают точности, с которой производились вычисления.

Если сравнить распределение безразмерного градиента давления в канале постоянной ширины с распределением в канале с увеличивающейся шириной, то в первом случае величина $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right|$ будет больше (рис. 10.6а). В обоих случаях модуль градиента уменьшается вдоль течения, но в канале с увеличивающейся шириной

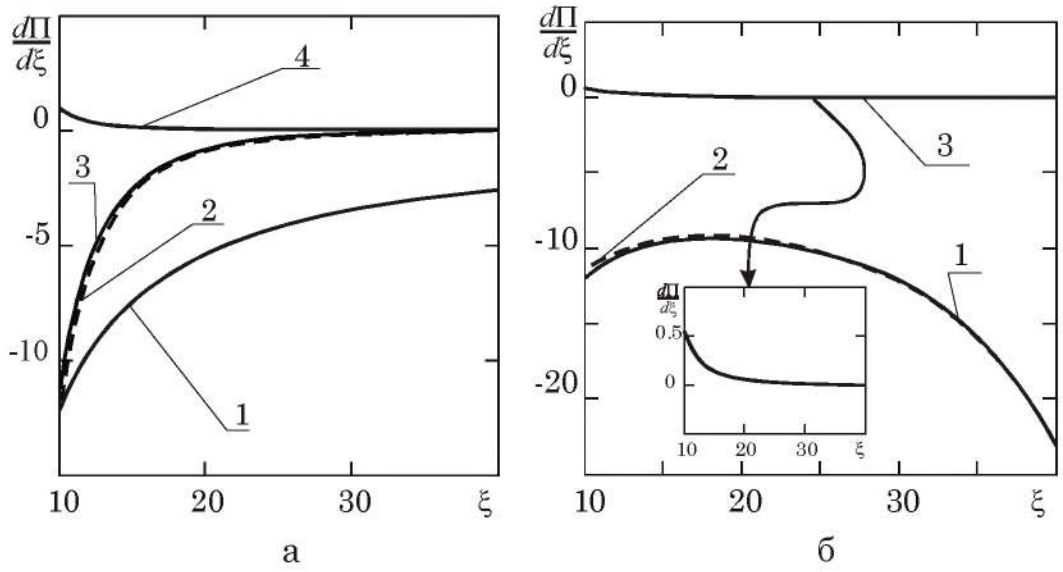


Рис. 10.6. Распределение безразмерного градиента давления и его инерционной составляющей вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$. а – в канале с увеличивающейся шириной вдоль течения при $b = 0.0875$ для числа Рейнольдса Re = 5. Градиент безразмерного давления в канале постоянной ширины — 1; 2 (штриховая линия) — градиент давления, рассчитанный без учета инерционных сил (10.28); 3 — градиент давления с учетом инерционных сил; 4 – инерционная составляющая градиента давления; б – в канале с уменьшающейся шириной вдоль ξ при $b = -0.0175$: 1 — градиент давления, определенный без учета инерционных свойств; 2 (штриховая линия) — градиент давления, определенный с учетом инерционных сил; 3.— инерционная составляющая градиента давления.

уменьшение значительнее и величина $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right|$ в пределах рассматриваемого канала практически стремится к 0. Это происходит вследствие того, что в канале с увеличивающейся шириной скорость уменьшается вдоль течения значительно быстрее, чем в канале постоянной ширины (рис. 10.2), что приводит к более резкому сниже-

нию напряжения сдвига на границах, а значит и модуля градиента давления.

Отличие величины градиента давления, рассчитанной с учетом инерционных сил при Re = 5, от величины $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right|$, вычисленной при Re = 0 в канале с увеличивающейся шириной вдоль течения, незначительное (рис. 10.6а). Безразмерное давление, вычисленное с учетом характерной инерционной силы по модулю, несколько меньше, чем при течении с $b = 0$ вследствие того, что при течении в канале с увеличивающимся поперечным сечением часть кинетической энергии движения жидкости переходит в потенциальную энергию напряженного состояния. Поэтому значение динамической составляющей безразмерного градиента давления в расширяющемся канале всегда будет положительно (рис. 10.6а).

В соосном коническом канале с уменьшающейся шириной, т.е. при $b = b_2$, градиент давления в начале течения уменьшается по абсолютной величине вследствие уменьшения средней скорости течения (рис. 10.6б) и, соответственно, уменьшения скорости сдвига на стенках канала (рис. 10.7). Модуль безразмерной скорости сдвига на границах канала определяется выражением

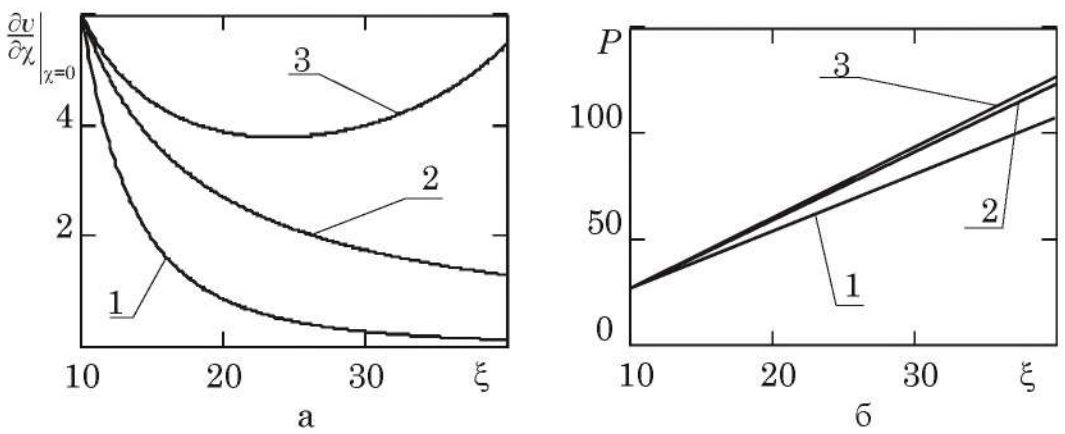


Рис. 10.7. Распределение вдоль канала с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$ безразмерных величин: а – скорости сдвига на границах канала: 1 — с увеличивающейся шириной при $b = 0.0875$; 2 — постоянной ширины ($b = 0$); 3 — с уменьшающейся шириной при $b = -0.0175$. б – смачиваемого периметра: 1 — в канале с $b = 0.0875$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = -0.0175$.

$$\dot{\gamma}\big|_{\Gamma i} = \left|\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}\right\|_{\chi=\begin{cases}0\\1+b_i(\xi-\xi_0)\end{cases}} = \tag{10.43}$$

$$= \frac{6\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)}{2\left[1+b_i\left(\xi-\xi_0\right)\right]^2\xi - \left[1+b_i\left(\xi-\xi_0\right)\right]^3\operatorname{ctg}\alpha},$$

где $i = 0, 1, 2$, а $b_0 = 0$, т.е. величина с индексом 0 соответствует течению в канале постоянной ширины.

Далее вдоль течения площадь поперечного сечения увеличивается и достигает своего максимума, а потом незначительно уменьшается (рис. 10.1). Распределение скорости в канале, соответствуя изменению поперечного сечения, имеет немонотонный характер, и, как следствие, немонотонно изменяется и скорость сдвига вдоль течения (рис. 10.7а). Локализацию минимального значения скорости сдвига на границах канала определяем, дифференцируя (10.43) по ξ и приравнивая к нулю результат

$$\xi_{shm} = \frac{\left(b\xi_0 - 1\right)\left(2 - 3b\operatorname{ctg}\alpha\right)}{3b\left(2 - b\operatorname{ctg}\alpha\right)}. \tag{10.44}$$

Соотношение (10.44) показывает, что немонотонная зависимость величины (10.43) от ξ в пределах канала возможна только при $b < 0$.

Используя выражение (10.44), определим интервал численных значений параметра b, для которых зависимость скорости сдвига на границе будет немонотонной. Также, как мы делали для определения величин (10.38) и (10.40), приравняем $\xi_{shm} = \xi_1$, поскольку локализация минимума скорости сдвига на границе канала в области выхода из канала будет определять максимальное значение b, при котором возможна немонотонная зависимость $\left|\frac{\partial \upsilon(\xi)}{\partial \chi}\right\|_{\chi=\begin{cases}0\\1+b(\xi-\xi_0)\end{cases}}$. В результате получим

$$b_{s1} = \frac{6\xi_1 - 2\xi_0 - 3\operatorname{ctg}\alpha + Sq}{6\left(\xi_1 - \xi_0\right)\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{10.55}$$

где $Sq = \sqrt{(2\xi_0 - 6\xi_1 + 3\operatorname{ctg}\alpha)^2 + 24(\xi_1 - \xi_0)\operatorname{ctg}\alpha}$.

В рассматриваемых случаях b_{s1} = -9.44×10^{-3}. Минимальное значение b, очевидно, как и при рассмотрении средней скорости, будет определяться величиной (10.39), т.е. $b_{s2} = b_{\bar{v}2}$.

Локализация минимума (10.43) возможна и у входа в канал, но при заданных величинах ξ_0 и α длина канала, т.е. значение координаты ξ_1, должно быть другим, и оно однозначно определяется значениями ξ_0 и α. Действительно, полагая $\xi_{shm} = \xi_0$, получим

$$b_{s3} = \frac{2}{3\operatorname{ctg}\alpha - 4\xi_0}. \qquad (10.56)$$

В нашем случае b_{s3} = -0.069, что меньше, чем b_{s2}, т.е. течение с минимумом скорости сдвига на границе в начале течения в рассматриваемом канале невозможно. Приравняв $b_{s3} = b_{s2}$, мы определим, что такое течение возможно в канале с координатой выхода, определяемой выражением

$$\xi_1^{**} = 3\xi_0 - 1.5\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (10.57)$$

При значениях $\xi_0 = 10$, $\alpha = 15°$, $\xi_1^{**} = 24.4$.

Интересно отметить, что интервалы численных значений b, в которых распределения средней скорости и скорости сдвига на границе немонотонны – различны. В нашем случае $b_{s1} > b_{\bar{v}1}$, т.е. существует геометрия канала, при течении в котором будет наблюдаться немонотонность распределения скорости сдвига, а распределение средней скорости вдоль течения будет монотонным.

При малых значениях числа Рейнольдса градиент давления в канале будет определяться силами трения на стенках канала, т.е. характером распределения скорости сдвига $\dot{\gamma}_\Gamma$ вдоль течения, и оценить характер его изменения можно, рассмотрев баланс сил на элементарном участке канала длиной $d\xi$ (рис. 6.13), что приведет к соотношению

$$\frac{d\Pi}{d\xi} \sim -\left\|\frac{\partial v}{\partial \chi}\right\|_{\chi=0} \frac{\mathrm{Per}(\xi)}{\tilde{s}(\xi)} \sim -\frac{\left\|\frac{\partial v}{\partial \chi}\right\|_{\chi=0}}{1 + b(\xi - \xi_0)} \sim -\frac{\bar{v}}{\tilde{h}(\xi)^2}, \qquad (10.58)$$

где $\mathrm{Per}(\xi) = 2\pi\left\{2\xi\sin\alpha - \left[1 + b(\xi - \xi_0)\right]\cos\alpha\right\}$ – смачиваемый периметр канала, линейно растущий с координатой ξ для любых возможных значений b (рис. 10.7). Результат (10.58) качественно эквивалентен первому члену суммы в правой части (10.25). Заметим, что второй член суммы в правой части (10.25) можно интерпретировать, как локальную запись закона Бернулли для диффузорного течения в соосных конических каналах.

В начале течения с $b < 0$ средняя скорость сдвига на границе канала уменьшается (рис. 10.2, 10.7а), что, несмотря на некоторое уменьшение ширины канала, приводит к снижению абсолютной величины градиента давления. Затем $\dfrac{d\Pi}{d\xi}$ достигает своего максимума, оставаясь отрицательным, и начинает снижаться, что происходит как вследствие увеличения скорости сдвига на границах канала (рис. 10.6а), так и за счет уменьшения $\tilde{h}(\xi)$ (10.26), (10.58).

Увеличение числа Рейнольдса приводит к более значительному влиянию характерной для диффузорного течения инерционной силы на распределение безразмерного давления вдоль течения. При числе Re = 50 относительные отличия между величинами (10.33) и (10.28) увеличиваются в пределах канала до 40 % и 80 % соответственно для $b = b_2$ и $b = b_1$.

Увеличение различия связано с тем, что при больших значениях Re более значительная часть кинетической энергии с уменьшением средней по поперечному сечению скорости течения переходит в энергию напряженного состояния за счет увеличения поперечного сечения канала, что в некоторой степени компенсирует падение давления за счет трения (рис. 10.8а, б). Во всех рассматриваемых случаях изменение давления за счет инерционной силы наибольшее в начале канала, где и скорость жидкости наибольшая (рис. 10.8б), поэтому величина инерционной компоненты безразмерных градиентов давления (10.25), (10.26) здесь наибольшая (рис. 10.9).

Далее вдоль течения инерционная часть градиента давления стремится к 0 вследствие уменьшения скорости. Заметим, что общий градиент давления (10.25) при Re = 50 как в случае течения

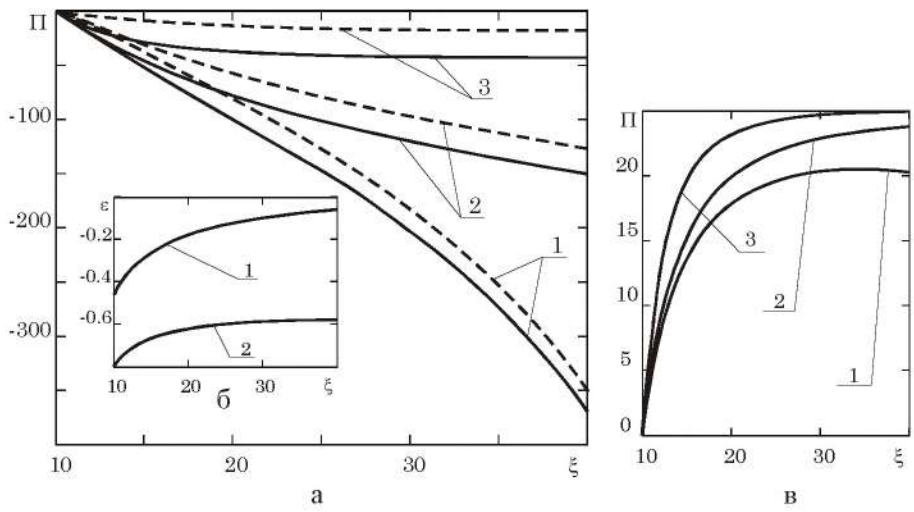


Рис. 10.8. Распределения вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных сил – сплошная линия, и с учетом характерной инерционной силы при Re = 50 – штриховая линия: 1 — в канале с линейно растущей шириной канала вдоль течения при $b = 0.0875$; 2 — в канале с постоянной шириной, т.е. $b = 0$; 3 – в канале с линейно уменьшающейся шириной $b = -0.0175$; б – относительного отклонения давления, рассчитанного с учетом инерционных сил при Re = 5 от давления, определенного без такого учета: 1 — в канале с $b = -0.0175$, 2 – $b = 0.0875$; в – части безразмерного давления, обусловленной учетом инерционного члена в уравнении движения при Re = 50: 1 – при расчете безразмерного давления для течения в канале с $b = -0.0175$, 2 – $b = 0$, 3 – $b = 0.0875$.

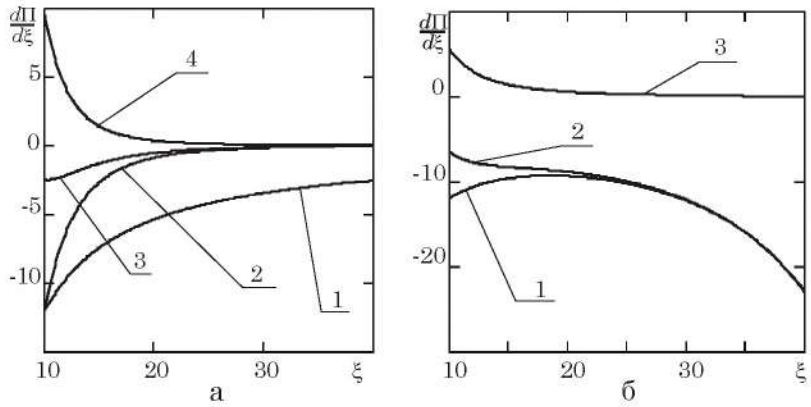


Рис. 10.9. Распределение безразмерного градиента давления и его инерционной составляющей вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – в канале с увеличивающейся шириной вдоль течения при $b = 0.0875$ для числа Рейнольдса Re = 50. Остальные обозначения аналогичны обозначениям на рис. 10.6.

при $b = b_1$, так и при $b = b_2$ – отрицателен, и, следовательно, жидкость течет в сторону уменьшения давления.

Увеличение числа Re до 150 качественно меняет распределение безразмерного давления в канале.

Вблизи входа в канал, где скорость течения наибольшая, преобладают инерционные силы, поэтому градиент давления при любом из рассматриваемых значений b здесь положителен (рис. 10.10), и жидкость течет в сторону увеличения давления (рис. 10.11). В случае течения в канале с увеличивающейся шириной при $b = 0.087$, увеличение давления, обуславливаемое законом Бернул-

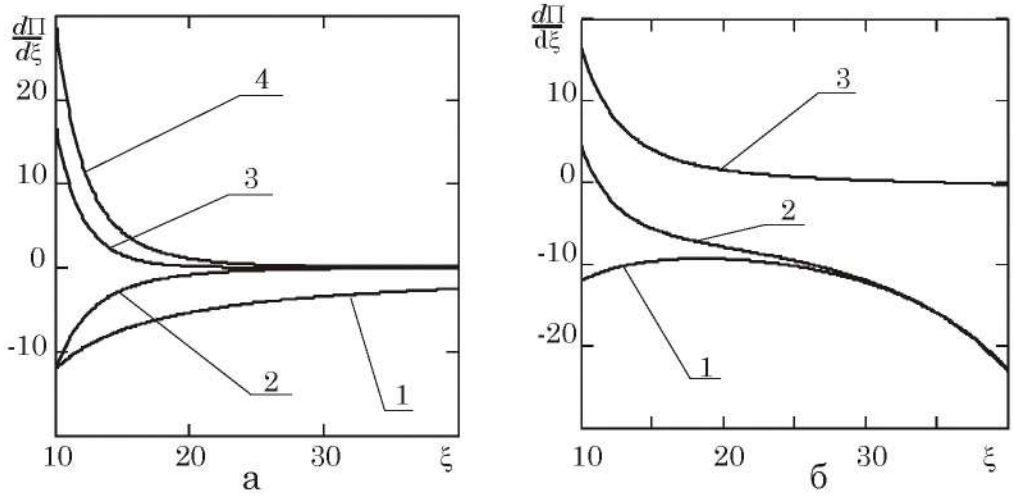


Рис. 10.10. Распределение безразмерного градиента давления и его инерционной составляющей вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – в канале с увеличивающейся шириной вдоль течения при $b = 0.0875$ для числа Рейнольдса Re = 150. Градиент безразмерного давления в канале постоянной ширины – 1; 2 – градиент давления, рассчитанный без учета инерционных сил (10.28); 3 – градиент давления с учетом инерционных сил; 4 – инерционная составляющая градиента давления; б – в канале с уменьшающейся шириной вдоль ξ при $b = -0.0175$: 1 – градиент давления, определенный без учета инерционных свойств; 2 – градиент давления, определенный с учетом инерционных сил; 3.– инерционная составляющая градиента давления.

ли, преобладает над потерей давления за счет трения на протяжении всего канала, но обе величины за счет уменьшения средней скорости стремятся к нулю, и поэтому безразмерное давление, до-

стигнув определенного значения, далее вдоль течения практически

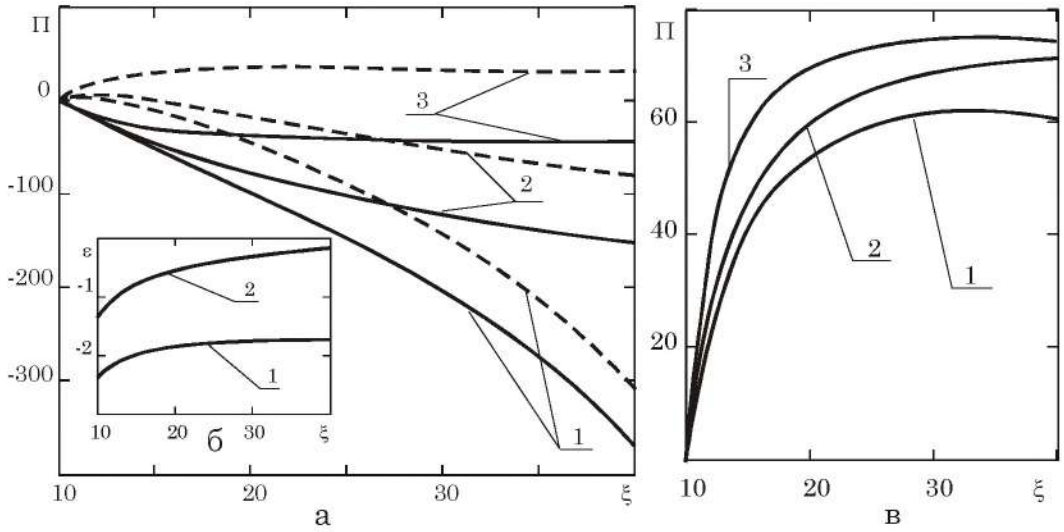


Рис. 10.11. Распределения вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных сил – сплошная линия, и с учетом характерной инерционной силы при Re = 150 – штриховая линия. б – их относительные отклонения при Re = 150; в – инерционные составляющие безразмерного давления при Re = 150: 1 –b = -0.0175, 2 – b = 0, 3 – b = 0.0875. Остальные обозначения аналогичны обозначениям на рисунке 10.5.

остается постоянным (рис. 10.11).

Заметим, из (10.30) следует, что в случае $b > 0$ максимальное значение динамической составляющей безразмерного давления, которое может быть достигнуто при $\xi \to \infty$, равно $\Pi_{din}(\infty) = \mathrm{Re}/2$.

Значения чисел Рейнольдса, начиная с которых течение на входе в канал будет происходить в сторону увеличения давления, можно определить из условия

$$\left.\frac{d\Pi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0, \qquad (10.59)$$

используя которое из (10.25), находим значение числа Рейнольдса, начиная с которого в пределах канала будет присутствовать максимальна положительная величина П

$$\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 6\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + b\xi_0\left(1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)}. \qquad (10.60)$$

В нашем случае при $b = b_1$ $\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 63.04$, а при $b = b_2$ $\mathrm{Re}_{\Pi\max} = 109.6$.

Заметим, если в (10.60) положить $\alpha = 90°$, то получим соотношение, дающее величину числа Рейнольдса, начиная с которого радиальное расходящееся течение между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной к плоскости, происходит в сторону увеличения давления

$$\mathrm{Re}_{\Pi\max} = \frac{12\xi_0}{1 + b\xi_0}, \qquad (10.61)$$

а если в (10.60) положить $b = 0$, то получим выражение (9.41) справедливое для соосных конических каналов с эквидистантными границами. А если в (10.61) положить $b = 0$, то получим соотношение (9.50).

Выражения (10.60) и (10.61) показывают, что течение в направлении восстановления давления возможно как при $b > 0$, так и при $b < 0$, т.е. как в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной вдоль течения, так и в канале с уменьшающейся шириной вдоль течения. Но значения чисел Рейнольдса, начиная с которых течение будет происходить в сторону увеличения давления, как мы видели, для таких каналов будет различным. Это связано с тем, что при $b < 0$ относительная площадь поверхности (6.26), а значит и площадь поперечного сечения канала (6.14), увеличивается менее интенсивно вдоль течения, чем при $b > 0$ (рис. 10.1), и поэтому в первом случае меньшая часть кинетической энергии движения жидкости переходит в потенциальную энергию напряженного состояния, а значит между числами Рейнольдса, при которых возможно течение в сторону увеличения П, будет выполняться соотношение

$$\mathrm{Re}_{\Pi\max}(b < 0) > \mathrm{Re}_{\Pi\max}(b > 0). \qquad (10.62)$$

Зависимость $\mathrm{Re}_{\Pi\max}$ от α и b показана на рисунке 10.12, которая также показывает, что при $b < 0$ число $\mathrm{Re}_{\Pi\max}$ возрастает с увеличением α.

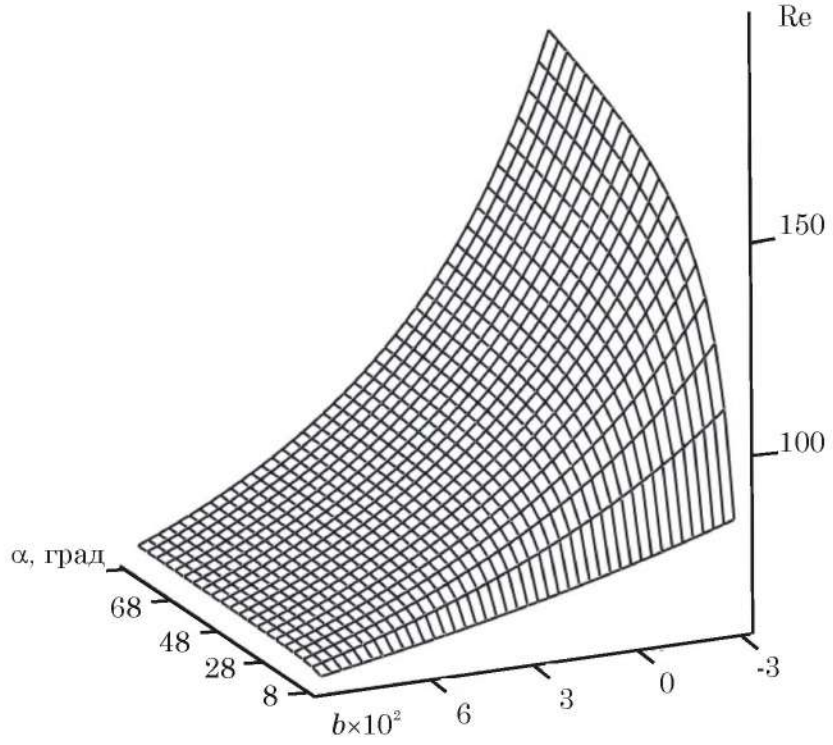


Рис. 10.12. Зависимость, определяющая число Рейнольдса, начиная с которого диффузорное ламинарное течение в начале соосного конического канала будет происходить в сторону увеличения давления.

Распределение давления в канале с уменьшающейся шириной для b = -0.017 является немонотонной функцией ξ (рис. 10.11). Это происходит потому, что в начале течения значение средней скорости наибольшее и, в соответствии с (10.26), здесь будут преобладать инерционные силы. Поэтому жидкость здесь течет в сторону увеличения давления. Затем интенсивность изменения средней скорости уменьшается вместе с падением ее величины, благодаря чему на некотором расстоянии от входа в канал начинает преобладать изменение давления за счет трения над изменением давления за счет инерционных эффектов. Жидкость здесь течет в сторону па-

дения давления (рис. 10.11).

Отличие полного безразмерного градиента давления от градиента давления, рассчитанного без учета инерционных сил, в данном случае существенно только в начале течения (рис. 10.10). Далее вдоль течения с уменьшением изменения площади поперечного сечения канала влияние инерционных сил уменьшается, и величины (10.25) и (6.33) практически сравниваются (рис. 10.10).

Увеличение угла раскрытия внутренней границы канала до 16.7° ведет к более существенному изменению площади поперечного сечения канала вдоль течения. В этом случае b_1 = -0.03 и $\tilde{s}(\xi)$ являются хорошо выраженной немонотонной зависимостью с явным максимумом (рис. 10.13). Вследствие этого и распределение безразмерной средней скорости немонотонно вдоль течения (рис. 10.14).

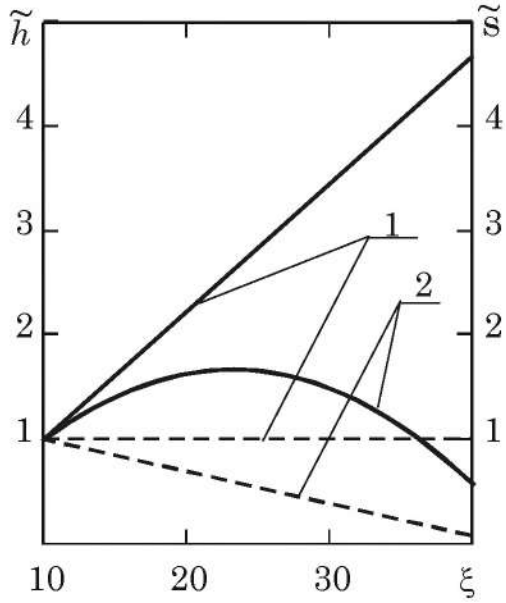
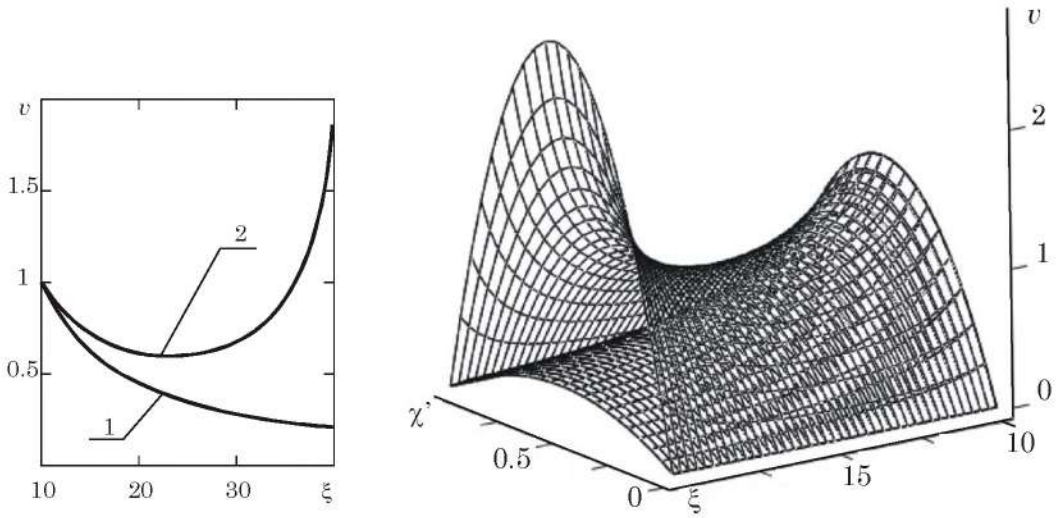


Рис. 10.13 Изменения вдоль течения безразмерных величин: ширины канала $\tilde{h}$ – штриховая линия и площади поперечного сечения канала $\tilde{s}$ – сплошная линия, в канале с параметрами ξ_0 = 10, ξ_1 = 40 , α = 15°: 1– канал постоянной ширины, b = 0; 2 – канал с уменьшающейся шириной вдоль канала при b = -0.03.

Распределение скорости поперек канала, оставаясь параболическим, сначала уменьшается по абсолютной величине (рис. 10.14, 10.15). Величина безразмерной скорости сдвига на границах канала здесь также уменьшается (рис. 10.16), что приводит к незначительному уменьшению абсолютной величины градиента давления, по-

скольку основной вклад в формирование $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right|$ в данном случае вносит трение, т.е. градиент давления отрицателен (рис. 10.17).

Ближе к выходу из канала, вследствие уменьшения площади поперечного сечения канала, распределение скорости сильно вытя-



а б

Рис. 10.14. Распределение безразмерной величины: а – средней скорости вдоль течения; 1 — в канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$, $b = 0$; 2 – $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$, $b = -0.03$. б – безразмерной скорости в канале: нижняя поверхность для течения в канале с постоянной шириной, внешняя – канала с уменьшающейся шириной при $b = -0.03$, (координата χ' для канала с изменяющейся шириной).

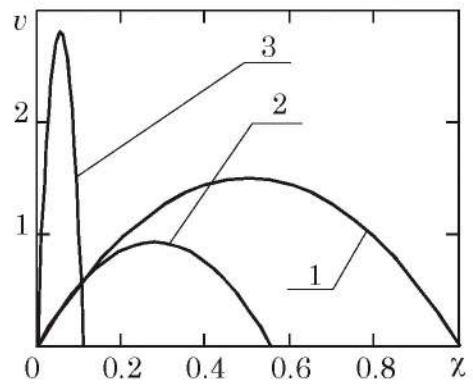


Рис. 10.15. Распределение безразмерной скорости поперек канала с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$, $b = -0.03$:. 1 – на входе в канал, $\xi = \xi_0$; 2 – $\xi = 25$; 3 – на выходе из канала, $\xi = 40$.

гивается (рис. 10.15), что приводит к значительному увеличению скорости сдвига на стенках канала (рис. 10.16), а это, в свою очередь, совместно с увеличением смачиваемого периметра канала (рис. 10.16б) ведет к росту абсолютной величины градиента давления (рис. 10.17). Заметим, что при Re = 5 вклад инерционных сил в создание градиента давления незначительный на протяжении всего канала (рис. 10.17б), поэтому и относительное отличие безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционных сил от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета, не превосходит 4% (рис. 10.18а, б).

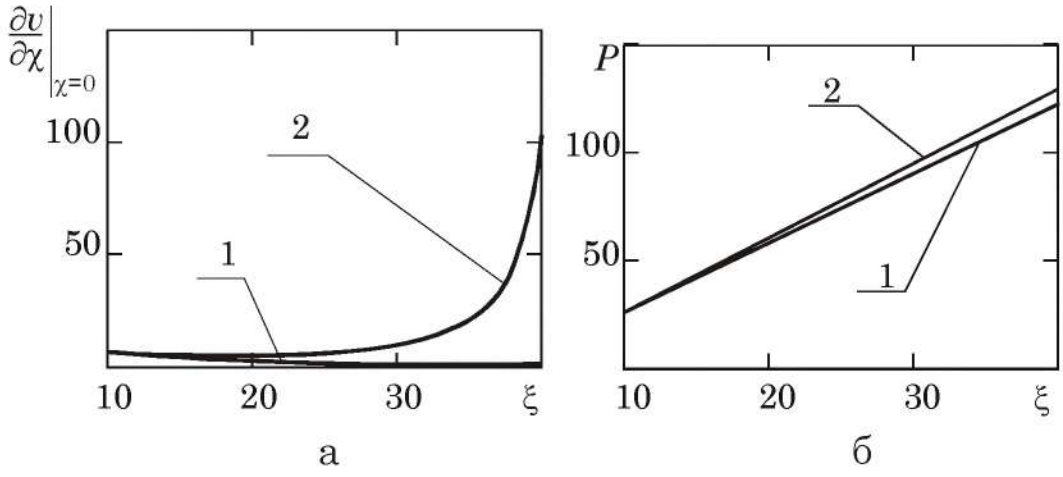


Рис. 10.16. Распределение вдоль канала с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$ безразмерных величин: а – скорости сдвига на границах канала. 1 — для канала постоянной ширины, $b = 0$; 2 — в канале с уменьшающейся шириной при $b = -0.03$; б – смачиваемого периметра: 1 – при $b = 0$; 2 – $b = -0.03$.

Безразмерное давление в начале течения, где его градиент незначителен, меняется слабо и резко падает к выходу из канала за счет сил трения, растущих с увеличением скорости (рис. 10.18).

При увеличении числа Рейнольдса до 150 влияние инерционных сил на распределение давления увеличивается, что приводит к значительному отклонению в перепадах давления, рассчитанных при Re = 0, т. е. по формуле (6.40) (рис. 10.18б).

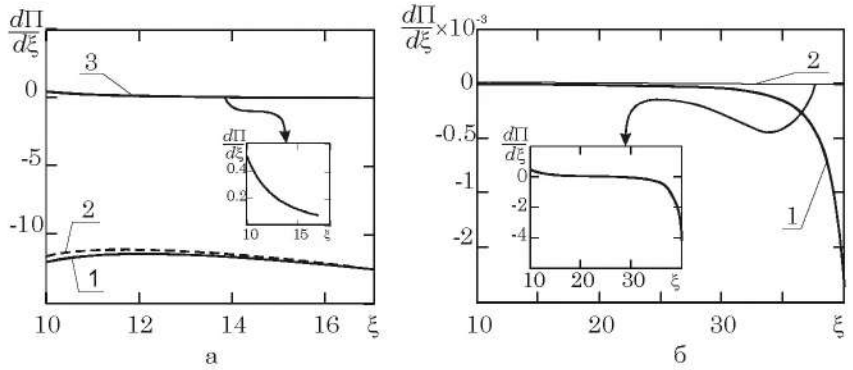


Рис. 10.17. Распределение безразмерного градиента и его инерционной составляющей вдоль течения при Re = 5 в канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$, $b = -0.03$: а – распределение вблизи входа в канал: 1 — для определения градиента давления без учета инерционных сил; 2 — для определения градиента давления с учетом инерционной силы; 3 — инерционная составляющая градиента давления; б – распределение вдоль всей длины канала: 1 — безразмерного градиента давления; 2 — его инерционной составляющей.

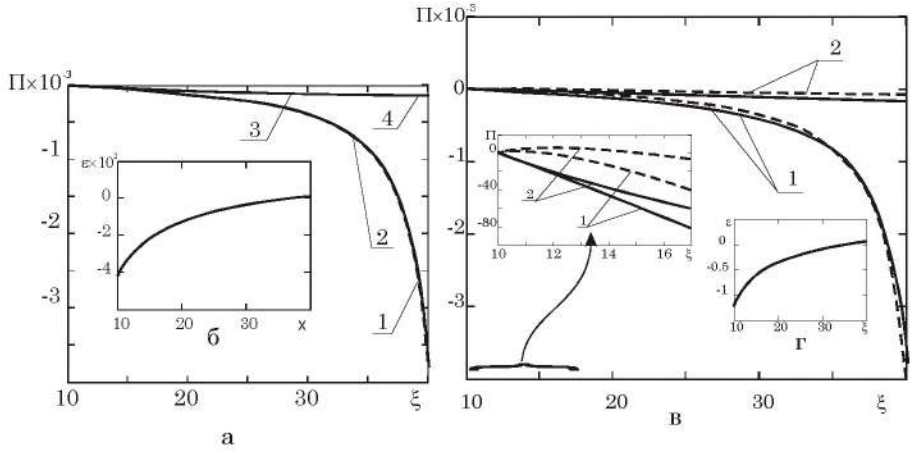


Рис. 10.18. Распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – при течении с Re = 5: 1 – давление рассчитано с учетом инерционных сил при $b = -0.03$; 2 – давление, рассчитанное без учета инерционной силы при $b = -0.03$; 3, 4 – аналогичные зависимости для канала постоянной ширины, $b = 0$; б – распределение относительного отклонения между давлениями, рассчитанными с учетом инерционных свойств и без этого учета при Re = 5 и $b = -0.03$; в – распределение безразмерного давления при Re = 150. Штриховая линия – расчет с учетом инерционных свойств, сплошная линия – расчет без учета инерционных свойств: 1 – при; $b = -0.03$ 2 – $b = 0$. г – распределение относительного отклонения между давлением, рассчитанным с учетом инерционных свойств и без него при Re = 150 и $b = -0.03$.

В начале течения, где средняя скорость уменьшается, падение давления за счет трения несколько компенсируется увеличением давления при преобразовании кинетической энергии в потенциальную энергию напряженного состояния (рис. 10.19). Поэтому здесь распределение давления, рассчитанное с учетом инерционных сил, находится несколько выше, чем распределение, полученное без учета сил инерции (рис. 10.18 в), и в самом начале канала жидкость течет в сторону увеличения давления.

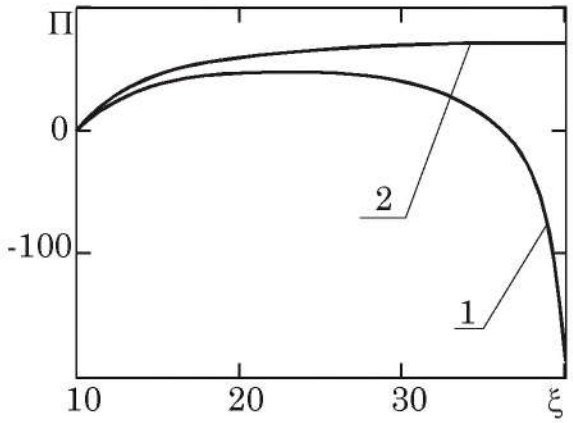


Рис. 10.19. Распределение инерционной составляющей безразмерного давления при диффузорном течении с Re = 150 в соосном коническом канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: 1 — при уменьшающейся ширине канала для $b = -0.03$; 2 — для канала постоянной ширины, $b = 0$.

Далее вдоль течения скорость начинает возрастать и компонента безразмерного градиента давления, обуславливаемая инерционными силами, меняет знак (рис. 10.20), т.е. здесь происходит обратное преобразование потенциальной энергии напряжения в кинетическую энергию движения, и в результате происходит сум-

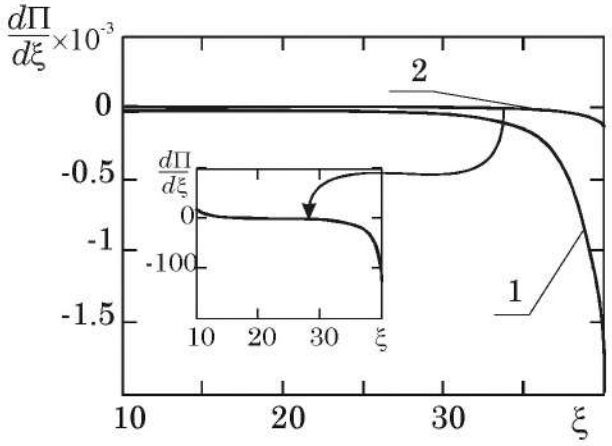


Рис. 10.20. Распределение безразмерного градиента – 1 и его инерционной составляющей – 2 при течении в соосном коническом диффузоре с размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$, $b = -0.03$ для Re = 150.

мирование падения давления за счет влияния инерционных сил (рис. 10.19) и падения давления за счет трения. Поэтому ближе к выходу из канала, распределение давления вдоль течения располагается несколько ниже, чем распределение давления, определенное без учета сил инерции (рис. 10.18 в).

Рассмотрим течение в канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 15$, $\alpha = 15°$, $\alpha_1 = 25°$ и числом Re = 50. В этом случае $b = -0.176$ и безразмерная площадь поперечного сечения монотонно уменьшается вдоль течения (рис. 10.21 а). Соответственно средняя скорость течения жидкости будет монотонно увеличиваться вдоль канала (рис. 10.21б). Распределение безразмерной скорости в канале для этого случая представлено на рисунке 10.22.

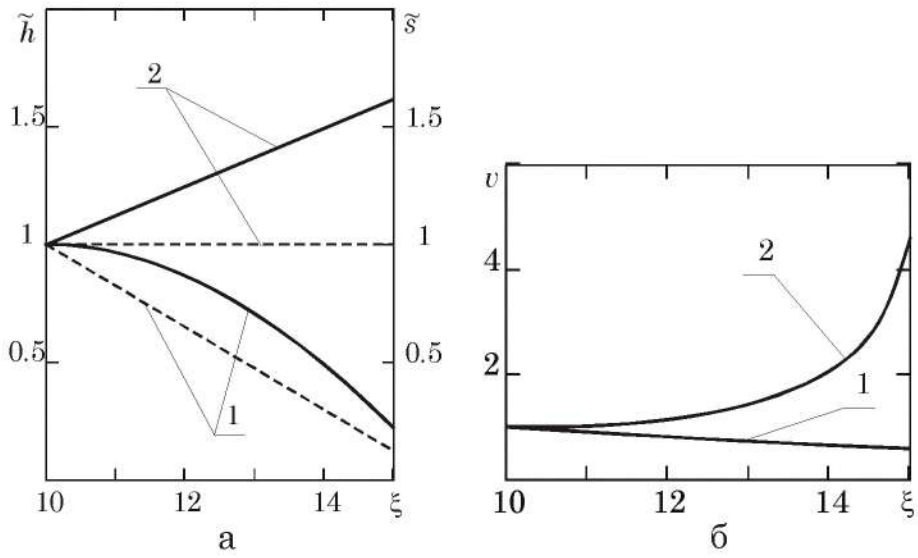


Рис. 10.21. Распределение безразмерных величин вдоль течения в канале с размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$: а – ширины канала – пунктирная линия, площади поперечного сечения – сплошная линия: 1 — для канала с уменьшающейся шириной – $b = -0.176$; 2 — канал постоянной ширины – $b = 0$; б – средней по поперечному сечению канала скорости: 1 — для канала постоянной ширины; 2 — для канала с уменьшающейся шириной – $b = -0.176$.

Профиль скорости прогрессивно вытягивается вдоль течения, что приводит к увеличению напряжения сдвига на границах вдоль канала и к значительному росту абсолютной величины диссипативной составляющей безразмерного градиента давления, т.е. со-

ставляющей, формируемой трением (рис. 10.23а).

Нелинейно растущая безразмерная средняя по площади по-

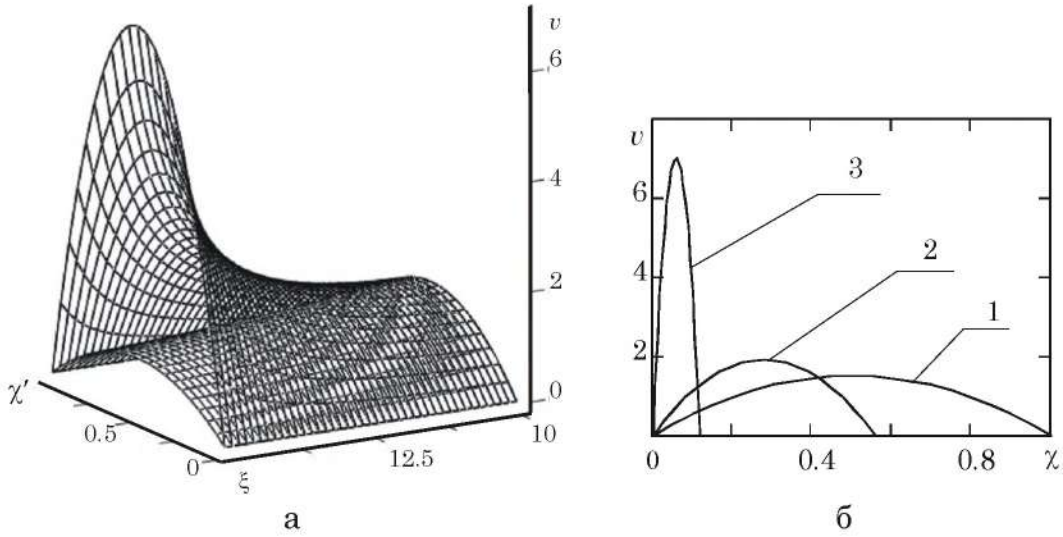


Рис. 10.22. Распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$ – а: внутренняя поверхность для канала постоянной ширины. Верхняя поверхность – для канала с b = -0.176. Области определения для верхней поверхности есть $-(\xi, \chi')$ (10.42); б – распределение поперек канала: 1 — на входе в канал, $\xi = \xi_0$; 2 — для координаты $\xi = 12.5$; 3 — на выходе из канала, $\xi = 15$.

верхности поперечного сечения канала скорость течения приводит к тому, что с ростом ξ все большая часть энергии напряженного состояния переходит в кинетическую энергию движения и, следовательно, к прогрессивному росту модуля динамической компоненты безразмерного градиента давления, т.е. компоненты, формируемой инерционными силами (рис. 10.23а). В результате сложения этих двух чисел модуль безразмерного градиента давления, рассчитанный с учетом инерционных сил, значительно больше модуля безразмерного градиента давления, обусловленного чистым трением. Поэтому при Re = 50 в рассматриваемом канале изменение безразмерного давления, рассчитанное с учетом сил инерции, оказывается значительно больше, чем потери безразмерного давления, вычисленные без учета инерции (рис. 10.23б).

Исследованные выше варианты течения представляют практически все возможные случаи распределения скорости жидкости

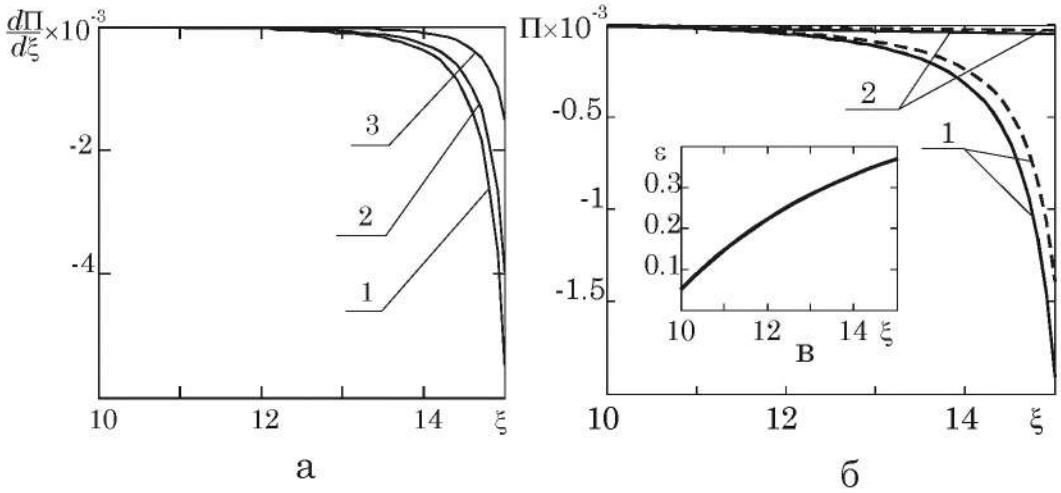


Рис. 10.23. Распределение безразмерного градиента давления вдоль диффузорного течения в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$ и числом $Re = 50$ – а: 1 — безразмерный градиент давления, определенный с учетом инерционных сил; 2 — без такого учета; 3 – инерционная часть безразмерного градиента давления. б – распределение безразмерного давления вдоль канала: пунктирная линия – расчет без учета инерционных сил, сплошная линия – расчет с учетом инерционных свойств течения: 1 – в канале с уменьшающейся шириной при $b = -0.176$; 2 – в канале постоянной ширины; в – распределение относительного отклонения давления, рассчитанного с учетом инерционных свойств от давления, обусловленного трением.

при диффузорном течении в соосном коническом канале с линейно меняющейся шириной вдоль течения. При этом мы не изменяли значение угла раскрытия внешней границы канала и не рассматривали каналы, сформированные коническими поверхностями, раскрытыми навстречу друг другу, т.е. рассматривали течение в каналах с b, удовлетворяющем соотношению (6.10), но изменение этих параметров не приведет к качественно новым распределениям скорости течения и давления в канале, а внесут лишь количественные численные изменения.

Заметим, что если выбрать значение полуугла раскрытия внешнего конуса равным 90°, мы получим решение задачи ради-

ального течения между плоскостью и конической поверхностью, расположенной над ней.

Зависимость безразмерного давления от числа Рейнольдса и параметра b при диффузорном течении в соосном коническом канале с координатами входа и выхода равными $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 15$ представлены на рисунке 10.24 для двух значений полууглов раскрытия внешней конической поверхности – $\alpha = 15°$ и $\alpha_1 = 90°$.

Зависимость безразмерного давления от Re в соответствии с (10.30) и (10.33) – линейная (рис. 10.24). В области отрицательных значений b, т.е. для каналов с уменьшением ширины вдоль течения, зависимость $\Pi(b)$ достаточно резкая (рис. 10.24). В области положительных значений b эта зависимость пологая.

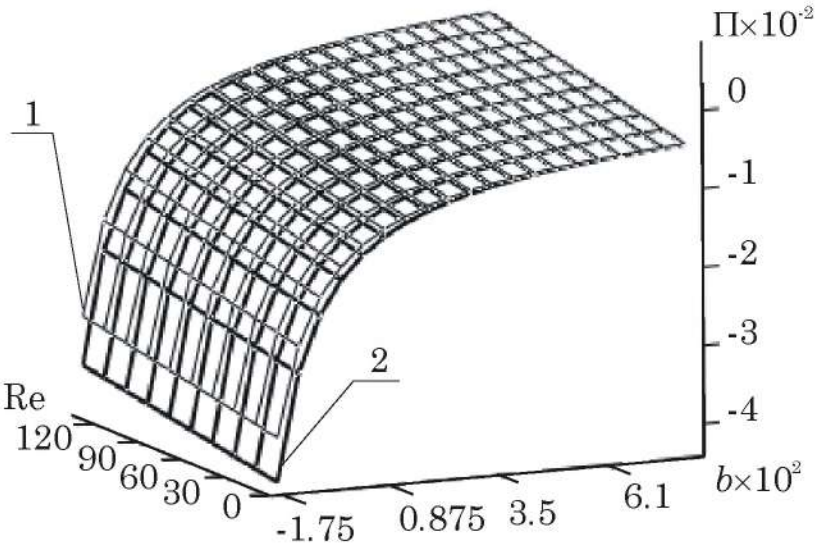


Рис. 10.24. Зависимость перепада безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$ – поверхность 1; для $\alpha = 90°$ – поверхность 2, от числа Рейнольдса и параметра b.

Это происходит, как мы видели ранее, потому, что в каналах с увеличивающейся шириной вдоль течения быстро уменьшается средняя скорость (рис. 10.25), и в соответствии с (10.26) изменение $\tilde{h}(b)$, когда $\tilde{h}(b) > 1$, не приведет к значительным изменениям в

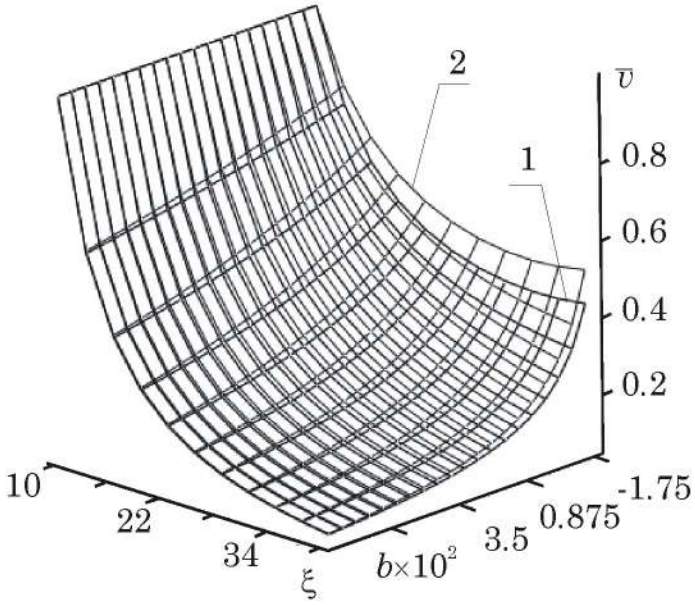


Рис. 10.25. Зависимость средней безразмерной скорости от продольной координаты ξ и параметра b при диффузорном течении в соосном коническом канале: 1 – для полуугла раскрытия внешней конической поверхности $\alpha = 15°$, 2 – $\alpha = 90°$.

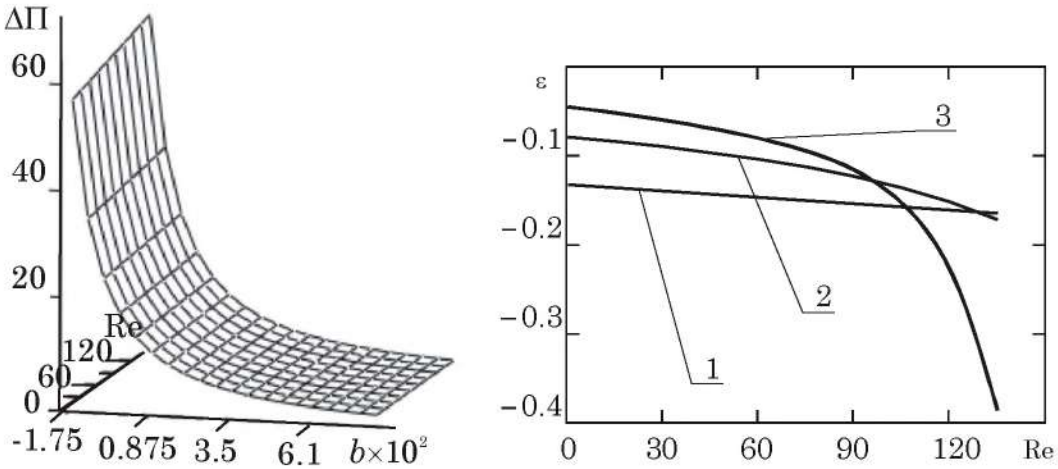


Рис. 10.26. Зависимость абсолютного – а и относительного – б отклонения между перепадами безразмерного давления при диффузорном течении в соосных конических каналах с полууглами раскрытия внешних границ 15° и 90°, и остальных параметров, равных $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ от числа Рейнольдса и параметра b: 1 – для b = -0.175.; 2 – $b = 8.75\times10^{-3}$; 3 – $b = 0.035$.

градиенте давления, а в области отрицательных значений b средняя скорость значительна на всем протяжении канала (рис. 10.25), и в соответствии с (10.26) изменение $\tilde{h}(b)$ в этом случае (при $\tilde{h}(b)<1$) будет приводить к значительным изменениям в градиенте давления и, как следствие, к сильной зависимости перепада давления на всей длине канала от параметра b (рис. 10.24).

Перепад безразмерного давления в канале с полууглом раскрытия $\alpha = 90°$ несколько выше, чем в канале с $\alpha = 15°$ при всех исследованных значениях параметра b и числах Рейнольдса, а характер зависимостей $\Pi(b, \mathrm{Re})$ в обоих случаях практически идентичен (рис. 10.24). Наибольшие абсолютные отклонения наблюдаются для отрицательных значений b. При увеличении b отклонение уменьшается и стремится к 0 (рис. 10.26 а).

Относительные отклонения значимы во всем исследованном диапазоне изменений Re и b (рис. 10.26 б). Понятно, что поверхности, отображающие зависимости $\Pi(b, \mathrm{Re})$ для углов раскрытия, находящихся в интервале [15°, 90°], будут располагаться между поверхностями, представленными на рисунке 10.24.

10.5. Особенности распределения безразмерного давления на бесконечно большом расстоянии от входа в канал при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль течения

Поскольку величины здесь сняты как конечные и самая снятость их положена как их качественный закон, это есть их истинная, актуальная (gegenwärtige) бесконечность.

Г.В.Ф. Гегель

В разделе (6.5) шестой главы данной монографии мы показали, что перепад давления при ламинарном течении в бесконечно длинном соосном коническом диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль канала будет конечной величиной при его вычислении без учета инерционных свойств. По тем же причинам он будет конечным и при существенном влиянии инерционных сил. В этом достаточно просто убедиться. Действительно, устремим в выражении

(10.33) безразмерную координату ξ к бесконечности и в результате получим

$$\Pi(\infty)=\frac{3(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{(1-b\xi_0)^2}\left[\frac{(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2}{2(1-b\xi_0)}\ln\frac{b(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{2-b\operatorname{ctg}\alpha}+3-\right.$$

$$\left.-b(\operatorname{ctg}\alpha+\xi_0)\right]+\frac{\mathrm{Re}}{2}, \tag{10.63}$$

а для расходящегося течения между плоскостью и конусом с вершиной, не лежащей на плоскости, т.е. при $\alpha = 90°$, будем иметь соотношение

$$\Pi(\infty)=\frac{6\xi_0}{(1-b\xi_0)^3}\left[2\ln b\xi_0+(2-b\xi_0)^2-1\right]+\frac{\mathrm{Re}}{2}. \tag{10.64}$$

Если положить в (10.63) и (10.64) $\mathrm{Re} = 0$, то мы получим (6.54) и (6.55) соответственно, т.е. выполняется предельный переход к полученному ранее решению.

Появление положительного числа $\frac{\mathrm{Re}}{2}$ равного значению, к которому стремится на бесконечности динамическая составляющая безразмерного давления, вносит качественное отличие в зависимость $\Pi(b)$ на бесконечности по сравнению с зависимостью, полученной без учета инерционных сил (6.54). Действительно, с помощью (10.63) мы можем выбрать два режима течения. Первый режим течения, при котором, также как и в (6.54), $\Pi(\infty)<0$, означает, что в данном случае мы можем говорить о преобладающем влиянии силы трения в бесконечно длинном диффузоре (рис. 10.27). Поскольку для любого $b>0$ мы можем подобрать число Re, при котором выражение (10.63) станет равно нулю, $\Pi(\infty)=0$, и это число определится как

$$\mathrm{Re}=\frac{6(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}{(1-b\xi_0)^2}\left[\frac{(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2}{2(1-b\xi_0)}\ln\frac{2-b\operatorname{ctg}\alpha}{b(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)}-\right.$$

(10.65)

$$-3+b\left(\operatorname{ctg}\alpha+\xi_0\right)\Big],$$

а для $\alpha=90°$ как

$$\mathrm{Re}=\frac{6\xi_0}{\left(b\xi_0-1\right)^3}\Big[2\ln b\xi_0+\left(2-b\xi_0\right)^2-1\Big]. \qquad (10.66)$$

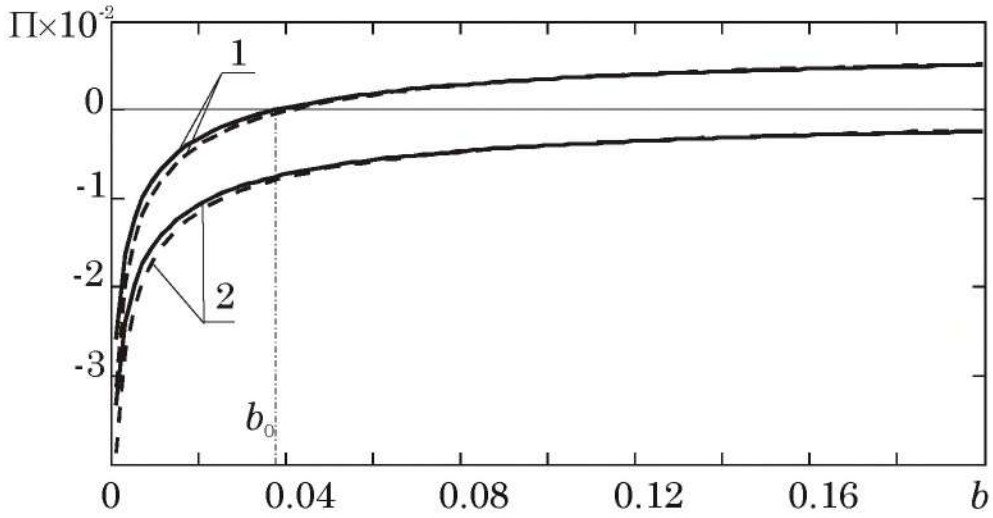


Рис. 10.27. Зависимость безразмерного давления при $\xi\to\infty$ для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль течения: 1 – расчет выполнен при Re = 150; 2 – при Re = 0, сплошные линии для α = 15°, штриховые для α = 90°, b_0 – параметр b, при котором выполняется условие $\Pi(\infty)=0$.

Второй режим течения возникает с увеличением Re при постоянном b, и это течение с положительным безразмерным давлением на бесконечно большом расстоянии от входа. Это означает, что течение в бесконечно длинном диффузоре происходит в сторону увеличения давления, и мы можем в этом случае говорить о преобладании динамических эффектов в таком течении над диссипативными.

Как видно из рисунка 10.27 при увеличении числа Рейнольдса Re значение параметра b, при котором $\Pi(\infty)=0$, уменьшается. Величина $\Pi(\infty)$ (10.63) также, как и величина (6.54), зависит от ар-

гументов b, ξ_0, α и добавляется к ним число Re. Зависимость от α, как и в ранее рассмотренных случаях, незначительная (рис. 10.27). Зависимость $\Pi(\infty)$ от ξ_0 и от Re может быть значительная, и это будет влиять на безразмерное расстояние от входа в канал, на котором безразмерное давление Π достигает 99 % своей предельной величины.

Рассмотрим зависимость $\xi_\infty(\xi_0, b)$, аналогичную приведенной на рисунке 6.7, но в случае учета динамической составляющей безразмерного давления при $\mathrm{Re}=109$ (рис. 10.28). В отличие от зависимости, приведенной на рисунке 6.7, в последнем случае зави-

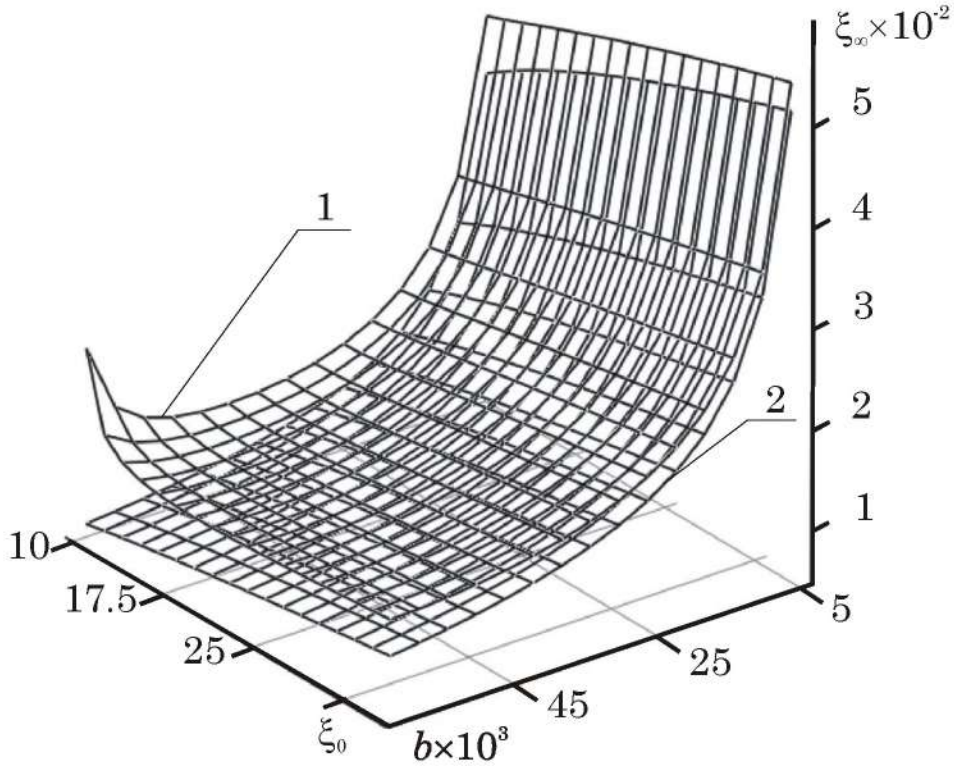


Рис. 10.28. Зависимость безразмерной радиальной координаты, на которой безразмерное давление достигает 99 % своего значения на бесконечности при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной от начальной безразмерной координаты ξ_0 и параметра b: 1 – течение с параметрами Re = 109, $\alpha = 15°$; 2 – Re = 0, $\alpha = 15°$.

симость $\xi_\infty(\xi_0,\ b)$ является немонотонной. При выбранных значениях числа Рейнольдса и диапазоне изменения аргумента b немонотонная зависимость ξ_∞ от b проявляется только вблизи наименьших значений безразмерной координаты входа.

При $b=0$ течение происходит в соосном коническом диффузоре постоянной ширины, которое было исследовано нами в главе 9. Там же показано, что для такого течения $\Pi(\xi)\to\infty$ при $\xi\to\infty$, и поэтому конечное значение Π не может быть достигнуто с увеличением ξ. И, следовательно, при заданных значениях Re и ξ_0 с увеличением b, начиная от 0, величина ξ_∞, на которой безразмерное давление Π достигает 99 % своего значения на бесконечности, будет уменьшаться от ∞ до некоторого своего минимального значения (рис. 10.28). ξ_∞ начинает увеличиваться при дальнейшем увеличении b, а происходит это вследствие того, что при увеличении b от 0 безразмерное давление $\Pi(\infty)$ увеличивается от $-\infty$ до 0 в случае с $\mathrm{Re}\neq 0$, а затем становится положительным и растет дальше (рис. 10.27). Очевидно, что при $\Pi(\infty)\to 0$ относительное отклонение $\dfrac{\Pi(\xi)-\Pi(\infty)}{\Pi(\infty)}$ будет стремиться к бесконечности при $\xi<\infty$, т.е. в этом случае $\xi_\infty\to\infty$. Вследствие этого и возникает немонотонная зависимость $\xi_\infty(b)$.

Понятно, что при различных значениях Re, и распределение ξ_∞ будет различно. Если построить распределение чисел Рейнольдса, при которых удовлетворяется равенство $\Pi(\infty)=0$ с помощью (10.65) (рис. 10.29), мы можем определить для каждого Re и ξ_0 значение b, при котором $\xi_\infty\to\infty$. Для рассмотренного случая, т.е. $\mathrm{Re}=109$ и $\xi_0=10$, получаем $b\approx 0{,}063$.

На рисунке 10.27 мы видели, как при постоянном значении Re значение $\Pi(\infty)=0$ делит все возможные течения при данном значении Re и различных значениях параметра b на два режима, при которых либо $\Pi(\infty)>0$, либо $\Pi(\infty)<0$. Посмотрим, как проявляются эти режимы течения при постоянном b и различных значениях Re.

Рассмотрим зависимость $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ при параметрах $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$, $b = 0.0875$, что соответствует значению $\alpha_1 = 10°$. Величина ξ_∞ определяется из решения нелинейного уравнения (6.56). При $\mathrm{Re} = 0$ мы получили значение ξ_∞ для указанных параметров в раз-

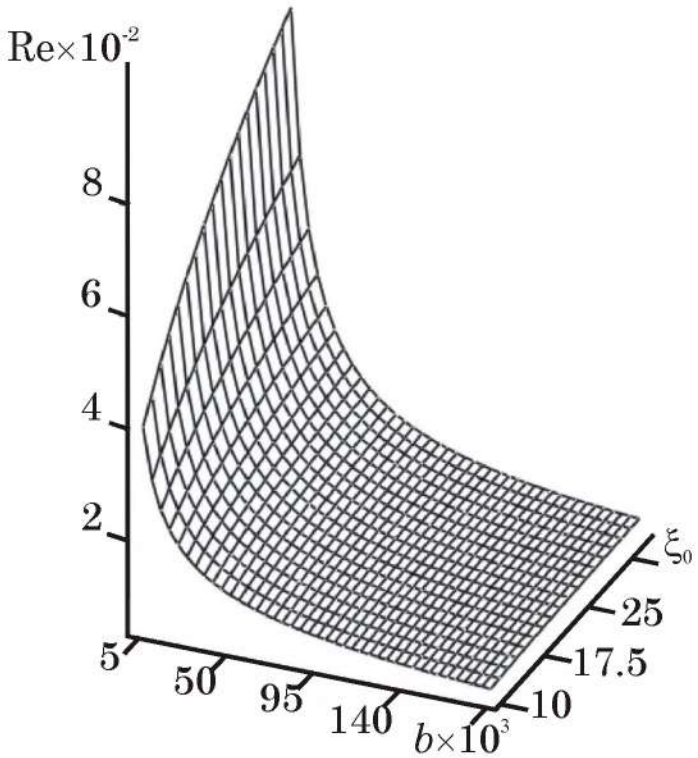


Рис. 10.29. Зависимость числа Рейнольдса, при котором выполняется условие П(∞) = 0 от безразмерной координаты входа в канал – ξ_0 и параметра b для ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной и $\alpha = 15°$.

деле 6.5 главы 6. $\xi_\infty(\mathrm{Re} = 0) = 49.97$ (рис. 6.6). При увеличении Re в области, в которой $\Pi(\infty) < 0$, ξ_∞ будет расти (рис. 10.30). Вблизи значения числа Re, при котором $\Pi(\infty) = 0$ увеличение Re ведет к стремлению $\xi_\infty \to \infty$. В указанном диапазоне чисел Re мы можем говорить о преобладании сил трения над инерционными силами при течении в бесконечно длинном соосном коническом диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль течения. Число Рейнольдса в

рассматриваемом случае, при котором $\Pi(\infty)=0$, равно $\mathrm{Re}=87.68$. Дальнейшее увеличение Re приводит к режиму течения с преобладанием инерционных сил в бесконечно длинном диффузоре, а ξ_∞ здесь уменьшается от ∞, при $\mathrm{Re}=87.68$, до предельного значения в случае течения с пренебрежительно малыми силами трения по сравнению с инерционной силой, возникающей вследствие изменения скорости с изменением площади поперечного сечения диффу-

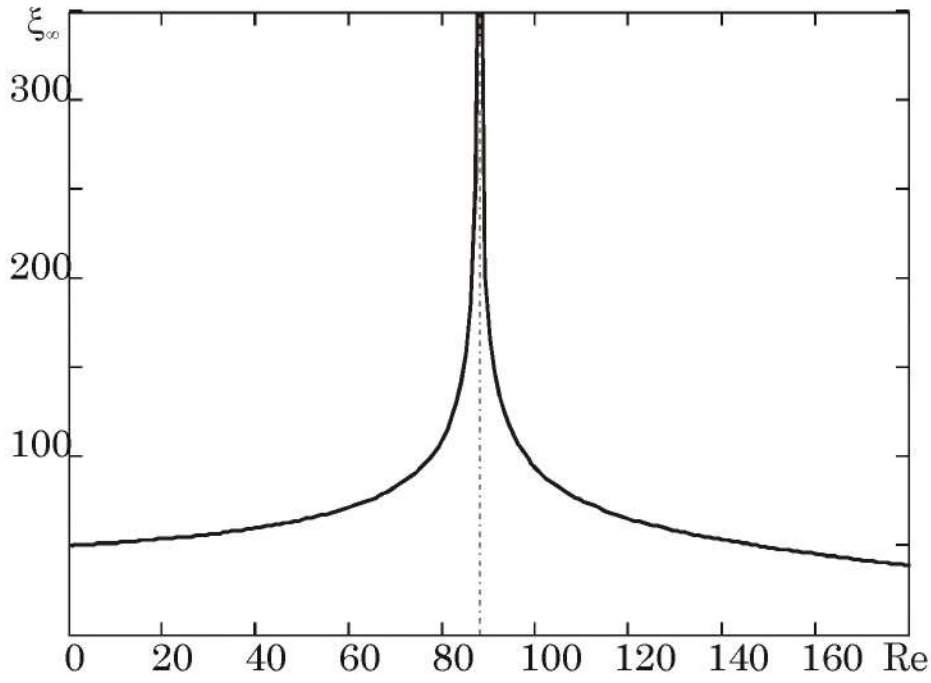


Рис. 10.30. Зависимость безразмерной радиальной координаты ξ_∞, на которой безразмерное давление при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с параметрами, равными: $b = 0.262$, $\alpha = 15°$, $\xi_0 = 10$ от числа Рейнольдса – сплошная линия. Штрихпунктирная линия определяет значение Re, при котором выполняется равенство $\Pi(\infty) = 0$.

зора. Вычислим это предельное значение из выражения (6.56), пренебрегая в нем силами трения, после чего получим уравнение для определения ξ_∞

$$\overline{v}=0.1. \qquad (10.67)$$

Соотношение (10.67) показывает, что динамическая составляющая безразмерного давления достигает 99 % своего значения на

бесконечности на расстоянии, на котором средняя по поперечному сечению скорость уменьшается в 10 раз и не зависит от значения числа Рейнольдса Re. В итоге для ξ_∞ из (10.67) получаем

$$\xi'_\infty = \frac{-(bg+cf)+\sqrt{(bg+cf)^2-4bc(fg-10d)}}{2bc}, \qquad (10.68)$$

где $g=(b\xi_0-1)\operatorname{ctg}\alpha$, $c=2-b\operatorname{ctg}\alpha$, $f=(1-b\xi_0)$, $d = 2\xi_0$ - $\operatorname{ctg}\alpha$.

В нашем случае получаем $\xi'_\infty = 32.48$ (рис. 10.30). Заметим, что величина ξ'_∞ определяет также и безразмерную координату, на которой динамическая компонента безразмерного давления Π_{din} достигает 99 % своего значения на бесконечности.

Зависимость $\xi'_\infty(b, \xi_0)$ показана на рис 10.31, а зависимость

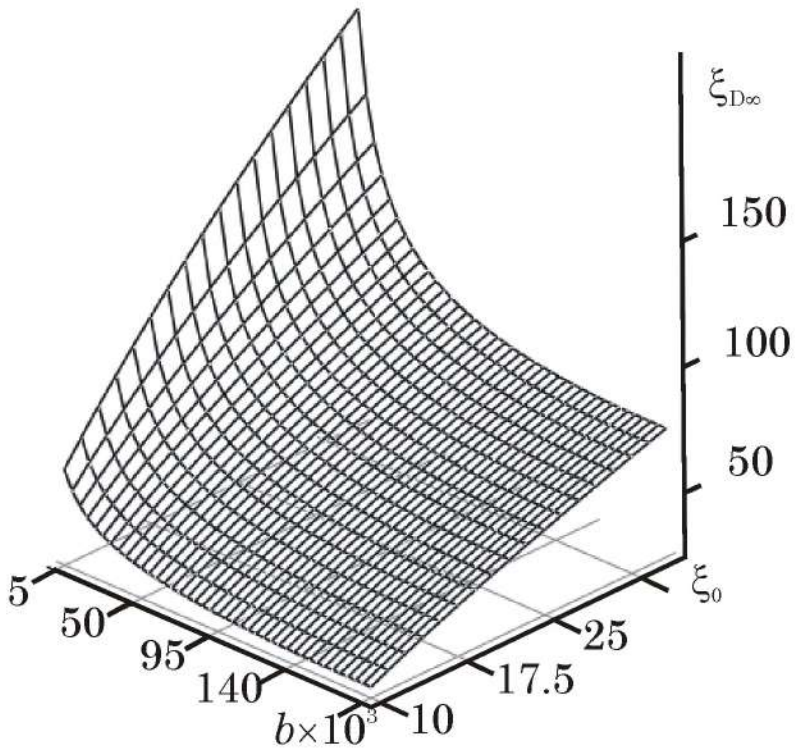


Рис. 10.31. Зависимость безразмерной радиальной координаты, на которой динамическая составляющая безразмерного давление достигает 99 % $\Pi_{din}(\infty)$ при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной от начальной безразмерной координаты ξ_0 и параметра b.

$\underset{\mathrm{Re}=0}{\xi_\infty}\left(b,\,\xi_0\right)$ в случае пренебрежения инерционными силами представлена на рисунке 6.7. Мы видим, что $\xi'_\infty < \underset{\mathrm{Re}=0}{\xi_\infty}\left(b,\,\xi_0\right)$ практически во всем диапазоне изменения аргументов, и это несмотря на то, что при вычисленном ξ_∞ с учетом сил инерции выполняется неравенство (рис. 10.28)

$$\underset{\mathrm{Re}\neq 0}{\xi_\infty} > \underset{\mathrm{Re}=0}{\xi_\infty}. \qquad (10.69)$$

10.6. Условия, при которых можно пренебречь инерционными свойствами диффузорного ламинарного течения в соосном коническом канале переменной ширины

Поставь себе любой предел,...

А. Дольский

Выяснив основные особенности ламинарного диффузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины, давайте определим характерные значения чисел Рейнольдса, при которых можно пренебречь влиянием инерционных сил на перепад давления в канале. В качестве значимой величины примем относительное отклонение перепада давления в канале, вычисленное без учета инерционных сил от перепада давления, вычисленного с их учетом, равное 5 %, т.е. при $\varepsilon_F \le 0.05$. Для расчета давления можно использовать выражение (10.28).

Ранее мы определили ε_F как отношение $\dfrac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}}$ (9.27), что приводит к выражению

$$\varepsilon_F\left(\xi\right) = \frac{\dfrac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1 - \left[\dfrac{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{\tilde{h}\left(\xi\right)\left[\xi\left(2 - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right) + \left(b\xi_0 - 1\right)\mathrm{ctg}\,\alpha\right]}\right]^2\right\}}{\dfrac{6\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}{1 - b\xi_0}\left[E_1\left(\xi\right) + E_2\left(\xi\right)\right]}, \qquad (10.70)$$

где $E_1(\xi)=\dfrac{(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2}{4(1-b\xi_0)^2}\ln\dfrac{(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)\tilde{h}(\xi)}{2\xi-\tilde{h}(\xi)\operatorname{ctg}\alpha}$,

$$E_2(\xi)=\frac{b(\xi-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi)}\left[\frac{2-b\operatorname{ctg}\alpha}{1-b\xi_0}-\frac{1+\tilde{h}(\xi)}{\tilde{h}(\xi)}\right].$$

Использовать выражение (10.70) для оценки влияния инерционных сил на перепад давления в канале неудобно из-за его громоздкости, и желательно для этого получить более простые соотношения. При исследовании свойств течения мы видели, что величина $\varepsilon_F(\xi)$ достигает максимальных значений либо на входе в канал, либо на выходе их него, а между значениями $\varepsilon_F(\xi_0)$ и $\varepsilon_F(\xi_1)$ функция $\varepsilon_F(\xi)$ является монотонной (рис. 10.5, 10.8, 10.11, 10.18, 10.23). Поэтому, если мы определили два характерных предельных значения ε_F для заданной геометрии канала, выберем большее из них, и именно для него определим величину Re^*, то для $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}^*$ можно уверенно пренебрегать инерционными силами.

Рассмотрим сначала канал с увеличивающейся шириной вдоль течения. Вычисляя значение ε_F при $\xi \to \infty$, получим

$$\lim_{\xi\to\infty}\varepsilon_F(\xi)=\frac{\mathrm{Re}(1-b\xi_0)^3}{3(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)\left[E_3(\xi)+E_4(\xi)\right]}, \qquad (10.71)$$

где $E_3(\xi)=(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2\ln\dfrac{b(b\operatorname{ctg}\alpha-2\xi_0)}{b\operatorname{ctg}\alpha-2}$,

$$E_3(\xi)=2(1-b\xi_0)\left[3-b(\xi_0+\operatorname{ctg}\alpha)\right].$$

Для радиального течения между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной плоскости, т.е. при $\alpha = 90°$, получим

$$\lim_{\xi\to\infty}\varepsilon_F(\xi)=\mathrm{Re}\frac{(1-b\xi_0)^3}{12\xi_0\left[2\ln b\xi_0+(1-b\xi_0)(3-b\xi_0)\right]}. \qquad (10.72)$$

Выражения (10.71) и (10.72) показывают, что при $b > 0$ влияние инерционных сил на перепад давления будет сравнимо с перепадом давления за счет трения в канале любой величины, т.к. при

$\xi \to \infty$ и Π_{din}, и Π_{dis} остаются конечными величинами. А для того, чтобы на бесконечности мы могли с 5 % точностью пренебречь влиянием характерной инерционной силы, необходимо чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{Re} \le \left| \frac{0.15(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}{(1-b\xi_0)^3} \left\{ (b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 2)^2 \ln \frac{b(b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 2\xi_0)}{b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-b\xi_0)\left[3 - b(\xi_0 + \mathrm{ctg}\,\alpha)\right] \right\} \right|, \tag{10.73}$$

в случае ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной вдоль течения, и

$$\mathrm{Re} \le \left| \frac{0.6\xi_0 \left[2\ln b\xi_0 + (1-b\xi_0)(3-b\xi_0) \right]}{(1-b\xi_0)^3} \right|, \tag{10.74}$$

в случае расходящегося ламинарного течения между плоскостью и конусом раскрытом в сторону от плоскости, и с осью, перпендикулярной к последней.

Отметим также, что в случае $b \to 0$, $\varepsilon_F(\infty) \to 0$, что совпадает с результатами, полученными нами в главе 9.

Вычислим значение ε_F при $\xi \to \xi_0$. Прямая подстановка ξ_0 в (10.70) приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, раскрываем ее с помощью правила Лопиталя и, вычисляя предел при $\xi \to \xi_0$, получим

$$\varepsilon_F(\xi_0) = -\mathrm{Re}\frac{1 + b(\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}{6(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}. \tag{10.75}$$

Заметим, что при применении правила Лопиталя к выражению (10.70) мы от отношения безразмерного давления, обусловленного действием инерционной силы к безразмерному давлению, обусловленному работой силы трения, переходим к отношению градиентов этих давлений, т.е. в данном случае правило Лопиталя приобретает конкретный физический смысл.

Для всех рассмотренных ранее случаев течения в канале с увеличивающейся шириной, т.е. $b > 0$, величина $\varepsilon_F(\xi_0) > \varepsilon_F(\xi_1)$. Более того, если мы построим функцию $f(b,\alpha) = \dfrac{\varepsilon_F(\infty)}{\varepsilon_F(\xi_0)}$, то во всем диапазоне изменения параметров b и α отношение $\dfrac{\varepsilon_F(\infty)}{\varepsilon_F(\xi_0)} < 1$ выполняется для всех возможных значений ξ_0 (рис. 10.32). Следовательно, для определения числа Рейнольдса, начиная с которого инерционные силы, возникающие при ламинарном диффузорном течении жидко-

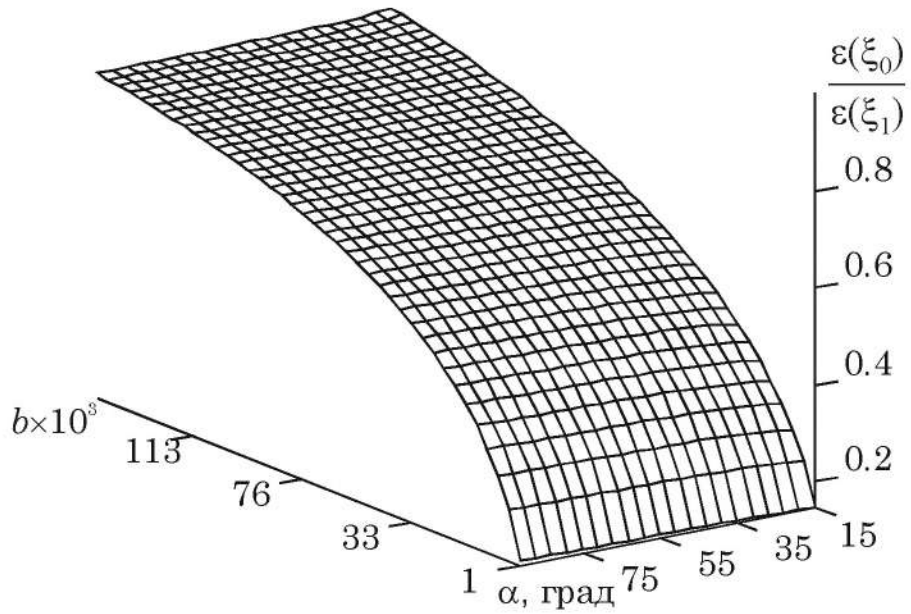


Рис. 10.32. Зависимость частного относительных отклонений между значениями давления, рассчитанными с учетом инерционных сил и без этого учета, на входе в соосный конический диффузор и на выходе из канала с увеличивающейся шириной ($b > 0$) и ограниченного координатами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$.

сти в соосном коническом канале с увеличивающейся шириной, будут оказывать существенное влияние на распределение давления, мы должны использовать выражение (10.75). Для 5% критерия значимости получим

$$\mathrm{Re}^* = \left| \frac{0.3\left(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha\right)}{1 + b\xi_0 - b\operatorname{ctg}\alpha} \right|. \qquad (10.76)$$

Для течения при $\alpha = 90°$ получим

$$\mathrm{Re}^{*}_{\alpha=90^{\circ}} = \frac{0.6\xi_0}{1+b\xi_0}, \tag{10.77}$$

а при $b = 0$ получим результат, найденный ранее автором в работе [30] для течения в канале с постоянной шириной, который также был определен в главе 9 (9.67).

Обратимся теперь к рассмотрению канала с уменьшающейся шириной вдоль течения жидкости. Очевидно, что и в этом случае значение $\varepsilon_F(\xi_0)$ определяется выражением (10.75).

Для определения характерного значения ε_F на выходе из канала мы уже не вправе ξ устремлять к ∞, поскольку ширина канала не может быть отрицательной. Вычисление $\varepsilon_F(\xi_1)$ при $b < 0$ для различных параметров по (10.70) показывают, что величина $\varepsilon_F(\xi)$ является монотонно растущей функцией $|b|$ для любых остальных параметров. Для двух рассмотренных геометрий канала эти зависимости приведены на рисунке 10.33. Такая зависимость показывает, что $\varepsilon_F(\xi_1)$ будет максимальным при $h(\xi_1) = 0$. Подставив в (10.70) вместо b величину $b = \dfrac{h(\xi_1)-1}{\xi_1-\xi_0}$ и, положив $h(\xi_1) = 0$, получим неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, раскрывая которую по правилу Лопиталя и устремляя $h(\xi_1)$ к 0, получим выражение

$$\lim_{h(\xi_1)\to 0} \varepsilon_F(\xi_1) = \mathrm{Re}\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{24(\xi_1-\xi_0)\xi_1}. \tag{10.78}$$

Для $\alpha = 90°$ получим соотношение

$$\lim_{h(\xi_1)\to 0} \varepsilon_F(\xi_1) = \frac{\mathrm{Re}}{12(\xi_1-\xi_0)}\frac{\xi_0}{\xi_1}. \tag{10.79}$$

Ранее было отмечено, что функция $\varepsilon_F(\xi)$ монотонно растущая, а $\varepsilon_F(\xi_1)$ стремится к своему максимуму при $b \to \dfrac{1}{\xi_0-\xi_1}$, т.е. макси-

мальные отличия в расчете перепада давления с учетом инерционных сил и без их учета будет определяться либо выражением (10.75), либо выражением (10.78). Действительно, если мы построим зависимость отношения $\left|\frac{\varepsilon_F(\xi_0)}{\varepsilon_F(\xi_1)}\right|$ от b и α, для различных значений ξ_0 и ξ_1, то увидим, что они существенно различны, а само отношение $\left|\frac{\varepsilon_F(\xi_0)}{\varepsilon_F(\xi_1)}\right|$ может быть как > 1, так и < 1 (рис. 10.34).

Для относительно длинных каналов, т.е. для каналов, в кото-

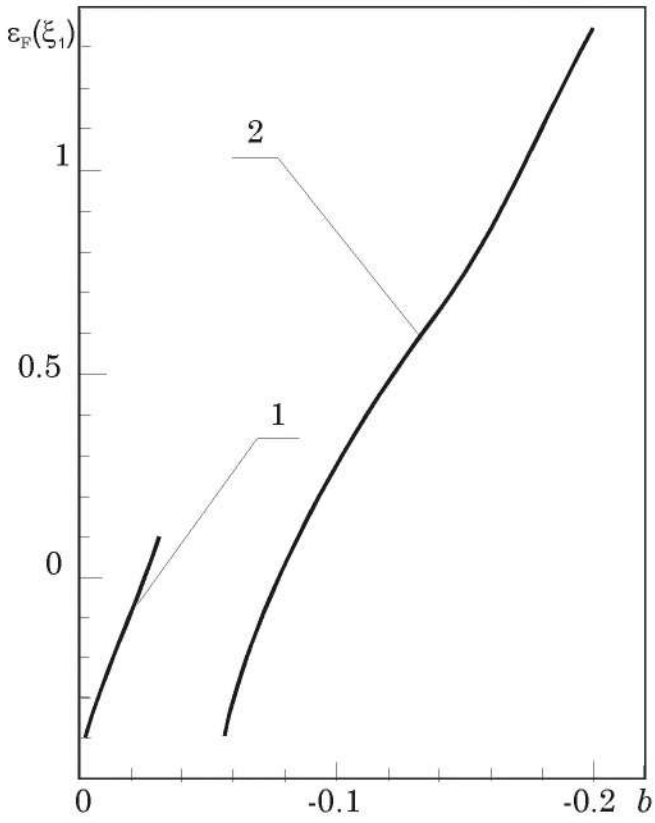


Рис. 10.33. Зависимость относительного отклонения между результатами вычисления безразмерного давления по (10.28) и (10.33) от параметра b на выходе из соосного конического канала: 1 – канала с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, $\alpha = 15°$; 2 – $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 15$, $\alpha = 15°$.

рых отношение $\frac{\xi_1}{\xi_0} > 2$, при использованных ранее предположениях площадь поверхности поперечного сечения на выходе из канала по-

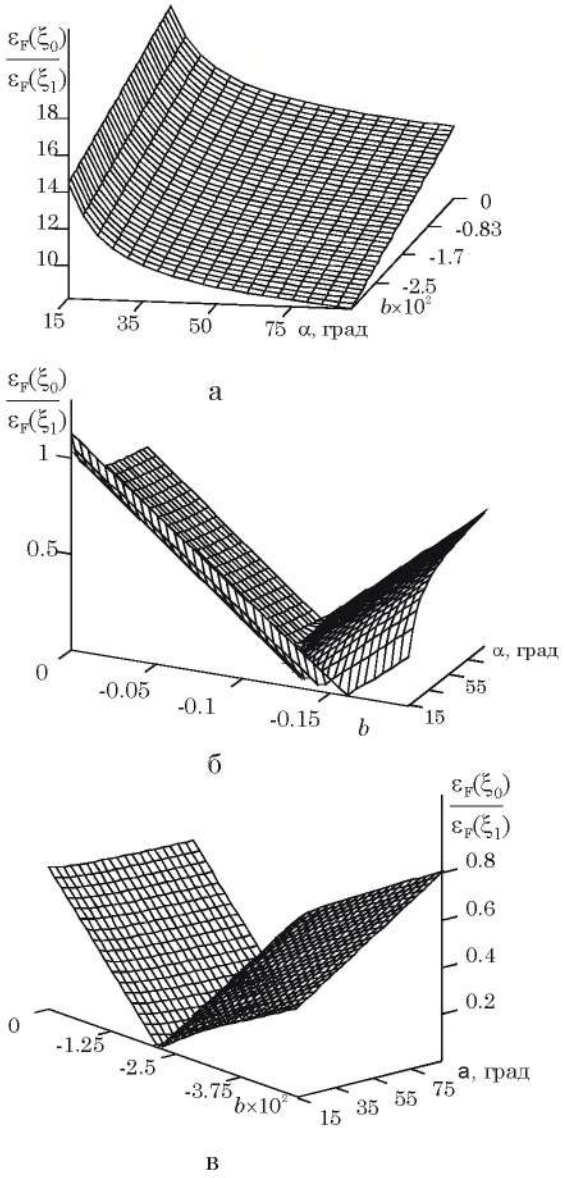


Рис. 10.34. Зависимость частного относительных отклонений между величинами давления, рассчитанного с учетом инерционных свойств и без этого учета, на входе в соосный конический диффузор и на выходе из него при уменьшающейся ширине канала ($b < 0$). а – канал ограничен безразмерными координатами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$; б – $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 15$; в – $\xi_0 = 50$, $\xi_1 = 70$.

стоянной ширины ($b = 0$) намного больше площади поперечного сечения на его входе. Поэтому средняя скорость на выходе из канала значительно меньше, чем на входе в канал, вследствие этого влияние инерционных сил вблизи выхода из канала меньше, чем вблизи входа, и отношение $\left|\frac{\varepsilon_F(\xi_0)}{\varepsilon_F(\xi_1)}\right|$ при малых абсолютных величинах b много больше 1 (рис. 10.34а).

Увеличение $|b|$ до максимума в представленном случае, т.е. для $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$, не приводит к значительной функциональной зависимости $\tilde{s}(\xi)$ вблизи выхода из диффузора, поэтому влияние инерционных сил вблизи входа в канал преобладает для всех возможных значений b. Заметим, что минимальное отношение $\left|\frac{\varepsilon_F(\xi_0)}{\varepsilon_F(\xi_1)}\right|$ наблюдается при $\alpha =$

90° и наименьшем b

$$\left|\frac{\varepsilon_F(\xi_0)}{\varepsilon_F(\xi_1)}\right|_{\min} = \frac{\xi_1}{\xi_0}\left|\frac{\xi_1}{\xi_0} - 2\right|, \qquad (10.80)$$

и в данном случае оно равно 8 (рис. 10.34 а).

Заметим, что отношение (10.80) получено из выражения (10.75) и (10.78) с учетом того, что при $h(\xi_1) \to 0$, $b \to \dfrac{1}{\xi_0 - \xi_1}$.

Из (10.80) мы находим точное соотношение между значениями ξ_0 и ξ_1, при котором влияние инерционных сил на входе в канал будет больше, чем на выходе из него – $\xi_1 > \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right)$ для всех возможных отрицательных значениях b и практически интересных значений α.

Очевидно, что в данном случае для определения числа Re^* необходимо использовать выражение (10.76).

Из (10.80) следует, что при $\xi_1 = 2\xi_0$ и $\alpha = 90°$, $\varepsilon_F(\xi_0) = 0$. Этот результат можно получить и непосредственно из (10.75). Из (10.75) также следует, что при

$$b = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha - \xi_0} \qquad (10.81)$$

инерционные силы, возникающие вследствие изменения площади поперечного сечения канала, не оказывают никакого влияния на перепад давления в канале вблизи входа в него.

В случаях, когда выполняется соотношение $\xi_0 < \xi_1 \le \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right)$, отношение $\left|\dfrac{\varepsilon_F(\xi_0)}{\varepsilon_F(\xi_1)}\right|$ практически для всех значений α и b, меньше 1 (рис.10.34 б, в), за исключением незначительного превышения 1 при малых полууглах раскрытия, для которых определять Re^* можно как по (10.76), так и по (10.78). Для простоты записи выберем для дальнейшего рассмотрения выражение (10.78).

Здесь необходимо отметить, что распределение влияния инерционных сил, вызванных изменением поперечного сечения у коротких каналов, отличается от распределений, рассмотренных выше.

Действительно, при малых абсолютных значениях $|b|$ площадь поперечного сечения канала вдоль течения увеличивается, а значит, средняя скорость жидкости с увеличением ξ уменьшается и инерционные силы существенны в начале течения. Дальнейшее увеличение $|b|$ приводит к уменьшению изменения поперечного сечения канала вдоль течения, а значит к уменьшению влияния инерционных сил, и при некоторых значениях $|b|$ $\varepsilon_F(\xi_0)$ достигает своего минимума (рис. 10.34 б, в). Последующее увеличение $|b|$ ведет к уменьшению площади поперечного сечения канала вдоль течения, т.е. средняя скорость будет расти вдоль ξ. Это приводит к увеличению влияния инерционных сил и, соответственно, к росту $\varepsilon_F(\xi_0)$ (рис. 10.34 б,в).

Итак, для определения числа Рейнольдса, вплоть до которого мы при расчете перепада давления для диффузорного течения в соосном коническом канале с уменьшающейся шириной вдоль течения можем пренебречь влиянием инерционных сил, вызванных изменением поперечного сечения канала, можно записать

$$\mathrm{Re}^* = \begin{cases} \left|\dfrac{0.3(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}{1 + b(\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}\right|, & \xi_1 > \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right), \\ & b < 0, \\ \left|\dfrac{1.2\xi_1(\xi_1 - \xi_0)}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right|, & \xi_0 < \xi_1 \le \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right). \end{cases} \quad (10.82)$$

Выражения (10.82) справедливы для распределения давления вдоль всего канала, но если нас интересует расчет перепада давления только на всей длине канала, то в этом случае необходимо пользоваться выражением

$$\mathrm{Re}^* = \begin{cases} \left|\dfrac{0.15(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)[E_5 + E_6]}{(1 - b\xi_0)^3}\right|, & b > 0, \\ \left|\dfrac{1.2\xi_1(\xi_1 - \xi_0)}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right|, & b < 0, \end{cases} \quad (10.83)$$

где $E_5 = (b\operatorname{ctg}\alpha - 2)^3 \ln\dfrac{b(b\operatorname{ctg}\alpha - 2\xi_0)}{b\operatorname{ctg}\alpha - 2}$,

$E_6 = 2(1 - b\xi_0)\left[3 - b(\xi_0 + \operatorname{ctg}\alpha)\right]$.

Если определять число Re^* при $b > 0$ по максимальному относительному отклонению ε_F, т.е. (10.76), то вместо (10.83) можно использовать выражения

$$\mathrm{Re}^* = \begin{cases} \left|\dfrac{0.3(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)}{1 + b(\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)}\right|, & b > 0, \\ \left|\dfrac{1.2\xi_1(\xi_1 - \xi_0)}{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}\right|, & b < 0. \end{cases} \qquad (10.84)$$

Заметим, что в выражениях (10.78), (10.80), (10.83) и (10.84) фигурирует значение ξ_1, хотя эта величина не является параметром, определяющим решение поставленной задачи (10.11)–(10.15). Это происходит потому, что данная величина определяет предельное значение b — параметра, входящего в решение задачи, а, именно, для предельного значения b мы определяли величину $\varepsilon_F(\xi_1)$ при $b < 0$.

10.7. Диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом диффузоре переменной ширины

перешагни его... и снова,...

А. Дольский

В предыдущем разделе мы определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в соосном коническом диффузоре переменной ширины. Это возможно в тех случаях течения, когда в

выражении (10.33) первый член, показывающий компоненту безразмерного давления, определяемую трением на границах канала, значительно превосходит второй член, определяющий динамическую компоненту давления. Но, очевидно, могут существовать значения чисел Рейнольдса, при которых второй член (10.33) будет значительно превосходить первый. В данном разделе мы определим диапазон чисел Re, в котором при расчете давления в коническом соосном диффузоре переменной ширины можно с заданной точностью пренебречь изменением давления за счет трения на границах канала по сравнению с изменением динамической его составляющей, т.е. по сравнению с изменением давления в канале за счет изменения средней по площади поперечного сечения скорости жидкости.

Также, как и в предыдущем разделе настоящей главы, определим относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативного члена от его динамической составляющей, как

$$\varepsilon_D(\xi) = \left| \frac{\Pi - \Pi_{din}}{\Pi_{din}} \right| = \left| \frac{\Pi_{dis}}{\Pi_{din}} \right|, \tag{10.85}$$

где Π_{din} определяется выражением (10.30).

Сравнивая (10.85, (9.27)) и (10.70), получим соотношение, связывающее величину относительного отклонения безразмерного давления от его диссипативной части со значением относительного отклонения среднего безразмерного давления от его динамической части

$$\varepsilon_D = \frac{1}{\varepsilon_F}. \tag{10.86}$$

Используя (10.86) и (10.71), мы можем записать условие, в случае выполнения которого при вычислении безразмерного давления на бесконечности или, что очевидно то же самое, при определении перепада давления для ламинарного течения в бесконечно длинном коническом соосном диффузоре можно с 5 % точностью

пренебречь диссинативной составляющей давления, т.е. в (10.33) пренебречь Π_{dis}

$$\mathrm{Re} \geq \frac{60}{(1-b\xi_0)^3}(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\left\{(b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 2)^2 \ln\frac{b(b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 2\xi_0)}{b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1} + \right. \tag{10.87}$$

$$\left. +2(1-b\xi_0)\left[3 - b(\xi_0 + \mathrm{ctg}\,\alpha)\right]\right\},$$

а при радиальном течении между конусом и плоскостью с осью, перпендикулярной плоскости, т.е. для $\alpha = 90°$

$$\mathrm{Re} \geq \frac{240}{(1-b\xi_0)^3}\xi_0\left[2\ln b\xi_0 + (1-b\xi_0)(3-b\xi_0)\right]. \tag{10.88}$$

Далее определим условия пренебрежения силами трения для каналов конечных размеров. Сначала сделаем это для канала с увеличивающейся шириной вдоль течения.

Из (10.86) и (10.75) получим, что вблизи входа в канал, т.е. при $\xi \to \xi_0$ и при $b > 0$, можно пренебрегать диссинативной составляющей при расчете давления при выполнении неравенства

$$\mathrm{Re} \geq \frac{120(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}{1 + b(\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}, \tag{10.89}$$

а для $\alpha = 90°$ последнее условие примет вид

$$\mathrm{Re} \geq \frac{240\xi_0}{1 + b\xi_0}. \tag{10.90}$$

Ранее мы показали, что $\varepsilon_F(\xi_0) > \varepsilon_F(\xi_1)$ и $\varepsilon_F(\xi_0) > \varepsilon_F(\infty)$, и что функция $\varepsilon_F(\xi)$ является монотонной функцией, а это означает, что функция $\varepsilon_D(\xi)$ также монотонная и выполняется соотношение

$$\varepsilon_D(\xi_0) < \varepsilon_D(\xi_1) < \varepsilon_D(\infty). \tag{10.91}$$

Следовательно, для того, чтобы пренебрегать диссипативными силами при расчете перепада давления для ламинарного тече-

ния в соосных конических каналах любой длины при увеличивающейся ширине вдоль течения, необходимо выполнение условия (10.87) или (10.88).

В канале с уменьшающейся шириной вдоль течения на входе в канал, очевидно, останутся условия (10.89) и (10.90). На выходе из канала для $\varepsilon_D(\xi_1)$ из (10.78) и (10.86) получим

$$\varepsilon_D(\xi_1) = \frac{24(\xi_1 - \xi_0)\xi_1}{\mathrm{Re}(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}, \tag{10.92}$$

для соосного конического диффузора и для радиального течения между плоскостью и конусом при $\alpha = 90°$

$$\varepsilon_D(\xi_1) = \frac{12(\xi_1 - \xi_0)\xi_1}{\mathrm{Re}\,\xi_0}. \tag{10.93}$$

Откуда получаем соответствующие условия, при выполнении которых можно пренебречь силами трения при вычислении перепада давления с 5 % точностью. Для (10.92)

$$\mathrm{Re} \geq \frac{480(\xi_1 - \xi_0)\xi_1}{2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha}, \tag{10.94}$$

и для (10.93)

$$\mathrm{Re} \geq \frac{240(\xi_1 - \xi_0)\xi_1}{\xi_0} = 240(\xi_1 - \xi_0)\frac{\xi_1}{\xi_0} = 240\left(\frac{\xi_1}{\xi_0} - 1\right)\xi_1. \tag{10.95}$$

В разделе 10.6 мы показали, что в случае течения в соосном коническом диффузоре с уменьшающейся шириной влияние инерционных сил на входе в канал будет больше, чем на выходе из него при $\xi_1 > \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right)$. Это означает, что для оценки числа Re, начиная с которого можно было бы пренебрегать диссипативной составляющей при вычислении перепада давления в канале, необходимо использовать выражения (10.94) и (10.95). Например, для (10.95) уже при $\xi_1 = 2.5\xi_0$ получаем величину $\mathrm{Re} > 900\xi_0$, что может быть нереально для ламинарного течения в практически интересных кана-

лах. Для относительно коротких каналов, т.е. при $\xi_1 < \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right)$, инерционные силы будут преобладать на выходе из диффузора, и поэтому для оценки числа Рейнольдса, начиная с которого мы могли бы пренебречь составляющей давления, обусловленной трением, необходимо использовать соотношения (10.89) и (10.90). Например, для $\xi_1 = 2\xi_0$ при $\alpha = 90°$ из (10.90) получаем, что при $\mathrm{Re} > 120\xi_0$ силами трения можно пренебречь при расчете перепада давления.

Итак, при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с уменьшающейся шириной пренебрежение силами трения при вычислении безразмерного давления или, что то же самое, перепада давления возможно только в относительно коротких каналах, для которых выполняется условие $\xi_1 < \xi_0\left(1+\sqrt{2}\right)$, а для оценки числа Рейнольдса, начиная с которого такое пренебрежение возможно, необходимо использовать неравенства (10.98) и (10.90).

Итак, мы видим, что геометрия канала может существенным образом влиять на инерционные свойства течения. Кратко остановимся на некоторых случаях, когда геометрия канала частично или полностью исключает инерционные силы.

10.8. Некоторые случаи "безинерционных" течений в соосных конических диффузорах

Кроме того, нам известны и другие виды движения, удивительные по равномерности и точности.

Френсис Бэкон

Выражение (10.81), очевидно, следует из (10.75) и (10.76), а (10.75) было получено из отношения градиентов инерционной составляющей безразмерного давления к градиенту диссипативной его составляющей, и поэтому (10.81) также должно удовлетворять условию

$$\left.\frac{d\Pi_{din}}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0, \qquad (10.96)$$

где Π_{din} – инерционная составляющая безразмерного давления. В рассматриваемом случае из (10.81) следует, что b = -0.16.

Для линейного изменения ширины канала вдоль течения значение коэффициента b, при котором удовлетворяется условие (10.96), является единственным и, очевидно, оно не должно быть меньше, чем величина $\frac{1}{\xi_0 - \xi_1}$, что в свою очередь налагает дополнительное условие на значение безразмерной координаты выхода из канала ξ_1. Значение ξ_1, при котором может быть выполнено условие (10.96), должно удовлетворять условию

$$\xi_1 \le 2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (10.97)$$

Вероятно, существует много нелинейных зависимостей ширины канала от ξ, для которых выполняется условие (10.96), но одну из них необходимо отметить особо – это зависимость $\tilde{h}(\xi)$, при которой осуществляется безинерционное течение, т.е. условие $\frac{d\Pi_{din}}{d\xi} = 0$ выполняется для всей длины канала. Очевидно, что данное условие будет выполнено, когда средняя скорость вдоль всего канала остается постоянной и равной своему значению на входе в канал. Используя (6.27), получим

$$\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{\left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\left\{2\xi - \left[1 + b\left(\xi - \xi_0\right)\right]\operatorname{ctg}\alpha\right\}} = 1, \qquad (10.98)$$

откуда для определения значения b получим уравнение

$$b^2\left(\xi - \xi_0\right)\operatorname{ctg}\alpha + 2b\left(\operatorname{ctg}\alpha - \xi\right) - 2 = 0. \qquad (10.99)$$

Полагая в (10.99) $\xi = \xi_0$, получим выражение (10.81), а если в (10.99) положить $\alpha = 90°$, получим

$$b = -\frac{1}{\xi}, \qquad (10.100)$$

а из (10.81) в этом случае будем иметь

$$b = -\frac{1}{\xi_0}. \tag{10.101}$$

Из (10.100) следует, что при изменении ширины канала в случае радиального течения между плоскостью и конической поверхностью, симметрично расположенной над ней, по закону

$$\tilde{h}(\xi) = 1 - \frac{1}{\xi}(\xi - \xi_0) = \frac{\xi_0}{\xi}, \tag{10.102}$$

течение будет безинерционным.

При получении соотношения (10.99) мы использовали конкретный вид зависимости ширины канала от продольной координаты $\tilde{h}(\xi) = 1 - b(\xi)(\xi - \xi_0)$. Понятно, что условие (10.98) будет выполняться только в том случае, когда площадь поперечного сечения канала будет постоянной величиной вдоль течения, т.е. должно выполняться условие

$$\frac{d\tilde{s}}{d\xi} = 0, \tag{10.103}$$

где относительная площадь поперечного сечения канала при произвольном функциональном задании отклонения внутренней границы канала от внешней конической поверхности $\tilde{h}(\xi)$ была определена в (6.26) как

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{h}(\xi)\left[2\xi - \tilde{h}(\xi)\operatorname{ctg}\alpha\right]}{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{10.104}$$

Подстановка (10.104) в (10.103) проводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\left(\tilde{h}\operatorname{ctg}\alpha - \xi\right) = \tilde{h}, \tag{10.105}$$

с начальным условием

$$\tilde{h} = 1, \xi = \xi_0. \tag{10.106}$$

Выполняя в (10.105) замену переменной $\tilde{h} = u + \xi\operatorname{tg}\alpha$, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющи-

мися переменными

$$uu'_{\xi} = \xi \operatorname{tg}^2 \alpha , \tag{10.107}$$

решение которого с условием (10.106) приводит к зависимости

$$\tilde{h} = \xi \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{\xi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha + 1} . \tag{10.108}$$

Зависимость (10.108) показывает распределение расстояния между внутренней границей канала и внешней его границей, образованной круглой конической поверхностью. Средняя по поперечному сечению скорость в таком канале не меняется вдоль течения, и поэтому инерционные силы при установившемся течении здесь отсутствуют. Зависимость (10.108) показана на рисунке 10.35.

Заметим, что (10.108) определяет ширину канала только в случае, когда внешняя поверхность является конической поверхно-

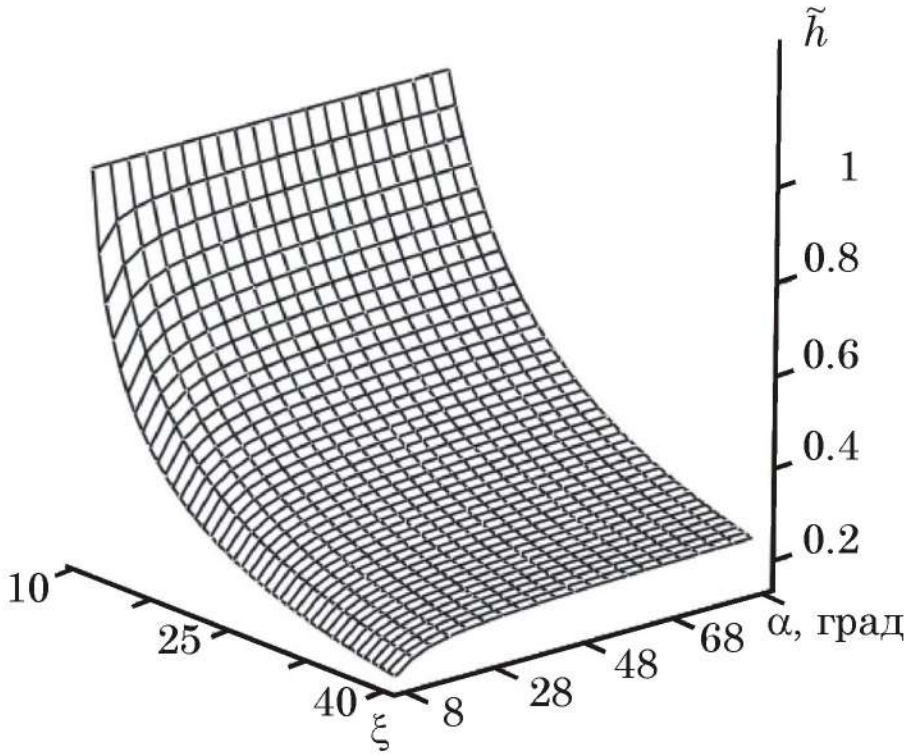


Рис. 10.35. Зависимость безразмерной высоты диффузорного соосного конического канала от продольной безразмерной координаты и полуугла раскрытия внешней конической поверхности.

стью. В том случае, когда $\alpha = 90°$ из (10.105) получаем уравнение, описывающее изменение ширины канала для радиального безинерционного течения в канале, одна стенка которого является плоской поверхностью

$$\frac{d\tilde{h}}{d\xi}\xi - \tilde{h} = 0, \tag{10.109}$$

решение которого с условием (10.106) имеет вид

$$\tilde{h} = \frac{\xi_0}{\xi}, \tag{10.110}$$

что, очевидно, совпадает с (10.102).

К безинерционным течениям в соосных конических каналах необходимо отнести еще и течения в каналах с такой геометрией, в которой средняя скорость жидкости на входе в канал будет равна средней скорости на его выходе. В этом случае, в соответствии с формулой (10.32), инерционная составляющая безразмерного давления на выходе из канала будет равна 0

$$\Pi_{din}(\xi_1) = 0, \tag{10.111}$$

поэтому перепад давления в таком случае будет определяться исключительно силами трения на границах канала, но в отличие от предыдущего случая средняя скорость течения жидкости может изменяться вдоль течения. Это означает, что кинетическая энергия течения может превращаться в потенциальную энергию напряженного состояния и, затем, наоборот.

Анализ выражения (10.30) показывает, что геометрия канала, при которой будет происходить описанное течение, возможна при линейном изменении расстояния между круглыми коническими границами канала. Действительно, обозначая безразмерную ширину канала на выходе через $\tilde{h}_1 = \tilde{h}(\xi_1) = 1 + b(\xi_1 - \xi_0)$, из (10.111) получим для ее определения алгебраическое уравнение четвертой степени

$$\left(\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1 h_1 - h_1^2 \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 = 1, \tag{10.112}$$

которое имеет 4 корня. Далее выбирая физически подходящее значение корня (10.112), получим выражение для определения безраз-

мерной ширины на выходе из канала, при которой инерционная составляющая безразмерного давления на выходе из канала будет равна нулю

$$\tilde{h}(\xi_1) = \frac{\xi_1 - \sqrt{\xi_1 - 2\xi_0 \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (10.113)$$

откуда получаем выражение для определения параметра b

$$b = \frac{\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha - \sqrt{\xi_1 - 2\xi_0 \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}}{(\xi_1 - \xi_0)\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (10.114)$$

Из выражения (10.114) можно получить значение b для рассматриваемого безинерционного радиального течения между плоскостью и симметрично расположенным над ней конусом. Подставляя $\alpha = 90°$ в (10.114), мы придем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, раскрывая которую, получим

$$b = -\frac{1}{\xi_1}. \qquad (10.115)$$

Заметим, что если в (10.113) заменить ξ_1 на ξ, мы получим (10.108), т.е. (10.108) можно получить, непосредственно исходя из выражения (10.30).

10.9. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических диффузорах переменной ширины, рассчитанной с учетом инерционных свойств

смотрят глазами потока,
теряя детали.

И. Жданов

Используя решение, полученное для задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины с учетом характерной для диффузорных течений инерционной силы (10.33), построим расходно-напорную характеристику таких каналов при ламинарных течениях. Учитывая безразмерные

параметры (10.9) и следуя правилу, представленному в (2.78), получим расходно-напорную характеристику для соосного конического диффузора переменной вдоль течения ширины и определенного параметрами: шириной канала на его входе – h_0, полууглом раскрытия внешней границы – α, значением b и радиальными координатами входа в канал и выхода из него – R_0 и R_1. В итоге получаем

$$\Delta P(Q)=\frac{6\mu Q}{\pi h_0^3(1-b\xi_0)\sin\alpha}\left\{\frac{(b\operatorname{ctg}\alpha-2)^2}{4(1-b\xi_0)^2}\ln\frac{(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)\tilde{h}(\xi_1)}{2\xi_1-\tilde{h}(\xi_1)\operatorname{ctg}\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{b(\xi_1-\xi_0)}{2\tilde{h}(\xi_1)}\left[\frac{2-b\operatorname{ctg}\alpha}{1-b\xi_0}+\frac{1+\tilde{h}(\xi_1)}{\tilde{h}(\xi_1)}\right]\right\}+ \tag{10.116}$$

$$+\frac{\rho Q^2}{2\pi^2h_0^2(2R_0\sin\alpha-h_0\cos\alpha)^2}\times$$

$$\times\left\{1-\left[\frac{2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha}{\tilde{h}(\xi_1)\left[\xi_1(2-b\operatorname{ctg}\alpha)+(b\xi_0-1)\operatorname{ctg}\alpha\right]}\right]^2\right\}.$$

Зависимость (10.116) имеет явно выраженный немонотонный характер (рис. 10.36) при положительных значениях параметра b. Это связано, как мы уже видели, с тем, что при положительных величинах b площадь поверхности поперечного сечения канала вдоль течения будет увеличиваться, и, следовательно, будет уменьшаться скорость, а значит, часть кинетической энергии течения жидкости будет в соответствии с законом Бернулли превращаться в потенциальную энергию напряженного состояния, т.е. вдоль течения давление будет восстанавливаться.

При отрицательных и достаточно больших по модуль величинах b средняя по сечению канала скорость вдоль течения может увеличиваться, а это приводит к тому, что диссипативная и динамическая составляющие перепада давления будут обе отрицательны. В этом случае давление вдоль течения резко падает (рис. 10.36).

Более детальное исследование расходно-напорной характеристики диффузорного ламинарного течения ньютоновской жидкости

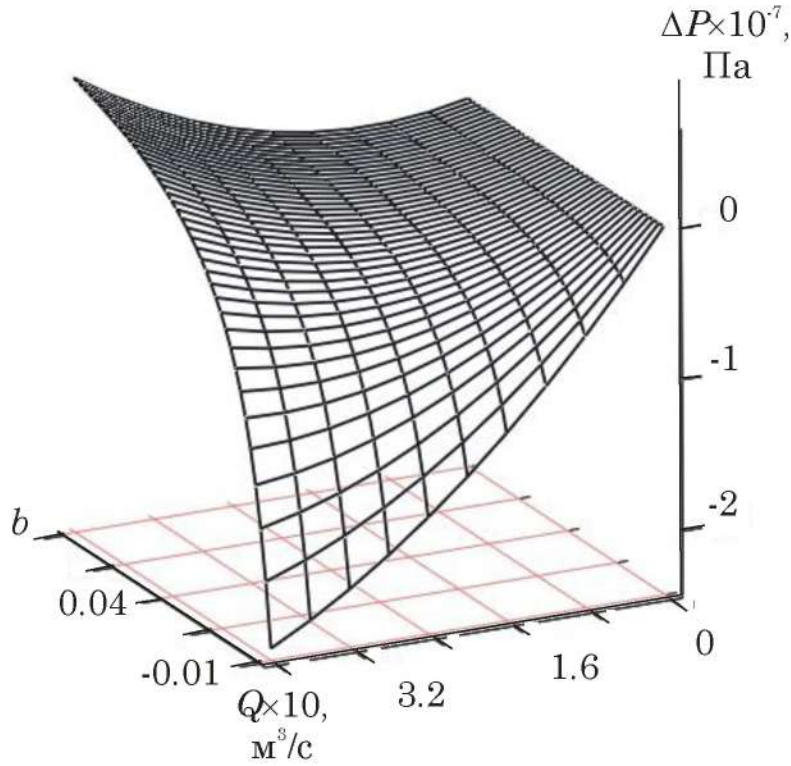


Рис. 10.36. Расходно-напорная характеристика ламинарного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом диффузоре переменной вдоль течения ширины в зависимости от параметра b.

с учетом инерционных свойств в соосных конических каналах будет приведено в главе 16.

ГЛАВА 11

АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ГРАНИЦ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ В БИКОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Обе эти картины совершенно равноценны, и предпочтение одной из них перед другой есть дело лишь соглашения и вкуса.

А. Эйнштейн

11.1. Решение задачи ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ в биконических координатах

Я думаю, эти решения
Господь не один находил.

А. Дольский

Выражение (10.33) позволяет рассчитать распределение безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с переменной шириной вдоль течения практически во всем возможном диапазоне изменения параметра b, за исключением тех значений b, при которых выражение (10.28) расходится, что происходит при $b = 1/\xi_0$ (6.43), т.е. для значений, с которыми мы уже встречались в главе 6 при рассмотрении диффузорного течения в соосных конических каналах с пренебрежимо малым значением чисел Re.

В главе 6 мы видели, что данное значение b возможно только в канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной. Решение задачи ламинарного течения в таких каналах, как с учетом инерционных свойств, так и без такого учета в сферических координатах, мы рассматривали в главах 2 и 8. В главе 6 мы

решили задачу ламинарного течения в случае пренебрежимо малых значений чисел Рейнольдса в биконических координатах. Там получены выражения для определения безразмерной средней скорости течения жидкости (6.47), распределения безразмерной скорости в канале (6.49), распределения безразмерного градиента давления вдоль канала (6.50), (6.51).

В шестой главе также были получены геометрические характеристики соосного конического канала с общей вершиной границ, выраженные в биконической системе координат.

В настоящей главе мы не будем заново формулировать и решать задачу, поскольку она сформулирована в главе 10 и записана с помощью системы уравнений (10.18), (10.12)–(10.15) в достаточно общем виде. Сейчас мы будем рассматривать эту же задачу, но с дополнительным условием, которое определяется выражением (6.43).

Если мы подставим значение $b = 1/\xi_0$ в выражение (10.25) для вычисления градиента давления, получим

$$\frac{d\Pi_{com}}{d\xi} = -2\xi_0^4\left(\frac{6}{\xi^4} - \frac{\mathrm{Re}}{\xi^5}\right) = -12\overline{v}^2 + \frac{2\mathrm{Re}}{\xi}\overline{v}^2 = -2\overline{v}^2\left(6 - \frac{\mathrm{Re}}{\xi}\right), \quad (11.1)$$

где первый член является диссипативной составляющей безразмерного градиента давления, и, очевидно, он совпадает с выражением (6.50), а второй член является динамической составляющей безразмерного градиента давления

$$\frac{d\Pi_{dincom}}{d\xi} = \frac{2\mathrm{Re}\,\xi_0^4}{\xi^5} = \frac{2\mathrm{Re}}{\xi}\overline{v}^2. \quad (11.2)$$

Интегрируя выражение (11.1) с начальным условием (10.15), найдем выражение, определяющее распределение безразмерного давления для течения в соосном коническом диффузоре, образованном конусами с общей границей при частичном учете инерционных свойств, выраженное в биконических координатах

$$\Pi_{com}(\xi) = -4\xi_0\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right] + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4\right]. \quad (11.3)$$

Очевидно, что зависимость (11.3) мы могли бы получить, используя выражение (6.52), определяющее решение задачи только

при учете диссипативных свойств течения и просуммировав его с зависимостью (10.30), в которую необходимо подставить значение $b=1/\xi_0$, поскольку для (10.30) при данном значении b нет расходимости. Однако при решении задачи в текущем разделе мы также получили распределение безразмерного градиента давления вдоль канала, которое будет необходимо при анализе течения и его характеристик в исследуемой геометрии канала.

11.2. Сравнение решений, полученных в биконической и сферической системах координат

На самое дно моря спустись ты и ищи, пока не отыщешь траву, что похожа на стрелы наконечник.

Героический шумерский эпос

Достаточно подробное исследование ламинарного диффузорного течения в соосных конических каналах, образованных поверхностями с общей вершиной с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения, мы выполнили в главе 8 в сферических координатах. В разделе 6.8 шестой главы мы обнаружили хорошее согласие в распределениях скорости жидкости в интересующих здесь нас каналах, полученных в сферических и биконических координатах. Там же было показано почти полное совпадение распределения безразмерных давлений при ползущем течении, рассчитанных при решении задачи в различных системах координат в практически интересных случаях.

В текущем разделе мы кратко проанализируем свойства полученного в предыдущем разделе распределение безразмерного давления и сравним результат, полученный при решении задачи в биконических координатах, с результатами, полученными в сферических координатах. Но сначала запишем распределение безразмерного давления в рассматриваемых каналах с учетом определения (6.90). Распределение (11.3), полученное нами в биконических координатах, запишется в виде

$$\Pi_{com}(\xi) = -4\,\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)\left\{1-\left[\frac{\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\xi}\right]^3\right\}+$$
$$+\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\xi}\right]^4\right\}, \qquad (11.4)$$

а распределение среднего по площади поверхности поперечного сечения безразмерного давления, полученное в сферических координатах (8.21), запишется в виде

$$\Pi^S_{com}(\xi) = -\frac{\lambda+6\,\mathrm{ctg}^2(\alpha-\alpha_1)}{3\,\mathrm{ctg}^3(\alpha-\alpha_1)}\left\{1-\left[\frac{\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\xi}\right]^3\right\}+$$
$$+\frac{\mathrm{Re}_S}{2}\left\{1-\left[\frac{\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)}{\xi}\right]^4\right\}. \qquad (11.5)$$

Выражение для определения безразмерного градиента давления запишется в соответствии с (6.90) и (11.1) в виде

$$\frac{d\Pi_{com}}{d\xi} = -2\left[\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)\right]^4\left(\frac{6}{\xi^4}-\frac{\mathrm{Re}}{\xi^5}\right), \qquad (11.6)$$

для биконических координат и в сферических координатах для среднего по поперечному сечению безразмерного градиента давления (8.20) в виде

$$\frac{d\Pi^S_{com}}{d\xi} = -\frac{\lambda+6\left[\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)\right]^2}{\xi^4}+2\left[\mathrm{ctg}(\alpha-\alpha_1)\right]^4\frac{\mathrm{Re}_S}{\xi^5}. \qquad (11.7)$$

В выражениях (11.5) и (11.7) постоянная разделения переменных в сферических координатах λ определяется по формуле (2.42) или по ее приближению (6.111) либо (6.110).

Зависимость безразмерного градиента давления от безразмерной радиальной координаты ξ как в биконических координатах (11.6), так и в сферических координатах (11.7) пропорционально

$-1/\xi^4$, а это значит, что интеграл $\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\Pi_{com}}{d\xi} d\xi$ в соответствии со второй теоремой сравнения для несобственных интегралов с бесконечными пределами [128] будет конечной величиной, которую мы можем определить непосредственно из (11.4) и (11.5), устремляя $\xi \to \infty$. В итоге мы получаем значение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале, образованном конусами с общей вершиной в биконических координатах

$$\Pi_{com}(\infty) = -4\,\mathrm{ctg}(\alpha - \alpha_1) + \frac{\mathrm{Re}}{2} = -4\xi_0 + \frac{\mathrm{Re}}{2}, \qquad (11.8)$$

и в сферической системе координат

$$\Pi^S_{com}(\infty) = -\frac{\lambda + 6\,\mathrm{ctg}^2(\alpha - \alpha_1)}{3\,\mathrm{ctg}^3(\alpha - \alpha_1)} + \frac{\mathrm{Re}_S}{2} = -\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3\xi_0^3} + \frac{\mathrm{Re}_S}{2}. \qquad (11.9)$$

Очевидно, что величина динамической составляющей безразмерного давления при $\xi \to \infty$ будет стремиться к значению

$$\Pi_{din}(\infty) = \frac{\mathrm{Re}}{2}, \qquad (11.10)$$

запись которого в биконических и сферических координатах формально совпадают.

В выражениях (11.8) и (11.9) первый член представляет значение диссипативной составляющей безразмерного давления на бесконечности, а второй – значение динамической составляющей. Очевидно, что соотношения (11.8) и (11.9) определяют безразмерный перепад давления в бесконечно длинном канале. Из этих же выражений следует, что при некотором значении чисел Рейнольдса перепад давления в бесконечно длинном канале будет равен 0, что равносильно условию $\Pi_{com}(\infty) = 0$, откуда и получаем значение числа Рейнольдса, при котором безразмерное давление на бесконечности будет равно 0

$$\mathrm{Re}^u = 8\xi_0 = 8\,\mathrm{ctg}(\alpha - \alpha_1) \qquad (11.12)$$

в биконической системе координат, а для Re^u_S, определенного в сферической системе координат, получим

$$\mathrm{Re}_S^u = \frac{2}{3}\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^3}. \qquad (11.13)$$

Количественно все параметры, полученные в текущем разделе, в сферической и биконической системах координат сравнивать друг с другом нельзя, поскольку они выражены в различных масштабных единицах. Если принять во внимание определение безразмерных величин (2.3), (6.18), то переход от давления вычисленного в сферической системе координат к масштабу, который используется в биконической системе, будет выглядеть как

$$\Pi^{Sb} = \Pi^S \frac{V_{0C}}{V_{0b}} = \Pi^S \frac{S_{0b}}{S_{0C}}, \qquad (11.14)$$

где V_{0C} – средняя по площади поперечного сечения канала сферической координатной поверхностью входа в соосный конический диффузор, которая была определена нами выражением (2.2); V_{0b} – средняя по площади поверхности поперечного сечения скорость на входе в соосный конический диффузор переменной вдоль течения ширины, определенная в биконических координатах (6.16), а S_{0b} – площадь поперечного входного сечения в соосный конический диффузор с общей вершиной границ, определенная в биконической системе координат (6.92); S_{0C} – площадь поперечного входного сечения в соосный конический диффузор с общей вершиной границ, определенная в сферической системе координат (6.91).

Отношения скоростей и площадей поперечного сечения, которые использованы в (11.14), нами ранее были определены в выражениях (6.93) и (6.98).

Подобным приемом можно пересчитать число Рейнольдса, определенное в сферических координатах (8.1) в масштаб, принятый при решении задачи в биконических координатах

$$\mathrm{Re}_S^b = \mathrm{Re}_S \frac{V_{0b}}{V_{0C}} = \mathrm{Re}_S \frac{S_{0C}}{S_{0b}}. \qquad (11.15)$$

Мы уже отмечали, что в практически интересном диапазоне изменения разности $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1$, относительное отклонение S_{0b} от S_{0C} невелико (рис. 6.27), а отношение S_{0C}/S_{0b}, применяемое в

(11.15) в диапазоне изменения $\Delta\alpha \sim 40°$ для всех возможных значений, α близко к 1 на большей части диапазона (рис. 11.1).

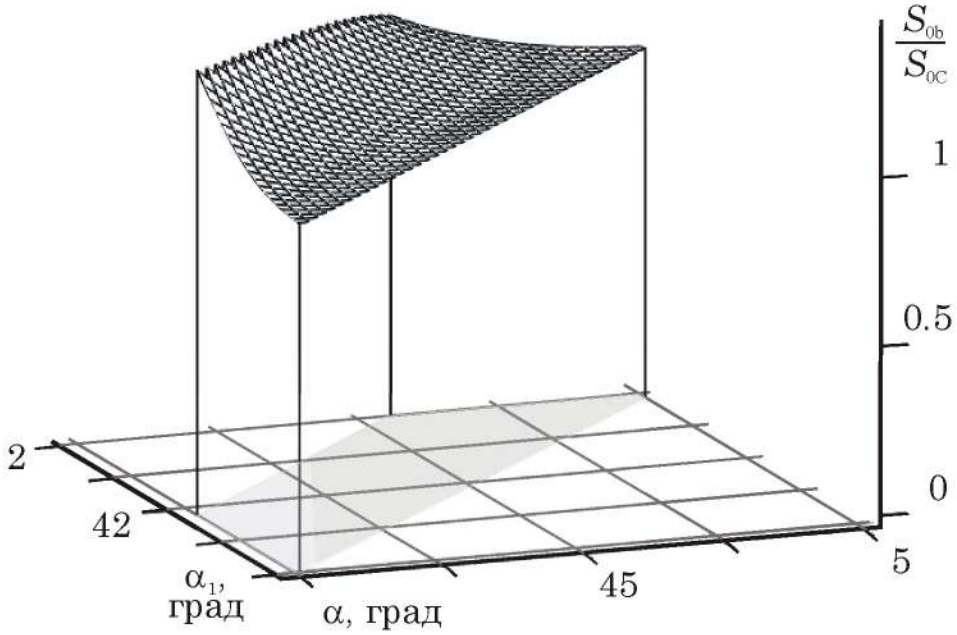


Рис. 11.1. Распределение отношения площадей поверхностей поперечного сечения входа в соосный конический диффузор, образованный коническими поверхностями с общей вершиной и производимых координатными поверхностями в сферической и биконической системах координат. Угол раскрытия конической щели лежит в интервале [3°, 40°].

С помощью выражений (11.8) и (11.9) мы можем определить значение безразмерной координаты ξ_∞, начиная с которой относительное отклонение текущего безразмерного давления в диффузоре от давления на ∞ не будет превосходить 1 %. При вычислении П в биконической системе координат выражение для определения ξ_∞ запишется как

$$\left| \frac{\mathrm{Re}\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4\right]-8\xi_0\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right]}{\mathrm{Re}-8\xi_0}-1 \right| = 0.01, \qquad (11.16)$$

и для сферической системы координат получим, соответственно

$$\left| \frac{\mathrm{Re}_S \left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^4 \right] - \frac{2\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)}{3\xi_0^3} \left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^3 \right]}{\mathrm{Re}_S - \frac{2\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)}{3\xi_0^3}} - 1 \right| = 0.01. \qquad (11.17)$$

Если в (11.16) положить $\mathrm{Re} = 0$, то мы получим соотношение (6.104), которое использовалось для определения ξ_∞ при течении с пренебрежимо малыми силами инерции.

Для того, чтобы вычислить характерное значение безразмерной радиальной координаты ξ_∞, на которой относительное отклонение безразмерного давления от безразмерного давления на бесконечности при течении в соосном коническом диффузоре с преобладающим влиянием инерционных сил не будет превышать 1 %, мы формально в (11.16) и (11.17) можем устремить $\mathrm{Re} \to \infty$, и в результате в обоих случаях получим

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^4 = 0.01, \qquad (11.18)$$

откуда находим значение радиальной координаты, начиная с которой при диффузорном течении в соосном коническом канале, образованном границами с общей вершиной, в случае преобладания инерционных сил безразмерное давление отличается не более, чем на 1 % от безразмерного давления на бесконечности

$$\xi'_\infty = \sqrt{10}\xi_0 = 3.16\xi_0 = 3.16\,\mathrm{ctg}\left(\alpha - \alpha_1\right). \qquad (11.19)$$

Заметим, что данное значение ξ_∞ можно получить, подставив значение $b=1/\xi_0$ в выражение (10.68).

Ранее в главе 6 мы нашли выражения для вычисления значений координаты ξ_∞ в случаях диффузорного течения, когда можно пренебречь инерционными силами (6.105), а в случае, когда можно пренебречь силами трения ξ_∞ определится выражением (11.19). Заметим, что эти два предельных выражения инвариантны

к системам координат, в которых они получены. Здесь необходимо также отметить, что всегда выполняется соотношение

$$\xi'_{\infty} < \xi_{\infty}, \tag{11.20}$$

т.е. динамическая составляющая безразмерного давления достигает своего предельного значения всегда на меньшем расстоянии от входа в канал, чем диссипативная составляющая.

Рассмотрим зависимость $\xi_{\infty}(\mathrm{Re})$ между двумя предельными значениями (6.105) и (11.19) для различных величин разности полууглов раскрытия граничных поверхностей $\Delta\alpha$ и для разных значений полуугла раскрытия внешней конической поверхности диффузора – α.

В интервале изменения $\Delta\alpha \sim [1°,\ 30°]$ зависимости $\xi_{\infty}(\mathrm{Re})$, определенные в различных, используемых здесь системах координат, практически эквивалентны (рис. 11.2), и только при $\Delta\alpha > 30°$ появляется существенное различие в зависимостях $\xi_{\infty}(\mathrm{Re})$, которое устраняется с помощью преобразования (11.15) (рис. 11.3).

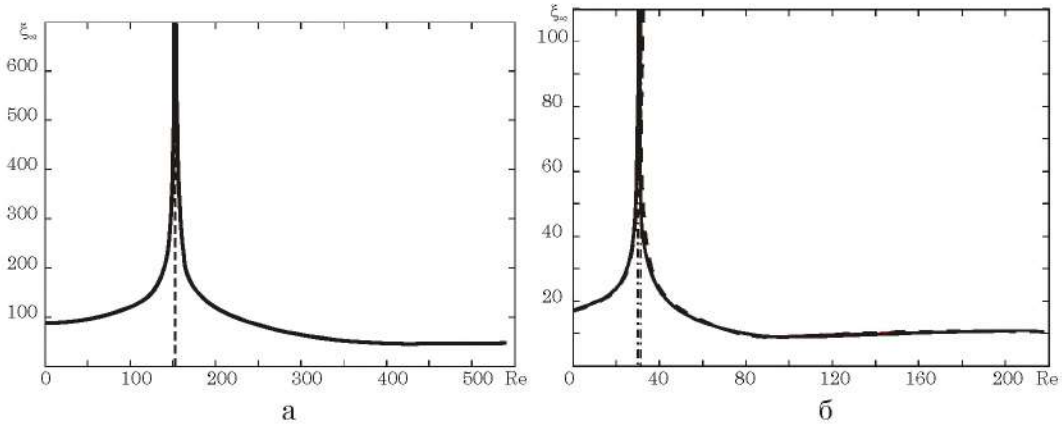


Рис. 11.2. Зависимость безразмерной радиальной координаты, на которой безразмерное давление при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной его границ достигает 99 % своего значения на бесконечности от числа Рейнольдса – Re. а – течение в канале с углом раскрытия конической щели $\Delta\alpha = 3°$ ($\alpha_1 = 13°$, $\alpha = 10°$); б – течение при $\Delta\alpha = 15°$ ($\alpha_1 = 15°$, $\alpha = 30°$). Сплошная линия при решении задачи в биконической системе координат, штриховая в сферической системе координат.

В представленных на рисунках 11.2 и 11.3 зависимостях $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ отчетливо видно, что область определения функции $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ разделена на две различные подобласти изменения чисел Рейнольдса при диффузорном течении в достаточно длинных соосных конических каналах с общей вершиной границ.

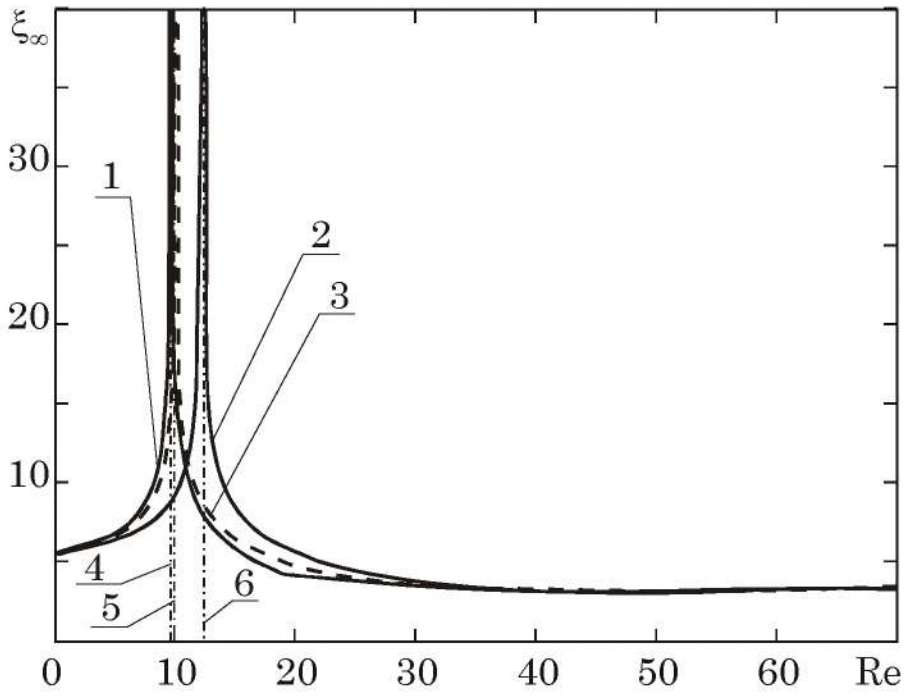


Рис. 11.3. Зависимость безразмерной радиальной координаты, на которой безразмерное давление при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ достигает 99 % своего значения на бесконечности от числа Рейнольдса, в канале с углом раскрытия конической щели $\Delta\alpha = 40°$ ($\alpha_1 = 10°$, $\alpha = 50°$). 1 – при решении задачи в биконической системе координат; 2 – в сферической; 3 – зависимость, полученная в сферической системе координат и откорректированная с помощью преобразования (11.15).

Первая подобласть – это область, где число Рейнольдса изменяется от 0 и до значения (11.12) в решении, полученном в биконических координатах и до значения (11.13) для решения, полученного в сферических координатах. Как следует из (11.8) и (11.9) в этой

области изменения Re безразмерное давление на бесконечности отрицательно, т.е. $\Pi_{com}(\infty)<0$ и $\Pi^{S}_{com}(\infty)<0$, что говорит о преобладании при течении с данными числами Re силы трения о стенки канала над инерционной силой, возникающей вследствие изменения скорости из-за увеличения площади поперечного сечения вдоль течения. ξ_∞ начинает свое изменение здесь со значения (6.105) и растет с увеличением Re. При приближении числа Re к значению, при котором $\Pi(\infty)=0$, знаменатель в выражениях (11.16) и (11.17) стремится к 0, и для их удовлетворения ξ будет стремиться к ∞ (рис. 11.2, рис. 11.3).

Очевидно, что для каждой из зависимостей (11.4) и (11.5) значение величин чисел Рейнольдса, которые делят область определения $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ на две подобласти, будет различно, т.к. они определяются выражениями (11.12) и (11.13).

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса его изменение происходит в следующей области определения функции $\xi_\infty(\mathrm{Re})$. В этой области безразмерное давление на бесконечности является положительной величиной, т.е. $\Pi(\infty)>0$, а это означает, что в данной области при течении в коническом диффузоре будут преобладать инерционные силы. С увеличением числа Рейнольдса от значения Re^{u}, ξ_∞ уменьшается от ∞ и стремится к предельному значению (11.19). На большей части второй подобласти области определения $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ значение ξ_∞ меньше, чем в первой подобласти, и, соответственно, предельная величина (11.19) меньше, чем (6.105). Происходит это потому, что в случае течения с преобладающими инерционными силами зависимость $\Pi(\xi)$ более сильная, чем при течении с преобладающими силами трения (11.3), т.е. в первом случае $\Pi(\xi)\sim\frac{1}{\xi^4}$, а во втором $\Pi(\xi)\sim\frac{1}{\xi^3}$, поэтому-то значение $\Pi=0{,}99\Pi(\infty)$ в области преобладания динамических сил достигается на меньшем расстоянии.

11.3. Определение условий, при которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления

Вызывает интерес
И такой ишо разрез...

Л. Филатов

В предыдущем разделе мы нашли две отчетливо определенных области значений чисел Рейнольдса, в которых силы инерции, возникающие при течении ньютоновской жидкости в достаточно длинном соосном коническом диффузоре, образованном коническими поверхностями с общей вершиной, оказывают различное влияние на распределение давления. Мы видели, что в одной из областей преобладают силы трения, а в другой – силы инерции.

В следующих двух разделах мы определим условия, при которых можно пренебречь либо инерционными силами, либо силами трения при течении в соосном коническом диффузоре конечных размеров, образованном конусами с общей вершиной, с помощью рассмотрения течения в биконической системе координат, и сравним результаты, полученные в текущем разделе, с результатами, полученными ранее в главе 8 при решении задачи в сферических координатах.

В качестве значимой величины примем относительное отклонение безразмерного давления в канале, вычисленного с учетом силы трения и инерционных сил от безразмерной диссипативной или безразмерной динамической составляющей безразмерного давления, равное 5 %. Определим относительное отклонение полного безразмерного давления от его составляющих как

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\Pi - \Pi_i}{\Pi_i} \right|, \qquad (11.21)$$

где $i = 1, 2$; индекс 1 или F – для динамической составляющей, а индекс 2 или D – для диссипативной составляющей давления.

11.4. Условия пренебрежения диссипативной составляющей безразмерного давления

Можно сказать, что числа управляют количественной стороной природы.

Дж. К. Максвелл

Определим сначала условия, при которых можно пренебречь диссипативной составляющей безразмерного давления. Выражение (11.21) в этом случае примет вид

$$\varepsilon_D(\xi)=\left|\frac{\Pi-\Pi_{din}}{\Pi_{din}}\right|=\left|\frac{-4\xi_0\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right]}{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4\right]}\right|=\frac{8\xi_0}{\mathrm{Re}}\left|\frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4}\right|. \qquad (11.22)$$

Откуда для определения критического значения числа Рейнольдса получаем выражение

$$\mathrm{Re}^*=\frac{8\xi_0}{\varepsilon_D(\xi)}\left|\frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4}\right|. \qquad (11.23)$$

Принимая условие значимости $\varepsilon_D=0.05$ и устремляя $\xi\to\infty$, получим условие для пренебрежения силой трения при определении безразмерного давления на достаточно больших безразмерных расстояниях от входа в диффузор

$$\mathrm{Re}^*_{1\infty}\geq 160\xi_0. \qquad (11.24)$$

Мы видим, что значение числа Рейнольдса (11.24) гораздо больше, чем величина числа Рейнольдса (11.12), начиная с которого инерционные силы становятся преобладающими при диффузорном течении в соосном коническом канале с общей вершиной границ.

Заметим, что если в (8.55) подставить $n=5$, то получим (11.24).

Сейчас определим характерные значения чисел Рейнольдса, при превышении которых мы можем пренебречь диссипативной составляющей безразмерного давления при его вычислении в каналах конечных размеров.

Для того, чтобы определить критическое значение числа Рейнольдса на входе в канал, устремим в (11.23) $\xi \to \xi_0$, после чего получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Раскроем неопределенность с помощью правила Лопиталя, применяя которое мы переходим в выражении (11.21) от вычисления относительного отклонения в значениях безразмерного давления от его динамической составляющей к определению относительного отклонения градиента безразмерного давления от его динамической составляющей

$$\mathrm{Re}^*_{1\xi_0} = \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{8\xi_0}{0.05}\left|\frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4}\right| \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \tag{11.25}$$

$$= \lim_{\xi\to\xi_0} 160\xi_0 \frac{3\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 \frac{1}{\xi^2}}{4\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3 \frac{1}{\xi_0^2}} = 120\xi_0 .$$

Для того, чтобы определить критическое значение $\mathrm{Re}^*_{1\xi}$, при превышении которого можно пренебрегать силами трения при вычислении перепада давления на выходе из канала, запишем значение (11.23) в виде

$$\mathrm{Re}^*_{1\xi_1} = 160\xi_0 \left|\frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^4}\right|. \tag{11.26}$$

Оценим $\mathrm{Re}^*_{1\xi}$, вычисляя в (11.26) предел при $\xi_0 \to \xi_1$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\mathrm{Re}^*_{1\xi_1} = \lim_{\xi_0 \to \xi_1} 160\xi_0 \frac{3\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2 \frac{1}{\xi_1}}{4\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^3 \frac{1}{\xi_1}} = 120\xi_1 . \qquad (11.27)$$

Наименьшее значение числа Re^*_1 наблюдается на входе в канал, а это означает, что влияние инерционных сил здесь наибольшее при течении в диффузоре. В пределах всего канала мы можем пренебречь влиянием сил трения на формирование давления в пределах всего канала только при $\mathrm{Re} \geq \mathrm{Re}^*_{1\xi_1}$, поскольку выражение (11.27) дает значение большее, чем выражение (11.25).

Это возможно потому, что функция $\varepsilon_D(\xi)$ (11.22) и, следовательно, $\mathrm{Re}^*(\xi)$ при фиксированном ε_D в рассматриваемых случаях, аналогично рассмотренным ранее в главах 8.9, является монотонной и экстремальные значения имеет на границах интервала.

Действительно, из условия $\frac{d\,\mathrm{Re}^*}{d\xi} = 0$ получаем, что локализация экстремального значения Re^* будет находиться из уравнения

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4 - 4\frac{\xi_0}{\xi} + 3 = 0, \qquad (11.28)$$

действительное положительное решение которого выглядит как

$$\xi = \frac{\xi_0}{1.784}, \qquad (11.29)$$

т.е. всегда меньше ξ_0, и в пределах канала $\mathrm{Re}^*(\xi)$ является всегда монотонной функцией.

Интересно сравнить величину критических чисел Рейнольдса на выходе из канала и на бесконечности. Значение $\mathrm{Re}^*_{1\xi}$ может быть

меньше $\mathrm{Re}^*_{1\infty}$ только при выполнении условия $\xi_0 \geq \dfrac{3}{4\xi_1}$, что вполне возможно.

Отметим также, что значения чисел Рейнольдса, при которых можно пренебречь силами трения, достаточно большие, поскольку в практически интересных случаях, как правило, выполняются условия $\xi_1 > \xi_0 \geq 1$.

11.5. Условия пренебрежения динамической составляющей безразмерного давления при его вычислении в случае диффузорного течения в соосном коническом канале, образованном границами с общей вершиной

Изречение, что число есть сущность всех чувственно осязаемых вещей, осталось наиболее значимым высказыванием античной математики.

О. Шпенглер

Для определения критических значений числа Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать инерционными силами при расчете безразмерного давления в рассматриваемых каналах, полагая в (11.21) $i = 2$, запишем

$$\mathrm{Re}^* = \left| \frac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}} \right| = 8\xi_0 \varepsilon_F(\xi) \left| \frac{1 - \left(\dfrac{\xi_0}{\xi}\right)^3}{1 - \left(\dfrac{\xi_0}{\xi}\right)^4} \right|. \qquad (11.30)$$

Выражение (11.30) показывает, что величина Re^* непостоянна вдоль канала.

Сначала определим значение чисел Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать динамической составляющей безразмерного давления на достаточно большом расстоянии от входа в диффузор. В качестве значительной величины относительного отклонения (11.30), как и в предыдущем разделе, будем использовать

значение $\varepsilon_F = 0.05$. Устремляя $\xi \to \infty$, из (11.30) получаем условие, при выполнении которого на бесконечности можно пренебречь инерционными силами при вычислении максимально возможного изменения безразмерного давления в бесконечно длинном канале

$$\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}^*_{2\infty} = 0.4\xi_0 . \tag{11.31}$$

Для вычисления критического значения числа Рейнольдса на входе в канал вычислим при (11.30) предел при $\xi \to \xi_0$. Применяя правило Лопиталя, мы переходим в (11.30) от относительного отклонения безразмерных давлений к относительному отклонению их градиентов, т.к. это необходимо для раскрытия возникающей неопределенности

$$\mathrm{Re}^*_{2\xi_0} = \lim_{\xi\to\xi_0} 0.4\xi_0 \left| \frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4} \right| = \lim_{\xi\to\xi_0} 0.4\xi_0 \frac{3\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 \frac{1}{\xi^2}}{4\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3 \frac{1}{\xi^2}} = 0.3\xi_0 . \tag{11.32}$$

Чтобы вычислить критическое значение Re^* на выходе из диффузора, перепишем (11.30) в виде

$$\mathrm{Re} = 0.4\xi_0 \left| \frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^4} \right| , \tag{11.33}$$

и, переходя к пределу при $\xi_0 \to \xi_1$, раскрываем возникающую неопределенность по правилу Лопиталя и находим

$$\mathrm{Re}^*_{2\xi_1} = \lim_{\xi_0\to\xi_1} 0.4\xi_0 \left| \frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^3}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^4} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Правило} \\ \text{Лопиталя} \end{matrix} \right\} = \tag{11.34}$$

$$= \lim_{\xi_0 \to \xi_1} 0.4\xi_0 \frac{3\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2 \frac{1}{\xi_1}}{4\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^3 \frac{1}{\xi_1}} = 0.3\xi_1 .$$

Функции $\varepsilon_F(\xi)$ и $\mathrm{Re}^*(\xi)$ являются монотонными в пределах канала, что следует из (11.29), поскольку зависимости (11.30) и (11.23) при фиксированном значении $\varepsilon = 0.05$ совпадают с точностью до постоянного множителя. Поэтому условие, при котором можно пренебречь динамической составляющей перепада давления при его анализе в пределах всего канала, определится неравенством

$$\mathrm{Re} \le 0.3\xi_0 , \qquad (11.35)$$

а, если интересует значение П только на выходе из канала, то динамической его составляющей можно пренебречь при выполнении условия

$$\mathrm{Re} \le 0.3\xi_1 . \qquad (11.36)$$

11.6. Анализ ламинарного диффузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале, образованном поверхностями с общей вершиной, с учетом инерционных свойств в биконических координатах

Современная стадия физической теории – это только переходная ступень к более совершенным стадиям, которые мы достигнем в будущем.

П.А.М. Дирак

А сейчас давайте рассмотрим несколько конкретных примеров течения ньютоновской жидкости в соосных конических диффузорах с общей вершиной у границ, образующих канал.

Учет динамической составляющей безразмерного давления, возникающей вследствие изменения средней скорости течения из-за изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения

при решении задачи ламинарного течения ньютоновской жидкости в соосных конических каналах с общей вершиной у его границ, никак не влияет на получаемые выражения для распределения скоростей и их производных, которые достаточно полно были изучены в разделе 6.8 шестой главы. Поэтому в настоящем пункте монографии мы в основном будем рассматривать параметры, связанные с распределением безразмерного давления, его градиента и их составляющих в указанных каналах.

Начнем рассмотрение с анализа течения в диффузорах с малой разностью полууглов раскрытия границ. Для начала, положим $\Delta\alpha = 3^\circ$, а $\alpha = 18^\circ$.

Как следует из (6.90) безразмерная координата входа в канал в этом случае для используемых нами безразмерных величин будет равна $\xi_0 = 19.08$, а радиальная координата, на которой достигается значение безразмерного давления, равное $0.99\Pi(\infty)$, в соответствии с (11.19) будет равна $\xi_\infty = 60.34$. Последнее значение и примем за безразмерную координату выхода из рассматриваемого сейчас канала, т.е. примем $\xi_1 = \xi_\infty$.

Для малых значений чисел Рейнольдса (10.9), например для $\mathrm{Re} = 5$, распределение безразмерного градиента давления, вычисленного с учетом динамической составляющей имеет заметное отличие от безразмерного градиента давления, полученного без динамической составляющей только в начале канала (рис. 11.4). Да-

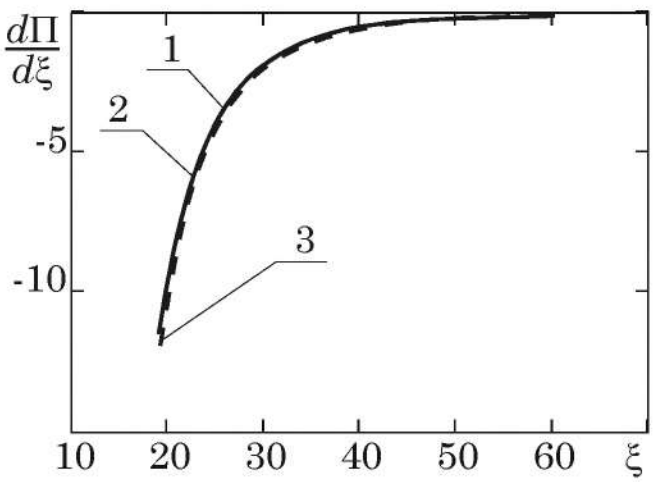


Рис. 11.4. Распределение безразмерного градиента давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ с полууглами их раскрытия $\alpha = 18°$, $\alpha_1 = 15°$, полученные в биконической и сферической системах координат – 1 и 2; 3 – распределение диссипативной составляющей безразмерного градиента давления, полученная в биконической системе координат.

лее вдоль течения различие между градиентами, т.е. между безразмерным градиентом давления и его диссипативной составляющей, практически исчезает. Это происходит потому, что динамическая составляющая градиента давления $\sim\frac{1}{\xi^5}$, а диссипативная – $\sim\frac{1}{\xi^4}$ (11.1), и поскольку в рассматриваемых каналах $\xi>1$, динамическая составляющая уменьшается вниз по течению быстрее, чем диссипативная.

Наибольшее различие в распределении полного безразмерного давления от его диссипативной составляющей, т.е. безразмерного давления, определенного без учета динамической составляющей, наблюдается в начале канала (рис. 11.5), и вниз по течению относительное отклонение между этими величинами несколько уменьшается (рис. 11.5б), но стремятся они к различным значениям безразмерного давления на бесконечности – $\Pi(\infty)$, т.е. для безразмерного давления – (11.8) , а для его диссипативной составляющей – (6.101).

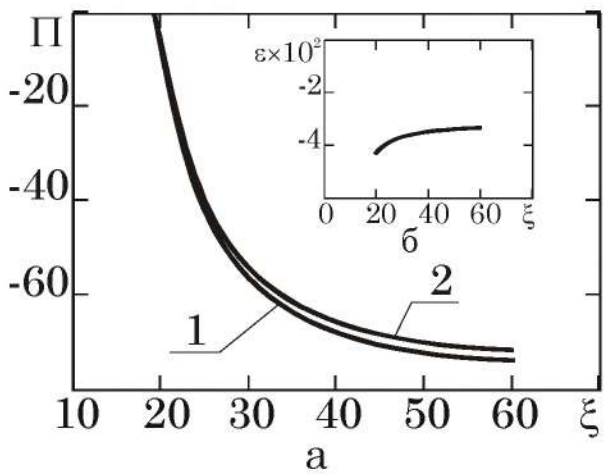


Рис. 11.5. Распределение безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и с их полууглами раскрытия, равными: $\alpha=18°$, $\alpha_1=15°$, при $\mathrm{Re}=5$ – а: 1 – распределение, полученное в биконических координатах (11.4); 2– в сферических (11.5); б – распределение вдоль течения относительного отклонения распределения 1 от распределения 2.

Здесь стоит заметить, что поскольку в рассматриваемом случае $\mathrm{Re}<0.3\xi_0$ и тем более $\mathrm{Re}<0.3\xi_1$, то максимальное относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом сил инерции от безразмерного давления, полученного без этого учета, нигде в пределах канала не превысит 5 % (рис. 11.5).

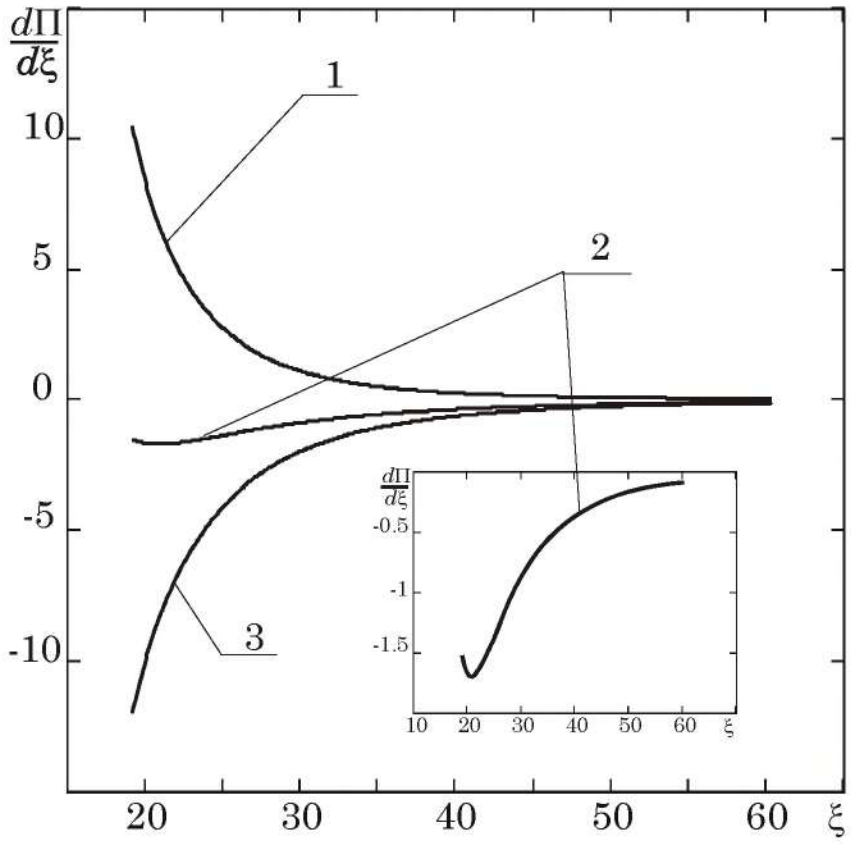


Рис. 11.6. Распределение безразмерного градиента давления при ламинарном диффузором течении с Re = 100 в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной и полууглами их раскрытия $\alpha = 18°$, $\alpha = 18°$, $\alpha_1 = 15°$: 1 – динамическая составляющая безразмерного градиента давления; 2 – полный безразмерный градиент давления; 3 – диссипативная составляющая безразмерного градиента давления.

В случае расчета П без учета инерционной силы величина $\Pi(\infty)$ определяется выражением (6.101) и равна $\Pi(\infty) = -4\xi_0 = -76.32$, а динамическая составляющая безразмерного давления в соответствии с (11.10) на бесконечности стремится в данном случае к значению – 2.5 и, следовательно, при $\xi \to \infty$ статическое безразмерное давление в соответствии с (11.8) стремится к значению $\Pi(\infty) = -73.82$.

Распределение безразмерного давления, полученное при решении рассматриваемой задачи в сферических координатах (11.5), практически совпадает с (11.4). Их относительное отличие составляет величину, близкую к 0.1 % вдоль всего канала. Предельное значение Π^{S}_{com} (11.5) при $\xi \to \infty$ в этом приближении также близко к полученному в биконических координатах и равно $\Pi(\infty) = -73.89$.

Увеличив число Рейнольдса до 100, мы увеличиваем динамическую составляющую безразмерного градиента давления, и она становится сравнима по абсолютной величине с диссипативной составляющей безразмерного градиента давления, но ее величина положительна (рис. 11.6), поскольку при замедлении течения вдоль диффузора происходит переход кинетической энергии движения жидкости в потенциальную энергию напряженного состояния, и в результате происходит восстановление статического давления вдоль течения.

В данном случае $\mathrm{Re} \gg \xi_0$, вследствие чего мы сразу можем сказать о значительном отличии в распределениях безразмерного давления, вычисленного с учетом инерционных свойств и без этого учета. Возможно также появление новых особенностей в распределении перепада давления и его градиента вдоль течения.

Градиент безразмерного статического давления в данном случае является немонотонной зависимостью от ξ (рис. 11.6). Это происходит вследствие того, что динамическая составляющая градиента давления $\sim \frac{1}{\xi^5}$, а диссипативная $\sim -\frac{1}{\xi^4}$, и в начале течения при увеличении ξ динамическая составляющая уменьшается интенсивнее, чем модуль диссипативной составляющей, что и приводит к увеличению модуля градиента давления (11.1). При дальнейшем течении модуль градиента давления уменьшается из-за совместного уменьшения абсолютной величины его составляющих (рис. 11.6).

Локализацию максимального значения абсолютной величины градиента давления определим из условия

$$\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = 0, \qquad (11.37)$$

откуда для градиента давления, выраженного в биконических координатах, получим координату локализации его минимума

$$\xi_{dm}^{b} = \frac{5\,\mathrm{Re}}{24}, \tag{11.38}$$

а для градиента давления, выраженного в сферических координатах, получим значение

$$\xi_{dm}^{S} = \frac{5\xi_0^4\,\mathrm{Re}}{2\left(\lambda + 6\xi_0^2\right)}. \tag{11.39}$$

Заметим, что при подстановке приближенного выражения (6.111) в (11.39) получим запись (11.38), и при определении величин чисел Рейнольдса в одном и том же масштабе скорости мы получим для ξ_{dm}^{b} идентичные значения.

Для рассматриваемого канала при течении с $\mathrm{Re}=100$ $\xi_{dm}^{b}=20.83$ (рис. 11.6), а $\xi_{dm}^{S}=20.82$, т.е. практически совпадают, что также говорит о правомерности использования выражения (6.111). Заметим, что для течения, которое мы рассматривали ранее с $\mathrm{Re}=5$, величины ξ_{dm} были равны 1.04, т.е. меньше безразмерной координаты входа в канал $\xi_0=19.08$, что в данном случае находится за пределами возможного течения.

При выбранном числе $\mathrm{Re}=100$ динамическая составляющая безразмерного давления становится сравнима по абсолютной величине с его диссипативной составляющей или, другими словами, с распределением безразмерного давления, рассчитанным без учета инерционных свойств течения (рис. 11.7).

Отличие в распределениях безразмерного давления, полученного в биконических координатах (11.4), от распределения, полученного в сферических координатах (11.5), также, как и прежде, практически отсутствует. Значение безразмерного давления на бесконечном удалении от входа в канал для (11.4) равно $\Pi_{com}(\infty)=-26.32$, а для (11.5) – $\Pi_{com}^{S}(\infty)=-26.39$.

Увеличение числа Рейнольдса до значения $\mathrm{Re}=150$ вносит новые свойства в распределение безразмерного давления и его гра-

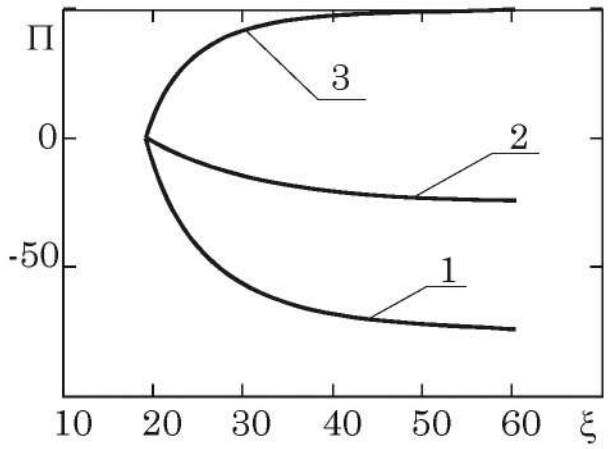


Рис. 11.7. Распределение безразмерного давления вдоль течения при Re = 100 в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия $\alpha = 18°$, $\alpha_1 = 15°$. 1 – диссипотивная составляющая безразмерного давления; 2 – безразмерное давление; 3 – динамическая составляющая безразмерного давления.

диента в рассматриваемом канале. Хотя это значение Re еще намного меньше значения (11.25), при котором инерционные силы становятся преобладающими при течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ в начале течения, динамическая составляющая превосходит по абсолютной величине диссипативную составляющую, поэтому вблизи входа в диффузор безразмерный градиент давления положителен (рис. 11.8). А это означает, что течение в начале канала происходит в сторону увеличения давления (рис. 11.9). Определить значение числа Рейнольдса, начиная с которого возникает течение в сторону увеличения давления, мы можем из условия (10.59) или $\left.\frac{d\Pi_{com}}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0$ в настоящем случае. В итоге для рассматриваемого течения в биконических координатах получаем выражение

$$\mathrm{Re}^{b'} = 6\xi_0, \tag{11.40}$$

а для выражения градиента давления, полученного в сферических координатах

$$\mathrm{Re}^{S'} = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{2\xi_0^3}, \tag{11.41}$$

где, как мы помним, $\xi_0 = \mathrm{ctg}(\alpha - \alpha_1) = \mathrm{ctg}(\Delta\alpha)$.

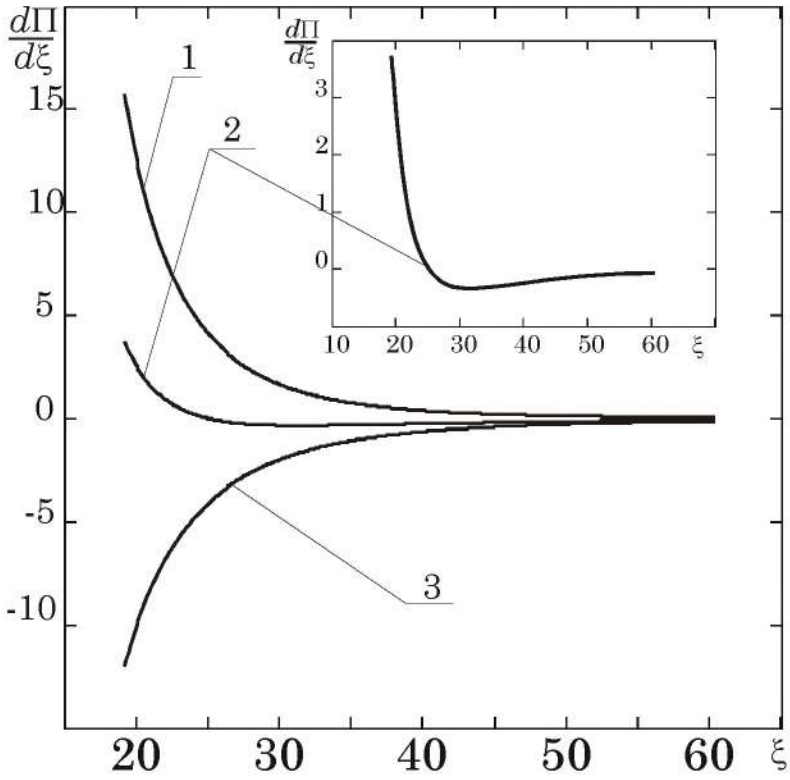


Рис. 11.8. Распределение безразмерного градиента давления при ламинарном диффузором течении с Re = 150 в соосном коническом канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной и полууглами их раскрытия $\alpha = 18°$, $\alpha = 18°$, $\alpha_1 = 15°$: 1 – динамическая составляющая безразмерного градиента давления; 2 – полный безразмерный градиент давления; 3 – диссипативная составляющая безразмерного градиента давления.

Интересно отметить, что значение (11.40) ровно в два раза меньше числа Рейнольдса, при котором возникает течение в сторону повышения давления при расходящемся радиальном течении между параллельными пластинами (9.50), но совпадает с (10.61).

В рассматриваемом канале число $\mathrm{Re}^{b'} = 114.49$, а значение (11.41) $\mathrm{Re}^{S'} = 114.58$, т.е. практически эти два значения совпадают, что снова показывает нам возможность использования выражения (6.111) в (11.41).

При дальнейшем течении вдоль канала безразмерный градиент давления резко уменьшается до 0 (рис. 11.8). Резкое его

уменьшение происходит, как мы ранее выяснили, за счет более интенсивного уменьшения модуля инерционной составляющей безразмерного градиента давления по сравнению с его диссипативной

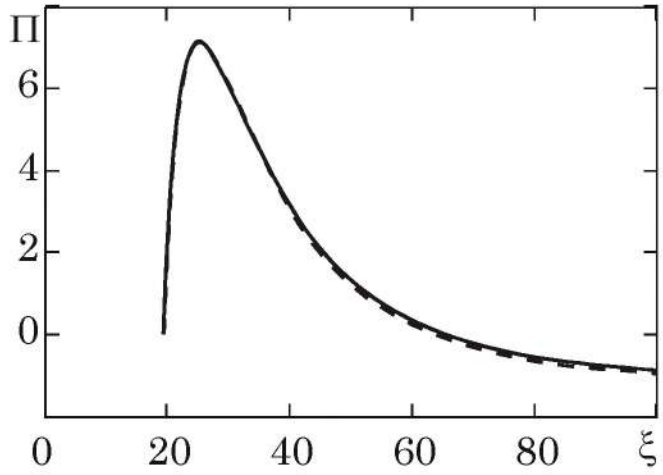


Рис. 11.9. Распределение безразмерного давления вдоль течения при Re = 150 в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия $\alpha = 18°$, $\alpha_1 = 15°$. Сплошная линия – распределение, полученное в биконической системе координат; штриховая линия – в сферической системе координат.

составляющей. В точке, где $\frac{d\Pi}{d\xi} = 0$, наблюдается максимальное значение безразмерного давление (рис. 11.9), и из данного условия определяем локализацию этого значения. Для решения, полученного в биконических координатах, получаем

$$\xi_{\Pi m}^{b} = \frac{\mathrm{Re}}{6}, \tag{11.42}$$

и для решения, полученного в сферических координатах

$$\xi_{\Pi m}^{S} = \frac{2\xi_0^4\,\mathrm{Re}}{\lambda + 6\xi_0^2}. \tag{11.43}$$

Опять таки заметим, что при подстановки (6.111) в (11.43), получим определение (11.42).

В нашем случае, т.е. при $\Delta\alpha = 3°$, последние два значения практически совпадают: $\xi_{\Pi m}^{b} = 25$, а $\xi_{\Pi m}^{S} = 24.98$, поскольку практически совпадают распределения безразмерного давления и его градиентов вдоль координаты ξ, поскольку масштабы этих величин в используемых координатных системах, практически одинаковы.

Отметим, что при рассмотрении диффузорного ламинарного течения в соосном коническом канале с помощью его моделирования в биконических координатах мы получаем, что локализация максимального безразмерного давления П определяется исключительно значением числа Re (11.42) и не зависит от полууглов раскрытия границ канала.

Распределение безразмерного давления при ламинарном течении в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ, полученное в биконических координатах, определяется только величинами Re и $\Delta\alpha$ (11.4), т.е. не зависит от полуугла раскрытия внешней конической поверхности. Это позволяет нам для любого значения угла раскрытия конической щели $\Delta\alpha$ построить единую зависимость $\Pi(\xi,\ \mathrm{Re})$, независящую от значения α, т.е. от полуугла раскрытия внешней конической границы канала. Для рассмотренного выше случая при $\Delta\alpha = 3°$ такая зависимость приведена на рисунке 11.10.

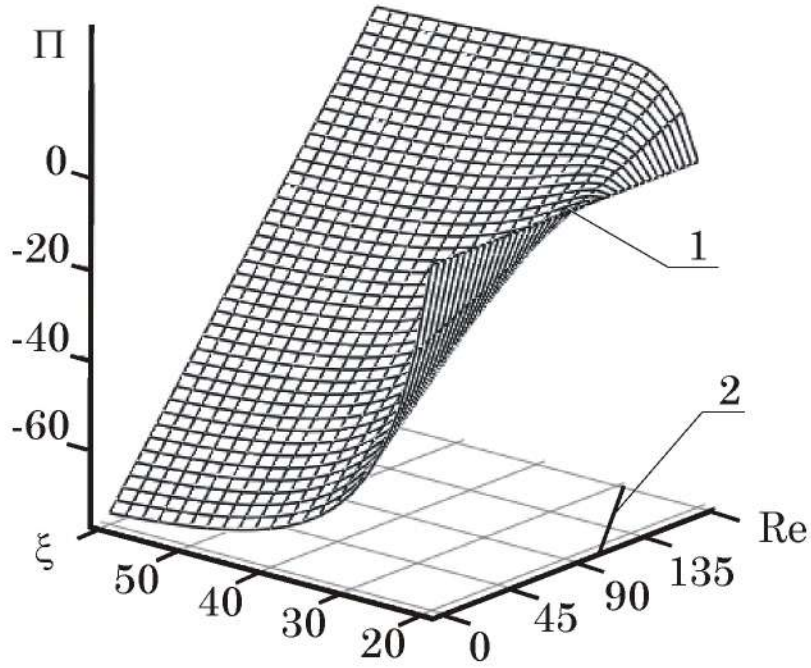


Рис. 11.10. Распределение безразмерного давления вдоль соосного конического диффузора, образованного круглыми конусами с общей вершиной и углом раскрытия конической щели $\Delta\alpha = 3°$ для различных значений числа Рейнольдса – 1; 2 – линия локализации максимальных значений безразмерного давления.

При увеличении угла раскрытия конической щели эффекты в распределении давления, вызываемые инерционными свойствами течения, должны проявиться на меньших значениях числа Рейнольдса, поскольку изменение средней по площади поверхности поперечного сечения безразмерной скорости течения происходит более интенсивно, т.е. равное изменение в $\bar{v}$ при $\Delta\alpha = 3°$ и при больших $\Delta\alpha$ происходит в пределах меньших радиальных расстояний для больших значений $\Delta\alpha$ (рис. 11.11).

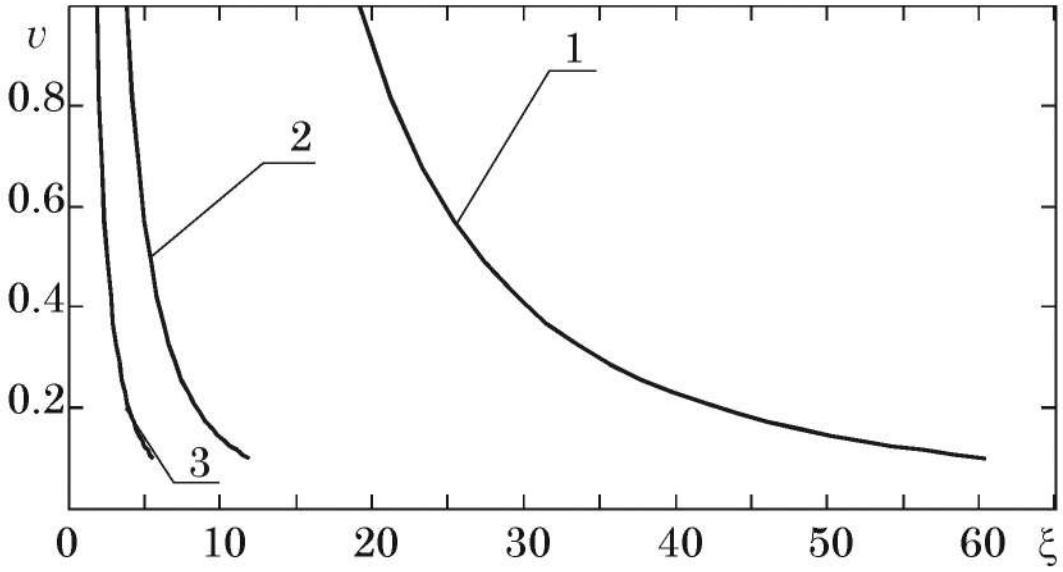


Рис. 11.11. Распределение безразмерной средней по площади поверхности поперечного сечения канала скорости жидкости при течении в соосном коничнском диффузоре, образованном конусами с общей вершиной. 1 – течение в канале с углом раскрытия конической щели, равным $\Delta\alpha = 3°$; 2 – $\Delta\alpha = 15°$; 3 – $\Delta\alpha = 30°$.

На рисунке 11.11 представлены зависимости изменения средней скорости вдоль течения от значения 1 на входе и до значения, при котором безразмерное давление в канале в случае преобладания инерционных сил достигает величины $0.99\Pi_{com}(\infty)$. Используя выражение (11.18) и (6.47), получим значение безразмерной скорости, при которой эта величина будет достигнута

$$\bar{v}_{\xi\infty i} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_{\infty i}}\right)^2 = \sqrt[2]{0.01} = 0.1. \qquad (11.44)$$

Соотношение (11.44) аналогично выражению (10.67), которое мы получили для ламинарного диффузорного течения в канале с линейно увеличивающейся шириной вдоль течения, образованном соосными коническими границами без общей вершины.

Заметим, что в случае преобладания сил трения в соответствии с (6.104) эта величина будет равна

$$\overline{\upsilon}_{\xi\infty fr} = \left(\frac{\xi_0}{\xi_{\infty fr}} \right)^2 = \sqrt[\frac{2}{3}]{0.01} = 0.046 . \qquad (11.45)$$

$\overline{\upsilon}_{\xi\infty fr} < \overline{\upsilon}_{\xi\infty i}$, поскольку, как мы видели ранее, безразмерное давление, близкое к Π_∞ в случае преобладания инерционных сил, достигается на меньшем расстоянии от входа, чем в случае преобладания диссипативных сил.

Итак, при увеличении $\Delta\alpha$ более интенсивное изменение средней скорости вдоль течения приведет к тому, что течение в сторону увеличения давления появится при меньших значениях чисел Рейнольдса (рис. 11.12), чем в случае малых $\Delta\alpha$. При меньших чис-

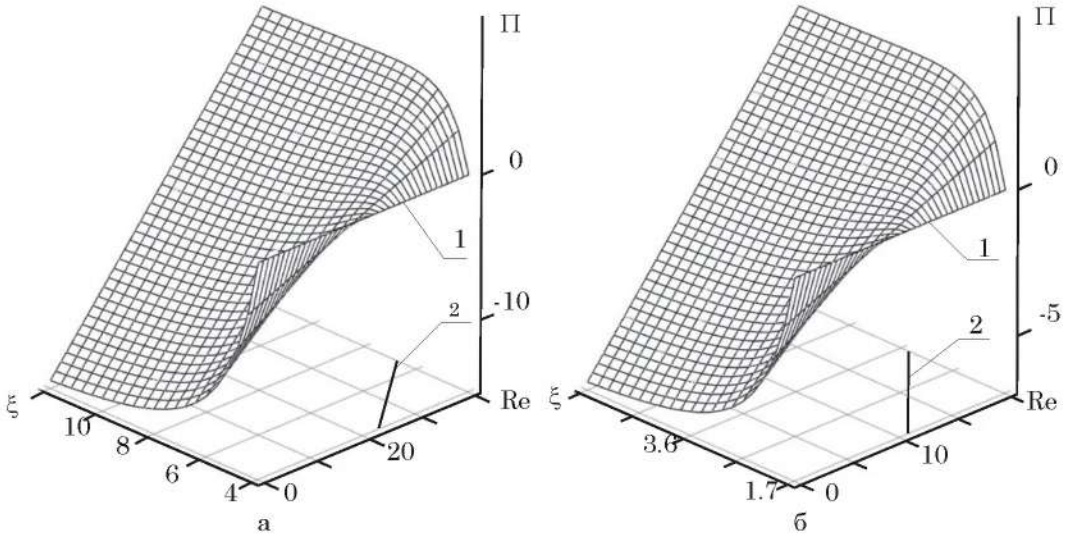


Рис. 11.12. Распределение безразмерного давления вдоль соосного конического диффузора, образованного круглыми конусами с общей вершиной и углом раскрытия конической щели: а – равным $\Delta\alpha = 15°$; б – $\Delta\alpha = 30°$, и для различных значений числа Рейнольдса – 1; 2 – линия локализации максимальных значений безразмерного давления.

лах Re также появится немонотонность в распределении $\Pi(\xi)$ (рис. 11.12).

Увеличивая угол раскрытия конической щели $\Delta\alpha$, мы увидим, что при всех значениях $\Delta\alpha > 10°$ для некоторых значений чисел Рейнольдса наблюдается значительное относительное отклонение между безразмерным давлением, рассчитанным по (11.4) и (11.5), а также между градиентами этих величин, в то время как относительное отклонение между указанными величинами, полученными без учета инерционных эффектов, практически отсутствует для тех же значений $\Delta\alpha$. Напомним, что $\Delta\alpha > 30°$, если это специально не указано, в настоящей монографии мы не рассматриваем. Например, при $\Delta\alpha = 15°$ и $\mathrm{Re} = 5$ отличие между (11.4) и (11.5) и их градиентами практически отсутствует (рис. 11.13).

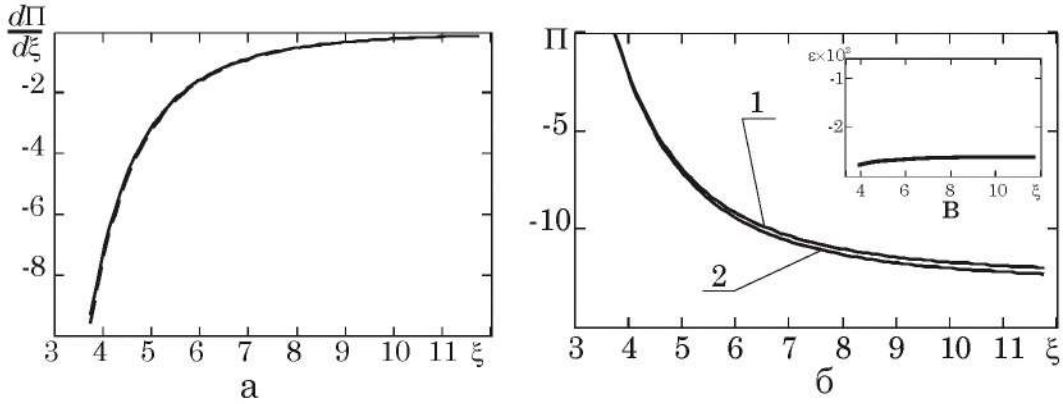


Рис. 11.13. Распределение безразмерных величин вдоль соосного конического диффузора, образованного границами с общей вершиной и полууглами раскрытия $\alpha = 25°$, $\alpha_1 = 10°$ при течении с $\mathrm{Re} = 5$. а – градиента давления, полученного в биконической системе координат – сплошная линия, пунктирная для распределения безразмерного градиента давления, полученного в сферической системе координат; б – безразмерного давления. 1 – распределение, полученное в биконической системе координат; 2 – в сферической; в – относительное отклонение зависимости 1 от зависимости 2.

При $\mathrm{Re} = 24$ уже имеется существенное различие между градиентами безразмерного давления, рассчитанными в биконических и сферических координатах (рис. 11.14). Это приводит и к появлению отклонения в распределении безразмерных давлений

(рис. 11.14). Это происходит в тех случаях, когда динамическая и диссипативная составляющие указанных величин становятся близки по абсолютной величине. Разности между этими величинами становятся незначительными и абсолютное отклонение между ними, которым в других случаях можно было бы пренебречь, здесь приводит к большим относительным отклонениям.

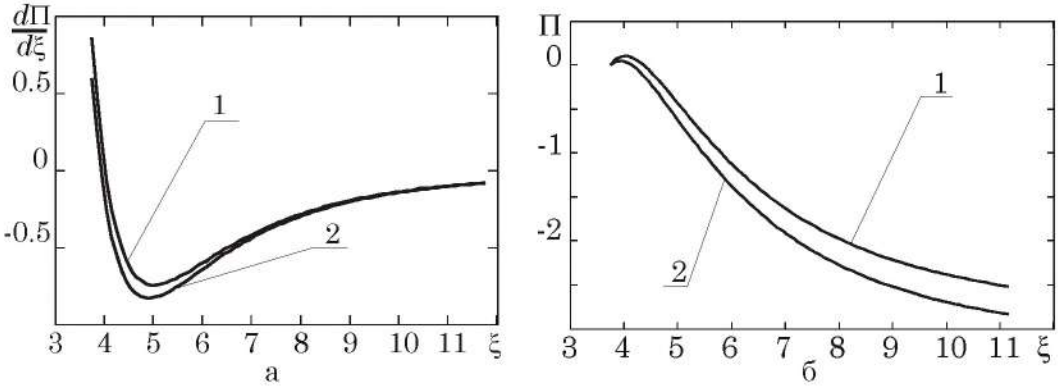


Рис. 11.14. Распределение безразмерных величин вдоль соосного конического диффузора, образованного границами с общей вершиной и полууглами раскрытия их границ $\alpha = 25°$, $\alpha_1 = 10°$ при течении с $\mathrm{Re} = 5$. а – градиента давления; б – безразмерного давления: 1 – полученного в биконических координатах; 2 – в сферических координатах.

Более того, при некоторых соотношениях угла раскрытия конической щели $\Delta\alpha$ и числа Re значения безразмерного давления, получаемые с помощью (11.4) и (11.5), относятся к различным режимам ламинарного течения в диффузоре в упомянутом выше смысле, т.е. значения, к которым стремится $\Pi(\xi)$ при $\xi \to \infty$ получаются с различным знаком, например, при $\Delta\alpha = 15°$ это происходит при $\mathrm{Re} = 30$ (рис. 11.15).

С помощью численных экспериментов с построенными моделями течения в соосных конических диффузорах, образованных конусами с общей вершиной, получаем набор пар значений $(\Delta\alpha,\ \mathrm{Re})$, для которых значения $\Pi(\infty)$, вычисленные с помощью (11.4) и (11.5), имеют разные знаки. Далее, обрабатывая полученные данные с помощью метода наименьших квадратов, находим нелинейную регрессионную зависимость

$$\mathrm{Re} = 7424 \exp\left[-3.2(\Delta\alpha)^{0.2}\right] \approx 1.14 \cdot 10^6 \exp\left[-8.04(\Delta\alpha)^{0.5}\right], \quad (11.46)$$

либо полиномиальную зависимость

$$\mathrm{Re} = 188.067 - 27.71\Delta\alpha + 1.857\Delta\alpha^2 - 0.5695 \cdot 10^{-1}\Delta\alpha^3 + \\ + 0.654 \cdot 10^{-3}\Delta\alpha^4, \quad (11.47)$$

представленные на рисунке 11.16. Среднеквадратичное отклонение представленных зависимостей от данных численного эксперимента не превышает 2 %.

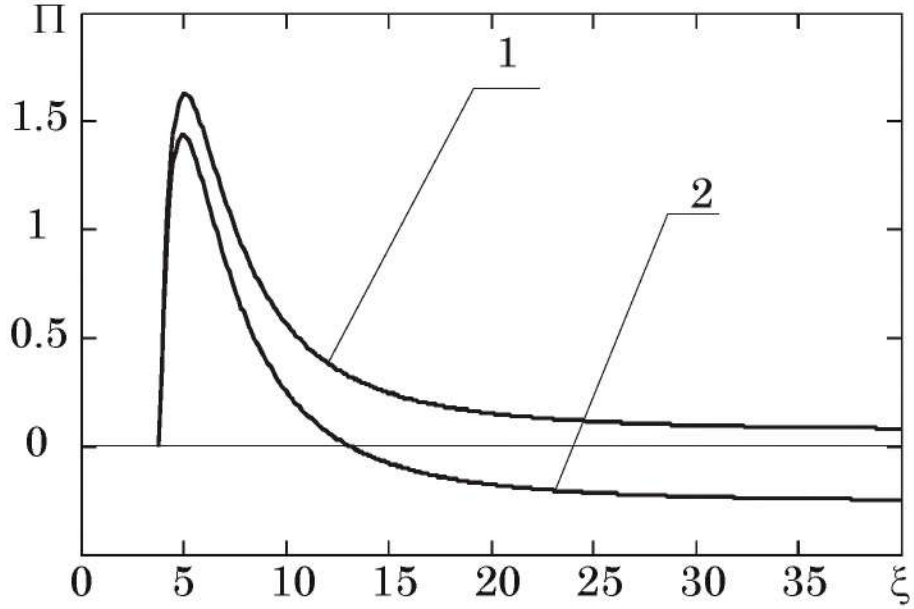


Рис. 11.15. Распределение безразмерного давления при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале, образованном конусами с общей вершиной и полууглами раскрытия $\alpha = 25°$, $\alpha_1 = 10°$ при $\mathrm{Re} = 30$. 1 – расчет при помощи решения, полученного в биконических координатах; 2 – в сферических.

Наибольшее отклонение между давлениями, рассчитанными по (11.4) и (11.5), может появиться при выполнении условия (11.46), и, поэтому, в этом случае необходимо с большой осторожностью использовать выражение (11.4) для вычисления перепада давления в достаточно длинных каналах.

Определим относительное отклонение между (11.4) и (11.5) как

$$\varepsilon_g(\xi) = \frac{\Pi_{com} - \Pi^S_{com}}{\Pi^S_{com}}, \tag{11.48}$$

и поскольку в разделе 6.9 мы видели, что в практически интересных диапазонах изменения параметров задачи при $\mathrm{Re} = 0$ относительным отклонением между безразмерным давлением, рассчитанном в биконических и сферических координатах, можно пренебречь, то с учетом инерционных сил это отклонение можно записать в виде

$$\varepsilon_g(\xi) = \frac{\left(\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3\xi_0^3} - 4\xi_0\right)\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right]}{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4\right] - \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3\xi_0^3}\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right]}. \tag{11.49}$$

Здесь мы, также как и при сравнении результатов в 6.9, пренебрегаем в различии масштабов скорости при определении чисел Рейнольдса в сферических и биконических координатах.

Зависимость на рисунке 11.16 определяет значения пар чисел $[\mathrm{Re},\ \Delta\alpha]$, вблизи которых могут находиться максимальные отклонения между (11.4) и (11.5).

Давайте, определим такие условия, выполнение которых гарантировало бы, что относительное отклонение не превысит некоторую заданную величину, например, 5 % от (11.5).

Поскольку значения Π и Π^S могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, мы должны для определения выбранного условия взять абсолютную величину относительного отклонения, т.е.

$$\left|\frac{\Pi_{com} - \Pi^S_{com}}{\Pi^S_{com}}\right| \le 0.05, \tag{11.50}$$

раскрывая которое с учетом (11.49) можно записать:

$$-0.05 \le \frac{\left(\frac{\lambda+6\xi_0^2}{3\xi_0^3}-4\xi_0\right)\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right]}{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^4\right]-\frac{\lambda+6\xi_0^2}{3\xi_0^3}\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^3\right]} \le 0.05. \qquad (11.51)$$

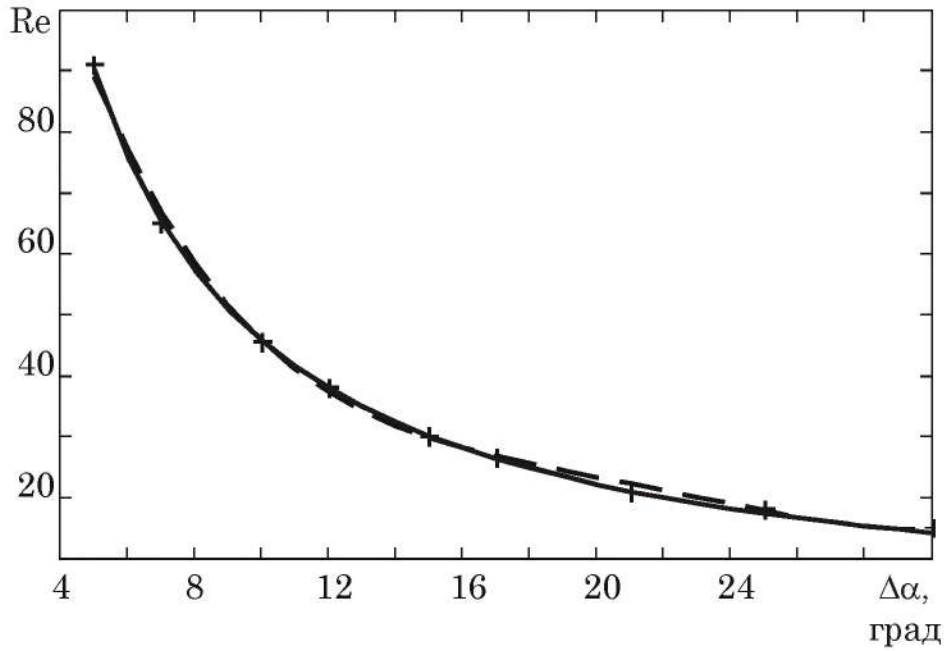


Рис. 11.16. Зависимость чисел Рейнольдса от угла раскрытия конической щели $\Delta\alpha$, для которых безразмерные давления, рассчитанные по зависимостям, полученным при решении задачи в биконических координатах и в сферических координатах стремятся к значениям с противоположными знаками для больших значений ξ. "+" – значения, полученные с помощью численных экспериментов; сплошная линия – зависимость (11.46), штриховая – зависимость (11.47).

Ранее мы уже убеждались при выполнении численных вычислений, что функция (11.48) является монотонной (рис. 11.5), поэтому свои наибольшее и наименьшее значения она может принимать только на границах интервала определения. Следовательно, для определения условий, которым должны удовлетворять величины Re и $\Delta\alpha$, необходимо вычислить (11.51) на границах интервала. Поскольку величину безразмерной координаты ξ_1 мы не можем

выразить через угол раскрытия Π_{dis} конической щели $\Delta\alpha$, мы заменим определение условия для Re на выходе из канала его определением при $\xi \to \infty$.

Выполняя предельный переход $\lim\limits_{\xi\to\infty} \varepsilon_g(\xi)$ в правом неравенстве (11.51), получим условие для чисел Рейнольдса, при котором оно вычисляется

$$\mathrm{Re} \geq 14\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^3} - 160\xi_0 . \qquad (11.52)$$

Выполняя предельный переход для левого неравенства, получим условие

$$\mathrm{Re} \geq 160\xi_0 - 12.6\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^3} . \qquad (11.53)$$

Интервал значений, которому должны принадлежать числа Re, является пересечением условий (11.52) и (11.53).

Вычислим условия, которым должны удовлетворять числа Рейнольдса для выполнения (11.51) на входе в канал. Прямая подстановка значения ξ_0 в (11.51) приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую раскроем с помощью правила Лопиталя. В результате для прямого неравенства получим условие

$$\mathrm{Re} \geq 10.5\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^3} - 120\xi_0 , \qquad (11.54)$$

и, соответственно, для левого неравенства (11.51)

$$\mathrm{Re} \geq 120\xi_0 - 9.5\frac{\lambda + 6\xi_0^2}{\xi_0^3} . \qquad (11.55)$$

Интервал значений, которому должны принадлежать числа Re на входе в канал является пересечением условий (11.54) и (11.55).

Для того, чтобы быть уверенным, что при использующемся числе Рейнольдса относительное отклонение, определенное в

(11.51), было меньше 5 %, необходимо, чтобы число Re было больше большего из двух значений, полученных в результате пересечения интервалов, а поскольку все интервалы определяются неравенствами одинакового характера, т.е. число Re в каждом из них должно быть больше некоторого значения, то мы можем сказать, что Re должно быть больше максимального значения из величин (11.52)–(11.55), т.е.

$$\mathrm{Re} \geq \max\left(14\frac{\lambda+6\xi_0^2}{\xi_0^3}-160\xi_0, 160\xi_0-12.6\frac{\lambda+6\xi_0^2}{\xi_0^3}, 10.5\frac{\lambda+6\xi_0^2}{\xi_0^3}-120\xi_0,\right. \tag{11.56}$$

$$\left. 120\xi_0-9.5\frac{\lambda+6\xi_0^2}{\xi_0^3}\right).$$

Если воспользоваться соотношением (6.111), то (11.56) примет более простой вид

$$\mathrm{Re} \geq 8\xi_0 = 8\,\mathrm{ctg}\left(\alpha-\alpha_1\right). \tag{11.57}$$

Последнее выражение имеет приближенный характер, пригодный для выполнения оценок.

Отметим также, что увеличение числа Рейнольдса ведет к течениям с преобладающими инерционными силами. Диссипативный член в выражениях (11.4) и (11.5) и их производных становится мал по сравнению с инерционным, а вид последнего инвариантен к рассматриваемым системам координат, и поэтому относительное отклонение между безразмерными давлениями и их градиентами, вычисленными в различных системах координат при дальнейшем увеличении Re, будет уменьшаться (рис. 11.17).

Поскольку выражение (11.4) не зависит от α, а является функцией независимых аргументов Re, $\Delta\alpha$ и ξ, мы достаточно просто можем построить безразмерную расходно-напорную характеристику канала с постоянной длиной образующей конической части. В соответствии с (6.90) $\xi_0 = \mathrm{ctg}\,\Delta\alpha$, далее полагая $\xi_1 = \xi_0 + \Delta\xi$ и считая $\Delta\xi = \mathrm{const}$, построим функции $\Pi\left(\Delta\alpha,\ \mathrm{Re}\right)$ (рис. 11.18).

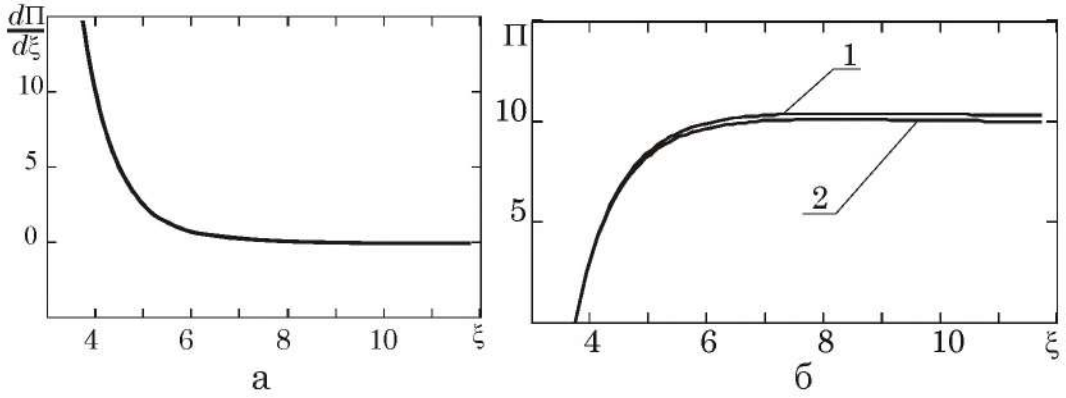


Рис. 11.17. Распределение безразмерного давления при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале, образованном конусами с общей вершиной и полууглами раскрытия $\alpha = 25°$, $\alpha_1 = 10°$ при $Re = 50$. 1 – расчет при помощи решения, полученного в биконических координатах; 2 – в сферических.

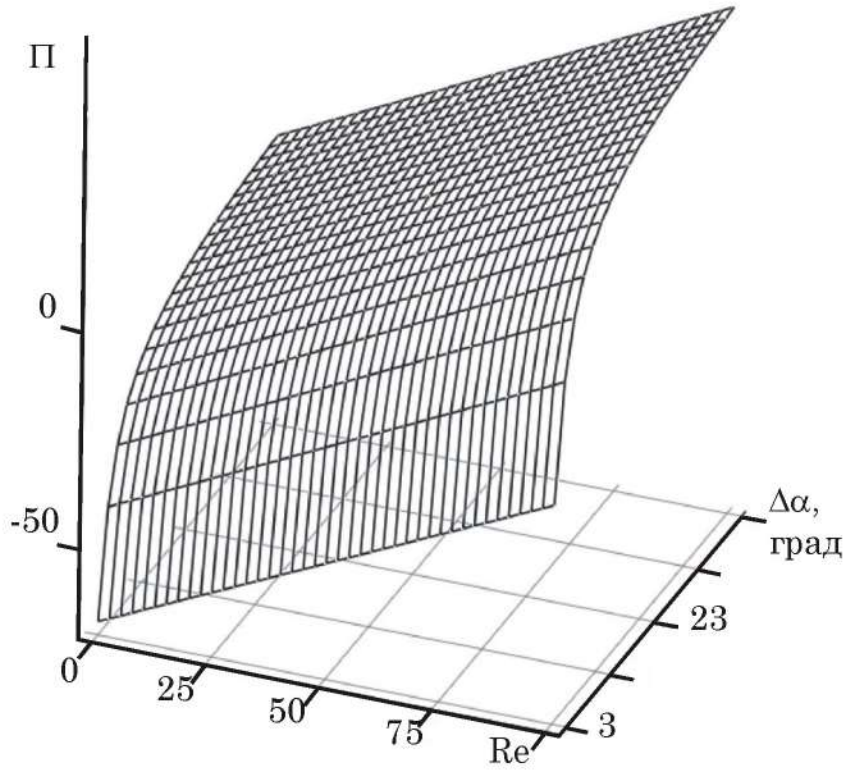


Рис. 11.18. Зависимость безразмерного давления на выходе из соосного конического диффузора с постоянной безразмерной длиной образующих конических поверхностей $\Delta\xi = \xi_1 - \xi_0 = 20$ от числа Рейнольдса Re и угла раскрытия конической щели $\Delta\alpha$.

11.7 Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ, полученная в биконических координатах

Новая теория позволила сформулировать идеи, допускающие экспериментальную проверку.

П. Девис

Используя решение, полученное для задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с учетом характерной для диффузорных течений инерционной силы в биконической системе координат (11.4), построим расходно-напорную характеристику таких каналов при ламинарных течениях. Учитывая безразмерные параметры (10.9) и следуя правилу, представленному в (2.78), получим расходно-напорную характеристику для соосного конического диффузора с общей вершиной границ и определенного параметрами: шириной канала на входе – h_0, полууглами раскрытия внешней и внутренней границ – α и α_1, радиальной координатой выхода из канала – R_1. Непосредственно из (11.4) имеем

$$\Delta P(Q)=\frac{-4\mu Q}{\pi h_0^3\sin(\alpha)\left[2\operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)-\operatorname{ctg}\alpha\right]}\left[1-\frac{h_0^3\operatorname{ctg}^3(\alpha-\alpha_1)}{R_1^3}\right]+$$

$$+\frac{\rho Q^2}{2\pi^2 h_0^4\sin^2(\alpha)\left[2\operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)-\operatorname{ctg}\alpha\right]}\left[1-\frac{h_0^4\operatorname{ctg}^4(\alpha-\alpha_1)}{R_1^4}\right]. \qquad (11.58)$$

В разделах 11.1–11.6 данной главы мы с помощью полученного в безразмерном виде решения проанализировали наиболее общие свойства ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ. Сейчас мы кратко рассмотрим зависимость перепада давления в конкретном канале с заданными размерами и для конкретных физических свойств жидкости. Пусть канал определяется следующими геометрическими параметрами: $h_0 = 0.01$ м, $\alpha - \alpha_1 = 21°$, и будем считать, что координата выхода из канала больше координаты входа в три раза, т.е. выполняется отношение $\dfrac{R_1}{h_0\operatorname{ctg}(\alpha-\alpha_1)}=3$.

Для однозначного определения геометрии канала нам необходимо задать еще значение одного из полууглов раскрытия границ. Чтобы не ограничивать себя каким-нибудь одним значением перепада давления, мы построим зависимость $\Delta P(Q,\alpha)$, т.е. расходно-напорную характеристику при изменении значения полуугла раскрытия внешней границы при остальных заданных геометрических характеристиках. Физические свойства жидкости будем считать равными: $\rho = 1200$ кг/м^3, $\mu = 10$ Па·с. Предположим, что объемный расход жидкости изменяется в интервале $0\ldots1\times10^{-2}$ м^3/с.

В пределах изменения расхода жидкости расходно-напорная характеристика (11.58) не для всех значений полуугла раскрытия α является монотонной функцией (рис. 11.19). Видно, что при значе-

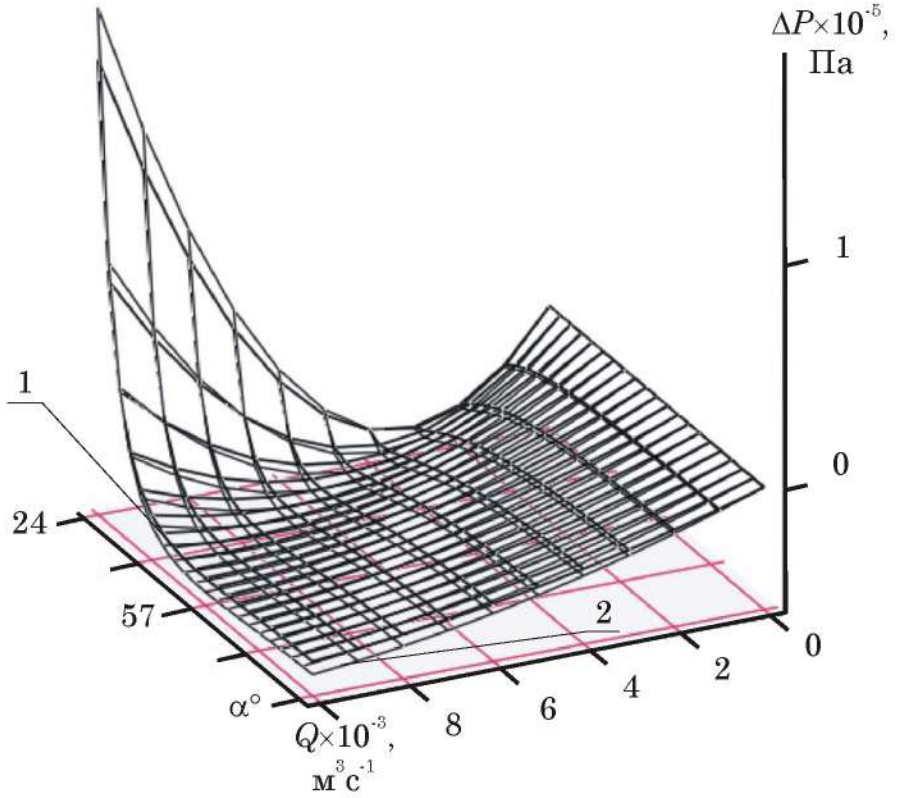


Рис. 11.19. Расходно-напорная характеристика соосного конического диффузора с общей вершиной границ при ламинарном течении в зависимости от α. Угол раскрытия конической щели канала равен $\Delta\alpha = 21°$, $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала – $h_0 = 0.01$ м. 1 – зависимость , полученная в биконических координатах (11.58); 2 – зависимость, полученная в сферических координатах (8.109).

ниях α, находящихся в интервале [24°, 57°], функция $\Delta P(Q)$ немонотонная. Это происходит вследствие того, что при малых расходах, а значит и малых значениях числа Re, инерционные свойства течения пренебрежимо малы, и с увеличением расхода Q перепад давления увеличивается за счет трения на границах.

При дальнейшем увеличении объемного расхода жидкости достигается значение Q, начиная с которого становится преобладающей характерная инерционная сила, и давление вдоль течения начинает восстанавливаться. В итоге течение в канале может происходить в сторону увеличения давления. Прежде всего, это явление будет наблюдаться в области больших углов раскрытия конической щели, при которых наиболее существенно изменение средней по площади поверхности поперечного сечения скорости жидкости.

А в целом зависимость (11.58) качественно полностью соответствует зависимости (8.109) (рис. 11.19), и анализ расходно-напорной характеристики, выполненный нами в разделе 8.12, вполне корректен и для характеристики (11.58).

На большей части области определения относительное отклонение между характеристиками (11.58) и (8.109) находится в пределах 10 – 15 % (рис. 11.20), и только в очень незначительной части области определения указанных функций относительное отклонение между ними меньше 5 %. Для этих значений выполняется

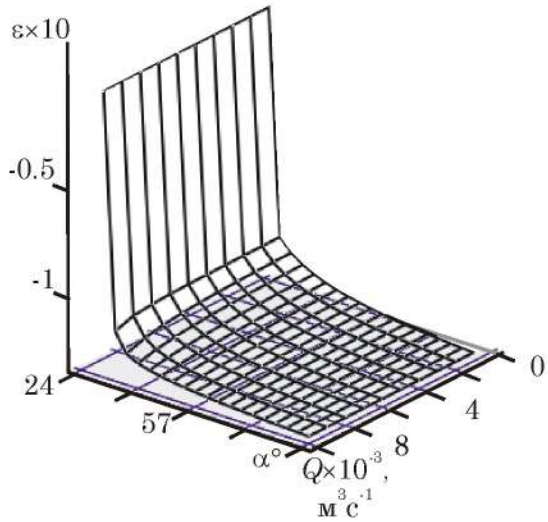


Рис. 11.20. Относительное отклонение расходно-напорной зависимости ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале, полученной в биконических координатах (11.57), от зависимости, полученной в сферических координатах (8.109). Угол раскрытия конической щели канала равен $\Delta\alpha = 21°$, отношение радиальной координаты выхода из канала к координате входа $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала – $h_0 = 0.01$ м.

условие (11.57), т.е. $\mathrm{Re} \geq 8\cot(\alpha - \alpha_1) \approx 20.8$ (рис. 11.21).

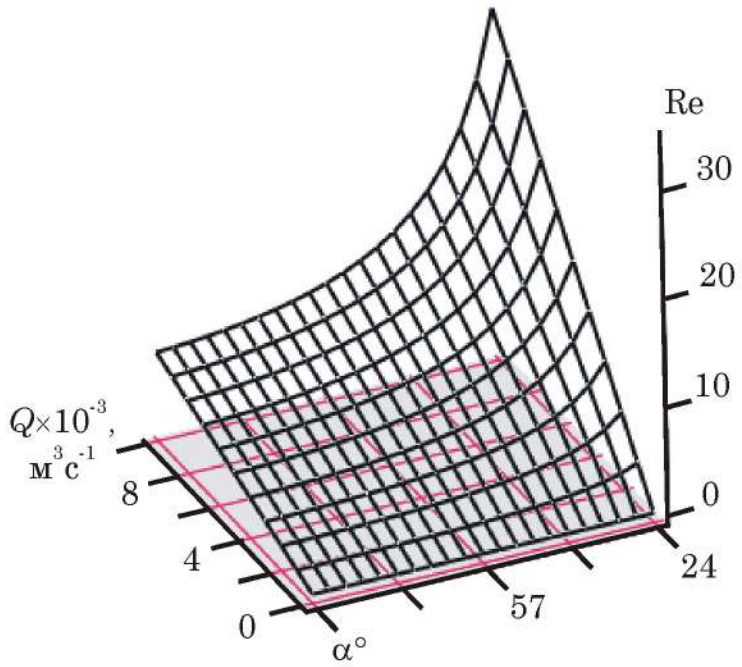


Рис. 11.21. Зависимость числа Рейнольдса (10.9) при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале в зависимости от полуугла раскрытия внешней границы α. Угол раскрытия конической щели канала равен $\Delta\alpha = 21°$, отношение радиальной координаты выхода из канала к координате входа $R_1/R_0 = 3$ при ширине канала – $h_0 = 0.01$ м.

ГЛАВА 12

АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО КОНФУЗОРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ

Божья воля есть неограниченное исследование, исследование есть служение Богу и одновременно – оно посягает на тайну божественных свершений, и поэтому не должно снимать все покровы.

К. Ясперс

12.1. Замечание о предыдущих работах, посвященных анализу ламинарного течения в соосных конических конфузорах переменной ширины и учетом инерционных свойств

Выхожу один я на дорогу

М.Ю. Лермонтов

В главах 4 и 10 мы уже отмечали, что публикаций, посвященных исследованию ламинарного течения в соосных конических каналах крайне мало, это же относится и к работам, рассматривающим течение с учетом инерционных свойств. А если ограничиться каналами переменной ширины, то к ранним работам в этом направлении можно отнести только публикации [111, 125, 126], анализ которых мы дали в предыдущих главах.

А к работам, в которых непосредственно изучалось ламинарное конфузорное течение с учетом инерционных свойств в соосных конических каналах переменной ширины вдоль течения, можно отнести только публикацию [42]. В работе [42] автор данной монографии исследовал ламинарные течения в соосных конических конфузорах с переменной вдоль течения шириной с учетом инерционных

свойств на основе уравнений Озеена, записанных в биконической системе координат. Дальнейшее изложение материала в настоящей главе является естественным углублением и развитием результатов работы [42]. Мы решим задачу ламинарного течения и определим влияние инерционных свойств течения на перепад давления в соосном коническом конфузоре с линейно изменяющейся вдоль течения шириной канала, образованного поверхностями, не имеющими общей вершины, и определим пределы применяемости решений, полученных ранее без учета инерционных сил.

12.2. Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале переменой ширины и с частичным учетом инерционных свойств

Мы хотели бы ввести во все науки тонкость и точность математики, насколько возможно, не из уверенности, что этим путем мы лучше узнаем вещи, а для того, чтобы твердо установить наше человеческое отношение к вещам. Математика только средство для общего и конечного человеческого знания

Ф. Ницше

Так же, как при течении жидкости в соосных конических диффузорах переменной ширины, которые мы рассматривали в предыдущих двух главах, и для конфузорных ламинарных течений, практически всегда будет отлична от нуля инерционная сила, действующая на жидкость. Это происходит вследствие того, что вдоль канала средняя скорость течения жидкости изменяется. При конфузорном течении средняя скорость жидкости увеличивается вследствие уменьшения площади поверхности поперечного сечения канала. Инерционную силу, возникающую вследствие изменения средней по площади поперечного сечения соосного конического конфузора, будем называть характерной инерционной силой, появляющейся при ламинарном течении жидкости в соосном коническом конфузоре.

В настоящем разделе данной главы мы дадим математическую формулировку задачи ламинарного течения вязкой несжима-

емой жидкости в соосном коническом конфузоре переменной ширины и с учетом инерционных свойств течения.

Геометрия соосного конического диффузора переменной ширины представлена в главе 7 на рисунке 7.1. Там же мы исследовали ползущее течение в соосных конических конфузорах переменной ширины с помощью уравнений движения, записанных в биконической системе координат. Применим эту же систему координат для описания ламинарного течения в соосных конфузорах переменной вдоль течения ширины. В разделе 1.6 мы получили уравнения стационарного ламинарного конфузорного течения ньютоновской жидкости в биконической системе координат (1.67)–(1.72). Запишем их еще раз применительно к случаю, т.е. для переменной ширины канала:

$$\rho V\frac{\partial V}{\partial T}=-\frac{\partial P}{\partial T}+\frac{\mu}{\Omega'}\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left(\Omega'\frac{\partial V}{\partial \mathrm{X}}\right); \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\Omega' V\right)=0, \tag{12.2}$$

где координата T определяется соотношением (1.66), а Ω' определяется выражением (1.69).

Условиями однозначности для определения распределения скорости жидкости, текущей в канале, будут условия прилипания на границах канала:

$$V=0,\ \mathrm{X}=0; \tag{12.3}$$

$$V=0,\ \mathrm{X}=h(T), \tag{12.4}$$

где $h(T)$ – функция, определяющая изменение ширины канала вдоль течения.

Поскольку, как отмечалось в главе 1, в большинстве технических приложений границами соосных конических поверхностей являются круговые конусы с прямолинейными образующими, то в качестве функции $h(T)$ в дальнейшем будем использовать, если это не будет специально оговорено, линейную функцию (7.5)

$$h(T) = h_0 + bT, \tag{12.5}$$

показывающую зависимость расстояния по оси X от внешней конической поверхности до внутренней поверхности (рис. 7.1). В том случае, когда конические границы канала раскрываются в одну сторону (см. рис. 1.3), параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ канала (рис. 7.1), т.е.

$$b = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1), \tag{12.6}$$

и, следовательно, из геометрических соображений он должен удовлетворять условию

$$\frac{1}{\xi_0 - \xi_1} < b \le \frac{\xi_0 \operatorname{tg}\alpha - 1}{\xi_1 - \xi_0}. \tag{12.7}$$

Если конические границы канала раскрываются навстречу друг другу (рис. 6.45), то параметр b определяется тангенсом суммы полууглов раскрытия поверхностей (6.114).

Для давления условием однозначности будет заданная величина давления на входе в канал

$$P = P_0, \quad T = 0. \tag{12.8}$$

Обоснование такого выбора начального условия мы сделали в главе 6 (см. также гл. 1 (1.65)).

Заметим, что граничные условия, аналогичные условию (12.4), многие авторы рекомендуют использовать при решении задач ламинарного течения высоковязких жидкостей в каналах с переменной площадью поверхности поперечного сечения вдоль канала (см. например [100]).

При формулировке данной задачи мы уже использовали закон сохранения вещества, записанный в дифференциальной форме уравнения неразрывности (12.2), но в дальнейшем, при решении поставленной задачи, будем применять интегральную запись данного закона, т.е. условие постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала, которое мы сформулировали в главе 7 (7.7), и для удобства читателя приводим его еще раз

$$2\pi \int_0^{h_0+bT} (R\sin\alpha - X\cos\alpha)VdX = Q, \qquad (12.9)$$

где Q – объемный расход жидкости, м^3/с. Краткое обоснование такого подхода было сделано в разделе 4.2.

Для того, чтобы получить наиболее общие характеристики течения жидкости в рассматриваемых каналах, независящие от конкретных свойств жидкости или размеров канала, запишем уравнения, описывающие ламинарное течение (12.1)–(12.9) в безразмерных координатах. Используем для этого безразмерные переменные и параметры, следующие непосредственно из указанных уравнений, и которыми мы уже пользовались в главе 7 (7.13), но с дополнительным безразмерным критерием – числом Рейнольдса:

$$t = \xi_1 - \xi;\ \xi = \frac{R}{h_0};\chi = \frac{X}{h_0};\ \upsilon = \frac{V}{V_0};\ \Pi = \frac{(P-P_0)h_0}{\mu V_0};\mathrm{Re} = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}, \qquad (12.10)$$

где Re – число Рейнольдса, V_0 – скорость средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной поверхностью, определенная выражением (7.11), h_0 – ширина канала на его входе (см. рис. 7.1).

Изменение безразмерной ширины канала вдоль безразмерной продольной координаты t определится той же самой формулой, которую мы использовали в главе 7, т.е.

$$\tilde{h}(\xi) = 1 + bt. \qquad (12.11)$$

Далее, используя безразмерные переменные (10.9), запишем уравнения (12.1), (12.9) в безразмерном виде:

$$\mathrm{Re}\,\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t} = -\frac{\partial\Pi}{\partial t} + \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sigma'\frac{\partial\upsilon}{\partial\chi}\right); \qquad (12.12)$$

$$\int_0^{1+bt} \left[(\xi_1 - t)\sin\alpha - \chi\cos\alpha\right]\upsilon d\chi = \frac{1}{2}(2\xi_1\sin\alpha - \cos\alpha), \qquad (12.13)$$

где σ' определяется выражением (5.7).

Граничные условия (12.3), (12.4) и начальное условие (12.8) в безразмерных переменных примут вид:

$$\upsilon = 0,\ \chi = 0; \tag{12.14}$$

$$\upsilon = 0,\ \chi = 1 + bt; \tag{12.15}$$

$$\Pi = 0,\ t = 0. \tag{12.16}$$

Таким образом, математическая формулировка задачи ламинарного течения при малых и умеренных числах Рейнольдса в соосном коническом диффузоре переменной ширины в безразмерной постановке определяется системой уравнений (12.12)–(12.16).

12.3. Решение задачи ламинарного течения жидкости в соосном коническом конфузоре переменной ширины при частичном учете инерционных свойств в биконической системе координат

– вы мне уж прежде все это говорили, я все наизусть знаю.

Ф.М. Достоевский

В работах [28, 32] автором данной монографии показано, что при выполнении условия

$$\xi \gg 2.22\mathrm{ctg}\alpha, \tag{12.17}$$

которое выполняется для большинства практических приложений [6, 7], [56–61], [110], [113], [123], влиянием различия в кривизне граничных поверхностей в уравнении движения , записанных в биконических координатах, можно пренебречь. В настоящей монографии это условие будет также обсуждаться и для каналов с переменной шириной вдоль течения в разделе 6 главы 21, а в данном разделе мы используем его для упрощения выражения (5.7), определяющего σ'. С помощью (12.17) выражение (5.7) может быть записано в виде

$$\sigma' = \xi \sin\alpha. \tag{12.18}$$

Уравнение движения (12.12) при подстановке в него выражения (12.18) примет вид

$$\mathrm{Re}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\chi^2}. \qquad (12.19)$$

В левой части уравнения (10.18) записано выражение, определяющее распределение действующей на жидкость инерционной силы по поперечному сечению канала. Учет такого распределения важен для решения задачи ламинарного течения в пределах начального гидродинамического участка [132].

Из работ Н.А. Слезкина и С.М. Тарга [111, 132] следует, что при течении с малыми и умеренными числами Рейнольдса начальный гидродинамический участок представляет величину порядка ширины канала. Поэтому в данной главе мы будем рассматривать развитые течения, а это позволяет сделать предположение, которое подтвердится в главах 19 и 20, что основной вклад в инерционный член (12.19) будет давать инерционная сила, возникающая вследствие изменения средней скорости жидкости вдоль течения, т.е. мы можем записать

$$\mathrm{Re}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\approx\mathrm{Re}\bar{\upsilon}\frac{d\bar{\upsilon}}{dt}, \qquad (12.20)$$

этот же результат можно получить, рассматривая одномерный баланс сил вдоль течения на элементарном участке канала, либо упрощая уравнение движения, записанное в форме Озеена [42]. Подставляя (12.20) в (12.19), получаем

$$\mathrm{Re}\bar{\upsilon}\frac{d\bar{\upsilon}}{dt}=-\frac{d\Pi}{dt}+\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\chi^2}, \qquad (12.21)$$

т.е. мы получили упрощенное уравнение конфузорного ламинарного течения жидкости в соосном коническом канале переменной ширины, и его запись полностью совпадает с аналогичным уравнением, которое мы решили в главе 9 для конфузорного течения в канале постоянной ширины.

Прежде чем приступить к решению уравнения (12.21), заметим, что для соосного конического канала, в котором здесь рассмат-

ривается течение, распределение площади поверхности поперечного сечения канала координатной поверхностью выражается соотношением (7.9) и соответственно средняя скорость течения выражением (7.12). Безразмерная средняя скорость определяется формулой (7.21), а относительная безразмерная площадь поверхности поперечного сечения – выражением (7.20).

Дифференцируя (7.21) и вычисляя произведение в левой части (12.21), получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}+\mathrm{Re}\left\{-\frac{b\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(\tilde{h}(t)\right)^3\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-\tilde{h}(t)\cos\alpha\right]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2\left(2\sin\alpha+b\cos\alpha\right)}{\left(\tilde{h}(t)\right)^2\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-\tilde{h}(t)\cos\alpha\right]^3}\right\}=\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \tag{12.22}$$

Левая часть (12.22) не зависит от χ, и тогда, обозначая ее через $B(t)$, перепишем (12.22) в виде

$$B(t)=\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \tag{12.23}$$

Интегрируя (12.23) с граничными условиями (12.14) и (12.15) будем иметь

$$v=\frac{1}{2}B(t)\left[\chi^2-(1+bt)\chi\right]. \tag{12.24}$$

Для определения зависимости $B(t)$ подставим (12.24) в (12.13) и, проинтегрировав полученное выражение, найдем, что

$$B(t)=\frac{12\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)}{(1+bt)^4\cos\alpha-2(1+bt)^3\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha}. \tag{12.25}$$

Подставляя (12.25) в (12.23) и (12.22), находим выражение, определяющее распределение безразмерного градиента давления вдоль канала

$$\frac{d\Pi}{dt}=\frac{12\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)}{\left(1+bt\right)^4\cos\alpha-2\left(1+bt\right)^3\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha}+$$

$$+\mathrm{Re}\left\{\frac{b\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(1+bt\right)^3\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-\left(1+bt\right)\cos\alpha\right]^2}-\right. \qquad (12.26)$$

$$\left.-\frac{\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2\left(2\sin\alpha+b\cos\alpha\right)}{\left(1+bt\right)^2\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-\left(1+bt\right)\cos\alpha\right]^3}\right\}.$$

Мы видим, что выражение, определяющее безразмерный градиент давления, состоит из суммы двух членов. Первый из них определяется трением на границах канала, т.е. характеризует диссипативную компоненту безразмерного градиента давления. Очевидно, что этот член совпадает с выражением (7.29), которое определяет безразмерный градиент давления при ползущем конфузорном течении в соосном коническом канале переменной ширины. Второй член суммы определяется характерной для конфузорного течения инерционной силой и представляет динамическую компоненту безразмерного градиента давления.

Принимая во внимание соотношение (7.21), выражение для определения безразмерного градиента давления (12.26) можно записать в виде

$$\frac{d\Pi}{dt}=-\frac{12}{\left(h(t)\right)^2}\overline{v}+\mathrm{Re}\,\overline{v}^2\left[\frac{b}{h(t)}-\frac{2\sin\alpha+b\cos\alpha}{2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-h(t)\cos\alpha}\right]. \qquad (12.27)$$

Для выяснения явного вида зависимости безразмерного давления от продольной координаты проинтегрируем (12.26) вдоль t с учетом (12.16). Мы можем проинтегрировать одновременно всю сумму (12.26) и затем определить постоянную интегрирования с помощью (12.16), но интеграл от первого члена в сумме (12.26) определяет распределение безразмерного давления в соосном коническом конфузоре при Re = 0, т.е. без учета инерционных сил, а этот

интеграл мы вычислили в главе 7 (7.37). Обозначая его через $\Pi_{dis}(t)$, запишем

$$\Pi_{dis}(t)=\frac{3(2\xi_1-\mathrm{ctg}\alpha)}{(1+b\xi_1)}\left\{\frac{(2+b\mathrm{ctg}\alpha)^2}{2(1+b\xi_1)^2}\ln\frac{2(\xi_1-t)-(1+bt)\mathrm{ctg}\alpha}{(1+bt)(2\xi_1-\mathrm{ctg}\alpha)}-\right.$$

$$\left.-\frac{bt}{1+bt}\left(\frac{2+bt}{1+bt}+\frac{2+b\mathrm{ctg}\alpha}{1+b\xi_1}\right)\right\}. \tag{12.28}$$

Интеграл от второго члена суммы (12.26) представляет распределение динамической составляющей безразмерного давления в соосном коническом конфузоре, идентифицируем его, как $\Pi_{din}(t)$, т.е. распределение безразмерного давления в канале определится выражением

$$\Pi(t)=\Pi_{dis}(t)+\Pi_{din}(t). \tag{12.29}$$

В главе 7 мы для $\Pi_{dis}(t)$ определили начальное условие (7.18), т.е. $\Pi_{dis}(0)=0$, и тогда из условия (12.16) и определения (12.29) следует начальное условие для однозначного нахождения динамической составляющей безразмерного давления

$$\Pi_{din}(t)=0,\quad t=0. \tag{12.30}$$

Для определения интеграла от второго члена суммы (12.26), т.е. $\Pi_{din}(t)$, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} d&=2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha;\\ a&=2\sin\alpha+b\cos\alpha;\\ c&=2(b\xi_1+1)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{12.331}$$

и сделаем замену переменной $z=1+bt$. В результате запишем

$$\Pi_{din}=\mathrm{Re}\left[bd^2\int_1^{1+bt}\frac{dz}{z^3(c-az)^2}-ad^2\int_1^{1+bt}\frac{dz}{z^2(c-az)^3}\right]= \tag{12.32}$$

$$= \mathrm{Re}\frac{b^2d^2}{a^2}\int_1^{1+bt}\frac{\dfrac{c}{a}-2z}{z^3\left(\dfrac{c}{a}-z\right)^3}dz = \left.\frac{1}{2(1+bt)^2\left(1+bt-\dfrac{c}{a}\right)^2}\right|_0^t.$$

Выполняя подстановку пределов интегрирования и возвращаясь к первоначальным переменным, окончательно получаем

$$\Pi_{din} = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+bt)\left[2(\xi_1-t)-(1+bt)\mathrm{ctg}\,\alpha\right]}\right]^2\right\}. \qquad (12.33)$$

Принимая во внимание (7.21), перепишем выражение (12.33) в виде

$$\Pi_{din}(t) = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\overline{v}(t)\right]^2\right\}, \qquad (12.34)$$

или в соответствии с (7.21) запишем

$$\Pi_{din}(t) = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{\left[\overline{v}(0)\right]^2-\left[\overline{v}(t)\right]^2\right\}. \qquad (12.35)$$

Подставляя (12.25) в (12.24), получаем распределение скорости в канале, которое, очевидно, должно совпадать с распределением (7.31), но для удобства читателя мы приведем его еще раз

$$v = \frac{6(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha)\left[\chi^2-(1+bt)\chi\right]}{(1+bt)^4\cos\alpha-2(1+bt)^3(\xi_1-t)\sin\alpha}. \qquad (12.36)$$

Если мы в выражениях (12.26), (12.29) и (12.36) положим b = 0, то получим решение задачи ламинарного конфузорного течения с частичным учетом инерционных сил в соосном коническом канале постоянной ширины, которая была рассмотрена в девятой главе.

Если же в (12.26), (12.29) положить Re = 0, то мы получим выражения, определяющие распределения безразмерного давления и его градиента при медленном конфузорном течении в соосном ко-

ническом канале с линейно меняющейся шириной, исследованных в седьмой главе.

Если же в найденном нами здесь решении положить и Re = 0 и $b = 0$, то мы получим распределение безразмерного давления и его градиента в случае медленного конфузорного течения между эквидистантными коническими поверхностями, которое рассмотрено в главе 5.

Но если мы положим $\alpha = 90°$, то получим случай течения, который в данной монографии еще не рассматривался. Мы получим распределение безразмерного давления и его градиента при ламинарном сходящемся течении ньютоновской жидкости между плоскостью и конусом с вершиной, нележащей на плоскости, и осью, перпендикулярной к ней (рис. 6.3):

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\xi_1}{(1+bt)^3 \xi}\left[-12 + \mathrm{Re}\frac{\left[b(\xi_1 - t) - 1\right]\xi_1}{(\xi_1 - t)^2}\right]; \tag{12.37}$$

$$\Pi = \frac{6\xi_1}{1+b\xi_1}\left\{\frac{1}{(1+b\xi_1)^2}\ln\frac{\xi_1 - t}{(1+bt)\xi_1} - \frac{bt}{1+bt}\left(\frac{2+bt}{1+bt} + \frac{2}{1+b\xi_1}\right)\right\} + \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \frac{\xi_1^2}{(1+bt)^2(\xi_1 - t)^2}\right]; \tag{12.38}$$

$$v = \frac{6\xi_1\left[(1+bt)\chi - \chi^2\right]}{(1+bt)^3(\xi_1 - t)}; \tag{12.39}$$

$$\overline{v} = \frac{\xi_1}{(1+bt)(\xi_1 - t)}. \tag{12.40}$$

Очевидно, что если в (12.38) положить Re = 0, то мы получим выражение (7.38), описывающее распределение безразмерного давления при ползущем сходящемся течении между плоскостью и круглой конической поверхностью, расположенной над плоскостью, и с вершиной, нележащей на плоскости, и с осью, перпендикулярной к последней.

12.4. Особенности влияния инерционных свойств течения на распределение безразмерного давления при конфузорном ламинарном течении в соосном коническом канале переменной ширины

Тут придется сильно напрягать внимание, пока заставишь перед собою выступить все тонкие, почти невидимые черты, и вообще далеко придется углублять уже изощренный в науке выпытывания взгляд.

Н.В. Гоголь

Определяющими параметрами задачи (12.12)–(12.16) являются: значения числа Re; координаты входа в конфузор – ξ_1, полуугла раскрытия внешней конической поверхности – α и величины b, которая определяется значением полуугла раскрытия внутренней конической поверхности – α_1 при заданном значении α_1 (рис.7.1).

Рассмотрим влияние этих параметров на распределение безразмерных значений скорости, давления и его градиента при конфузорном течении в соосном коническом канале, и определим его особенности. Сначала выберем параметры, определяющие течение, равными $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$, Re = 5, для которых рассмотрим каналы с двумя различными полууглами раскрытия внутренней конической поверхности $\alpha_1 = 32°$ и $\alpha_2 = 29°$, что соответствует двум значениям b: $b_1 = 0.035$ и $b_2 = -0.017$. Безразмерную координату выхода из канала примем равной $\xi_0 = 10$, что соответствует предположению о пренебрежимо малом влиянии на течение различия в кривизне поверхностей, ограничивающих канал, т.е. в пределах канала выполняется условие (12.17).

Изменение безразмерной ширины канала и безразмерной площади поперечного сечения канала вдоль течения для указанных параметров представлены на рисунке 12.1. Видно, что для всех рассматриваемых в данном случае изменений ширины канала вдоль течения, т.е. при ее уменьшении для $b < 0$, постоянной ширины для $b = 0$ и увеличивающейся ширины для $b > 0$, площадь поперечного сечения канала уменьшается вдоль t (рис. 12.1). Следова-

тельно, средняя скорость жидкости будет увеличиваться вдоль течения при всех рассматриваемых сейчас значениях параметра b (рис. 12.2).

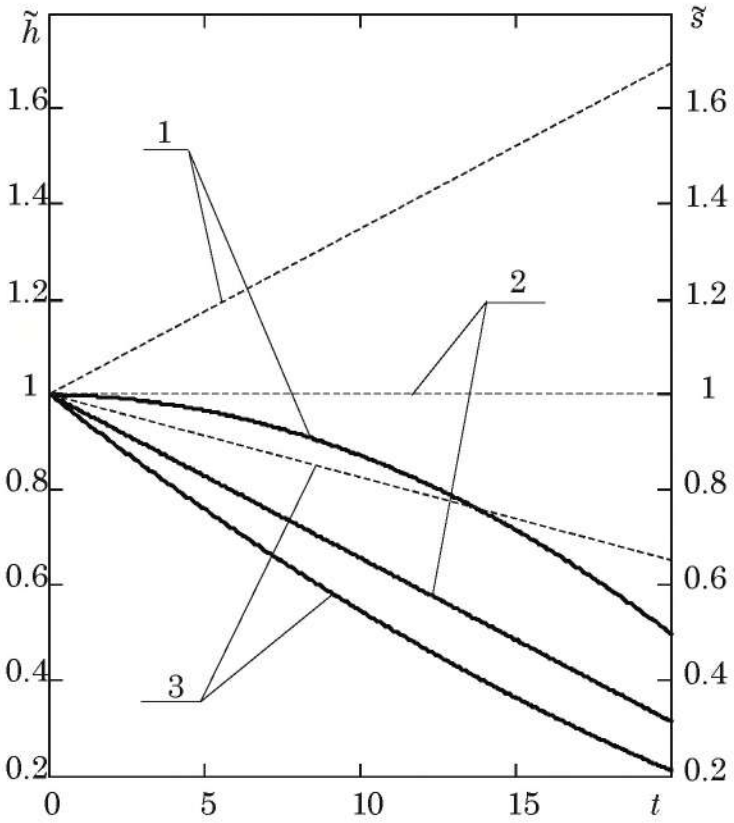


Рис. 12.1. Изменение вдоль течения безразмерной ширины канала $\tilde{h}$ – штриховые линии и безразмерной площади поперечного сечения $\tilde{s}$ – сплошные линии в канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$; 1 – для параметра $b = 0.035$ ($\alpha_1 = 32°$); 2 – для $b = 0$ ($\alpha_1 = 30°$); 3 – $b = -0.017$ ($\alpha_1 = 29°$).

Распределение безразмерного градиента давления в канале определяется величиной средней безразмерной скорости жидкости и значений параметра b (12.27). При малых числах Рейнольдса основной вклад в формирование величины градиента давления вносят силы трения (12.26), (12.27), и эта часть безразмерного градиента давления может быть оценена с помощью рассмотрения баланса сил на элементарном участке канала длиной dt (рис. 12.3), что приведет к соотношению:

$$\frac{d\Pi}{dt} \sim -\left|\dot{\gamma}_\Gamma\right| \frac{\mathrm{per}(t)}{S(t)} = -\frac{\left|\dot{\gamma}_\Gamma\right|}{1+bt} \sim \frac{\overline{v}}{\tilde{h}(t)^2}, \qquad (12.41)$$

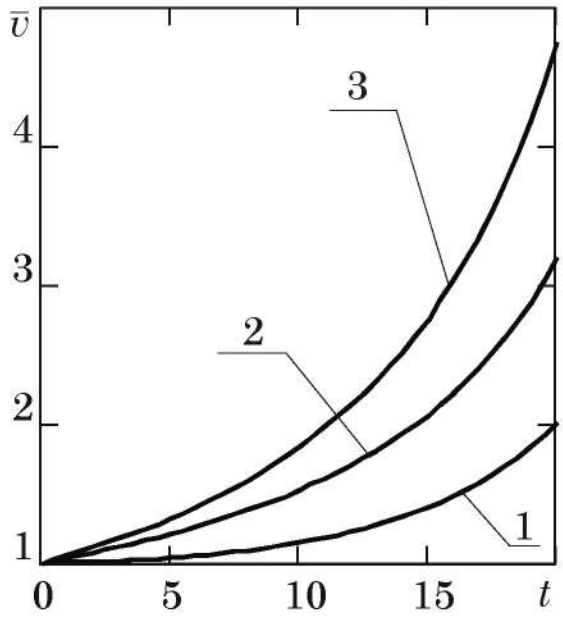


Рис. 12.2. Распределение средней по поперечному сечению канала безразмерной скорости при конфузорном течении в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$; 1 – для параметра $b = 0.035$ ($\alpha_1 = 32°$); 2 – для $b = 0$ ($\alpha_1 = 30°$); 3 – $b = -0.017$ ($\alpha_1 = 29°$).

где $\mathrm{per}(t) = 2\pi[2(\xi_1 - t)\sin\alpha - (1 + bt)\cos\alpha]$ — смачиваемый периметр канала, как функция t, $S(t)$ — площадь поперечного сечения канала (7.9), $|\dot{\gamma}_\Gamma|$ – абсолютная величина скорости сдвига на границах канала, которая определяется с помощью (12.36):

$$|\dot{\gamma}_\Gamma| = \left|\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}\right|_{\substack{0 \\ 1+bt}} = \left|\frac{6\left(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha\right)}{\tilde{h}(t)^2\left[\tilde{h}(t)\operatorname{ctg}\alpha - 2\left(\xi_1 - t\right)\right]}\right|. \qquad (12.42)$$

Результат (12.41) вполне согласуется с выражением (7.30) и первым членом в сумме (12.27). Еще раз заметим, что второе слагаемое суммы (12.27) представляет локальную запись закона Бернулли для конфузорного течения в соосных конических каналах с изменяющейся шириной вдоль течения.

Относительные величины распределения безразмерных скоростей в канале для всех значений b, включая и канал с постоянной шириной вдоль течения, т.е. $b = b_0 = 0$, представлена на рисунке 12.4. Следует заметить, что областью определения скорости здесь служат координаты

$$\xi' = \xi \text{ и } \chi' = \chi/(1 + bt). \qquad (12.43)$$

Поперечное распределение безразмерной скорости в канале для биконических координат показано на рисунке 12.5.

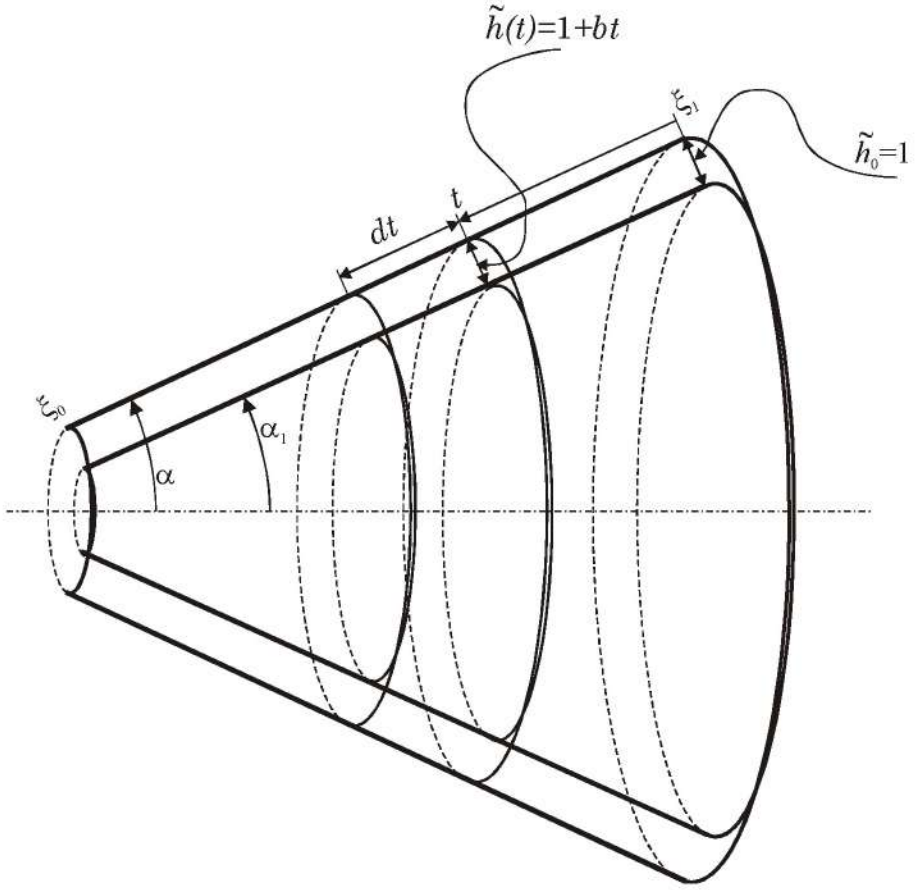


Рис. 12.3. Геометрия соосного конического канала. К определению баланса сил на элементарном участке канала длиной, равной *dt*.

Рассмотрим течение в канале с увеличивающейся шириной, т.е. при $b = 0.035$.

В данном случае, несмотря на то, что площадь поперечного сечения канала уменьшается, увеличение ширины канала оказывает преобладающее влияние на величину скорости сдвига на границе в начале течения, что приводит к ее снижению в области, близкой ко входу в канал (рис. 12.5а, рис. 12.6). Поскольку при малых значениях числа Рейнольдса градиент давления определяется силами трения, он в данном случае будет уменьшаться по абсолютной величине (рис. 12.7, 12.8) в соответствии с (7.30). На выходе из канала, вследствие увеличения скорости жидкости (рис. 12.2, 12.5а), незначительно увеличивается скорость сдвига на границе $\dot{\gamma}_\Gamma$

(рис. 12.6). Это приводит к тому, что безразмерный градиент давления здесь несколько увеличивается по абсолютной величине (рис. 12.7, 12.8а).

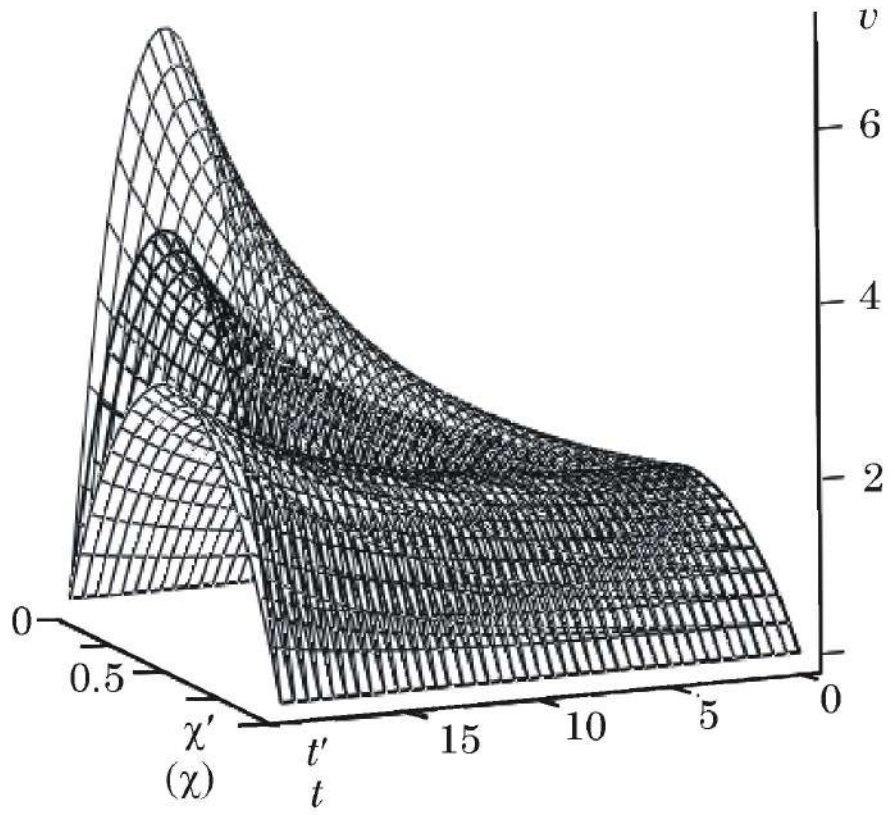


Рис. 12.4. Распределение безразмерной скорости при ламинарном конфузорном течении в соосном коническом канале с размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$. Нижняя поверхность для $b = 0.035$; средняя для $b = 0$; верхняя для $b = -0.017$ (штрихованные координаты используются при течении в канале с $b \neq 0$)

Безразмерный градиент давления вдоль течения в рассматриваемом случае изменяется незначительно, поэтому распределение безразмерного давления вдоль канала близко к линейному (рис. 12.9).

Поскольку инерционные силы при малых значениях числа Re несущественны, изменение безразмерного давления, обусловленное этими силами, незначительно (рис. 12.9в), а относительное отклонение между перепадом давления, рассчитанном с учетом сил инерции, возникающих вследствие изменения площади поперечно-

го сечения канала вдоль течения, от перепада давления, рассчитанного без учета этих сил, не превышает 5% (рис. 12.9).

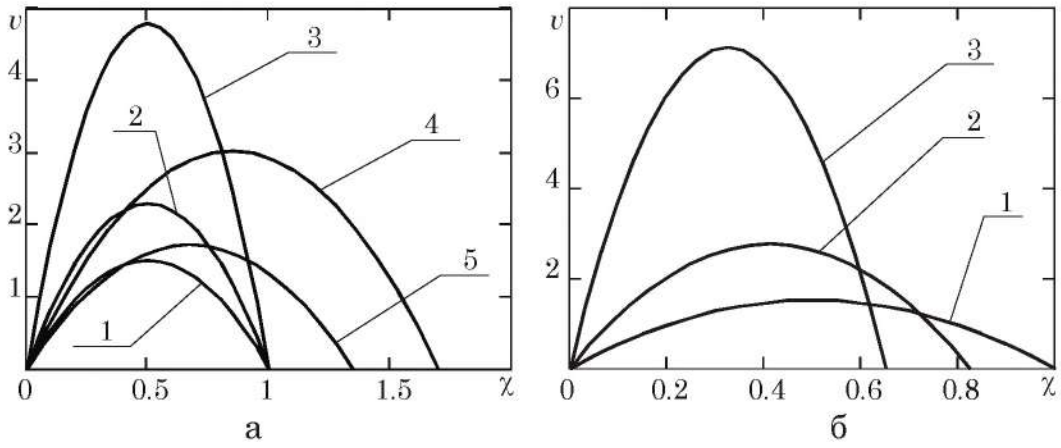


Рис. 12.5. Распределение безразмерной скорости поперек канала при ламинарном конфузорном течении в соосном коническом канале с размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$. а – штриховые линии для течения в канале с постоянной шириной вдоль течения ($b = 0$), сплошные для течения в канале с увеличивающейся шириной ($b = 0.035$): б – для течения в канале с уменьшающейся шириной ($b = -0.017$). 1 – распределение на входе в канал $\xi = 10$; 2 – распределение при $\xi = 20$; 3 – на выходе из канала $\xi = 30$.

В данном случае абсолютная величина безразмерного давления в канале значительно меньше, чем при течении в канале постоянной ширины (рис. 12.9а), что связано с меньшим значением безразмерной скорости сдвига на границе канала (рис. 12.6) и, как следствие, меньшим абсолютным значением безразмерного градиента давления (рис. 12.7).

При конфузорном течении в соосном коническом канале с уменьшающейся шириной, т.е. при $b = b_2 = -0.017$, средняя скорость течения вдоль канала увеличивается по более крутой зависимости (рис. 12.2) в соответствие с изменением площади поверхности поперечного сечения канала вдоль течения (рис. 12.1). Монотонное увеличение скорости течения и уменьшение ширины канала вдоль течения приводит к монотонному росту модуля безразмерной скорости сдвига на границе канала (рис. 12.5, 12.6), который по абсолютному значению превосходит модуль безразмерной скорости сдвига в ранее рассмотренных случаях (рис. 12.6). В итоге безразмерный

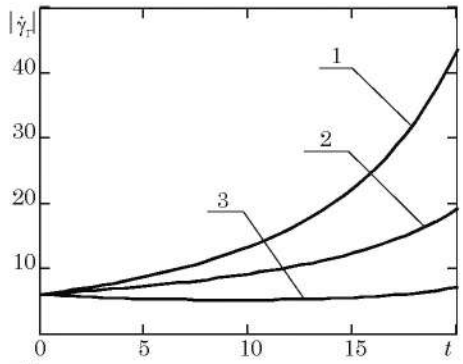


Рис. 12.6. Распределение безразмерной скорости сдвига на границе канала с геометрическими размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$. 1 – течение в канале с уменьшающейся шириной ($b = -0.017$); 2 – течение в канале с постоянной шириной вдоль течения ($b = 0$); 3 – течение в канале с увеличивающейся шириной ($b = 0.035$).

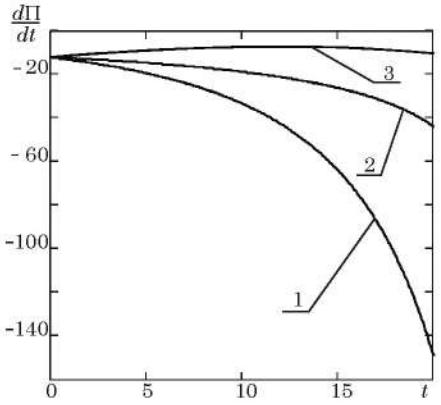


Рис. 12.7. Распределение безразмерного градиента вдоль течения: 1 – для течения в канале с уменьшающейся шириной при $b = -0.017$; 2 – для $b = 0$; 3 – для $b = 0.035$.

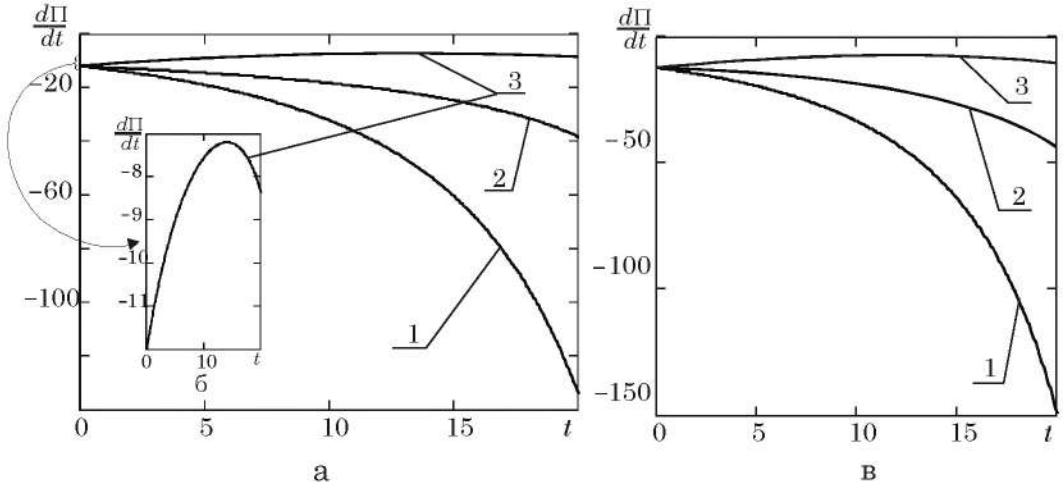


Рис. 12.8. Распределение безразмерных составляющих градиента давления вдоль конфузорного течения в соосном коническом канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$. (а, б) – для диссипативной составляющей градиента давления; в – для его инерционной составляющей: 1 – течение с уменьшающейся шириной вдоль канала при $b = -0.017$; 2 – течение в канале постоянной ширины; 3 – течение в канале с увеличивающейся шириной при $b = 0.035$.

градиент давления прогрессивно увеличивается вдоль течения (рис.12.7). Влияние инерционных сил на распределение градиента давления вдоль течения остается по-прежнему малым, и только на выходе из канала инерционная составляющая безразмерного градиента давления становится ~ 10% от его общей величины (рис. 12.8).

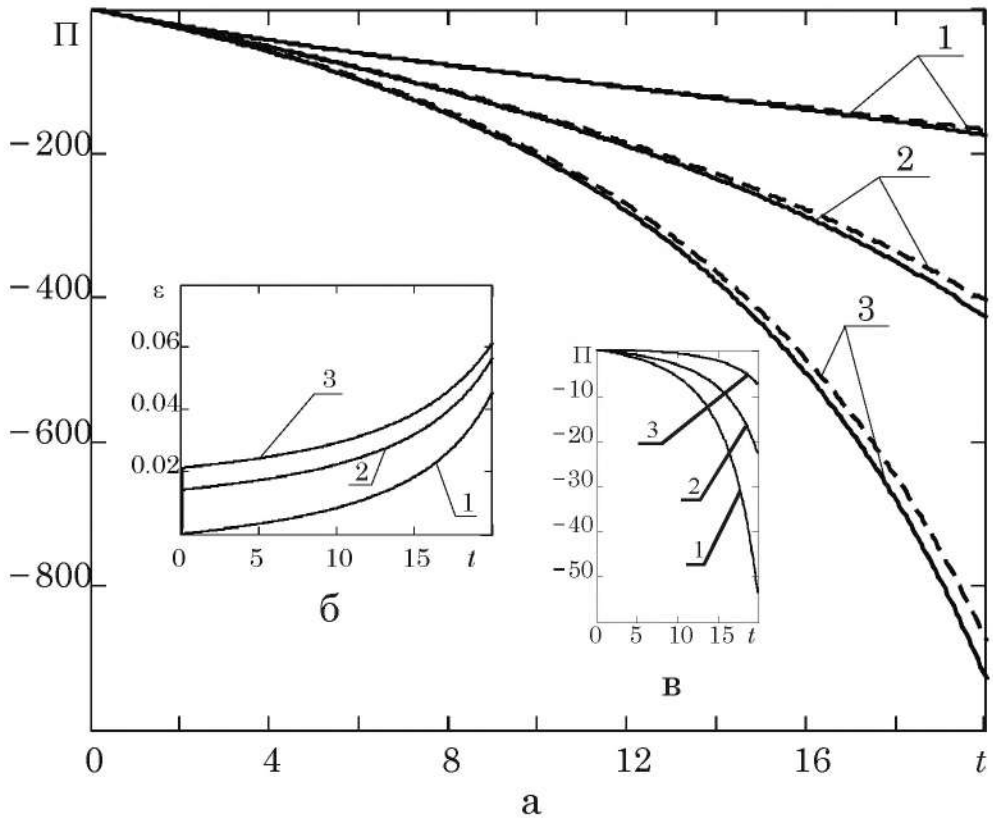


Рис. 12.9. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при Re = 5 – сплошные линии. 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.035$; 2 – течение в канале постоянной ширины; 3 – в канале с линейно уменьшающейся шириной при $b = -0.017$: б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при Re = 5: 1 – в канале с $b = 0.035$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = -0.017$: в – инерционной составляющей безразмерного давления (12.33) при Re = 5: 1 – в канале с $b = -0.017$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = 0.035$.

В результате более существенного изменения модуля градиента давления в канале с уменьшающейся шириной распределение безразмерного давления значительно отличается от линейного, и его модуль прогрессивно увеличивается вдоль течения (рис. 12.9). В данном случае, как и в ранее рассмотренных, относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств и с учетом последних, на большей части канала не превосходит 5%.

Увеличение числа Рейнольдса приводит к более значительному влиянию инерционных сил на распределение давления в канале. При числе Re = 50 относительное отклонение между величинами (12.29) и (12.28) увеличивается вдоль течения до 40% и 60% соответственно для $b = b_2$ и $b = b_1$ (рис. 12.10).

Большая величина отклонения связана с тем, что при больших значениях Re более значительная часть энергии напряженного состояния жидкости переходит в кинетическую энергию при увеличении скорости течения вдоль канала (рис. 12.10). Это и приводит к большему падению давления вдоль течения.

Инерционная часть безразмерного давления (12.33) и его градиента (12.27) прямо пропорциональна величине числа Re, поэтому абсолютные значения инерционных частей $\frac{d\Pi}{dt}$ и Π в данном случае течения будут в 10 раз больше, чем в ранее рассмотренных (рис. 12.10в, 12.11б). Диссипативная же составляющая безразмерного давления и его градиента остаются прежними, поскольку определяются исключительно геометрическими характеристиками канала.

Поскольку знаки диссипативной и инерционной составляющих безразмерного давления и его градиента в выбранной геометрии канала совпадают, то при дальнейшем увеличении числа Re абсолютные величины $|\Pi|$ и $\left|\frac{d\Pi}{dt}\right|$ будут только увеличиваться, а характер их распределения в канале не изменится.

Изменения геометрии канала могут привести и к существенному изменению распределения давления в канале. Рассмотрим

течение в канале с параметрами: $\xi_1 = 30$, $\xi_0 = 10$, $\alpha = 30°$, $\alpha_1 = 43°$. Параметр b в этом случае равен $b = 0.2309$, т.е. удовлетворяет соотношению (12.7). Сравнивать характеристики течения в данном канале будем с течением в канале постоянной ширины. Как и раньше начнем анализировать течение с малых значений Re = 5.

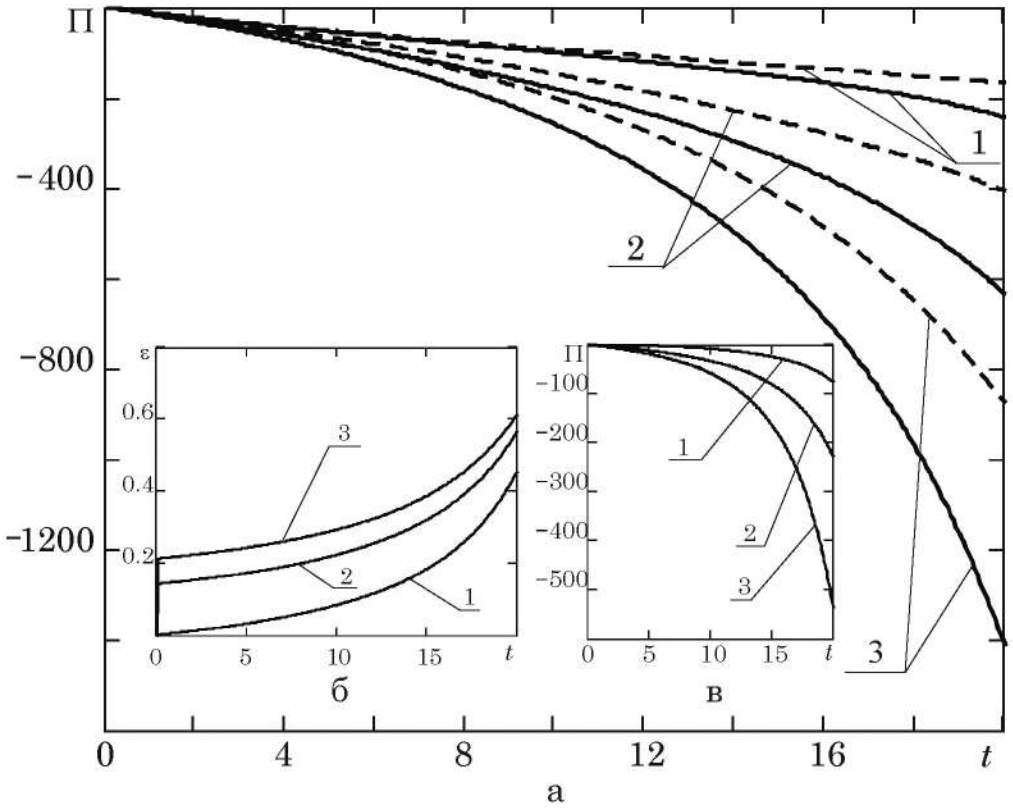


Рис. 12.10. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при Re = 50 – сплошные линии. 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.035$; 2 – течение в канале постоянной ширины; 3 – в канале с линейно уменьшающейся шириной при $b = -0.017$; б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при Re = 5: 1 – в канале с $b = 0.035$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = -0.017$; в – инерционной составляющей безразмерного давления (12.33) при Re = 5: 1 – в канале с $b = -0.017$; 2 – $b = 0$; 3 – $b = 0.035$.

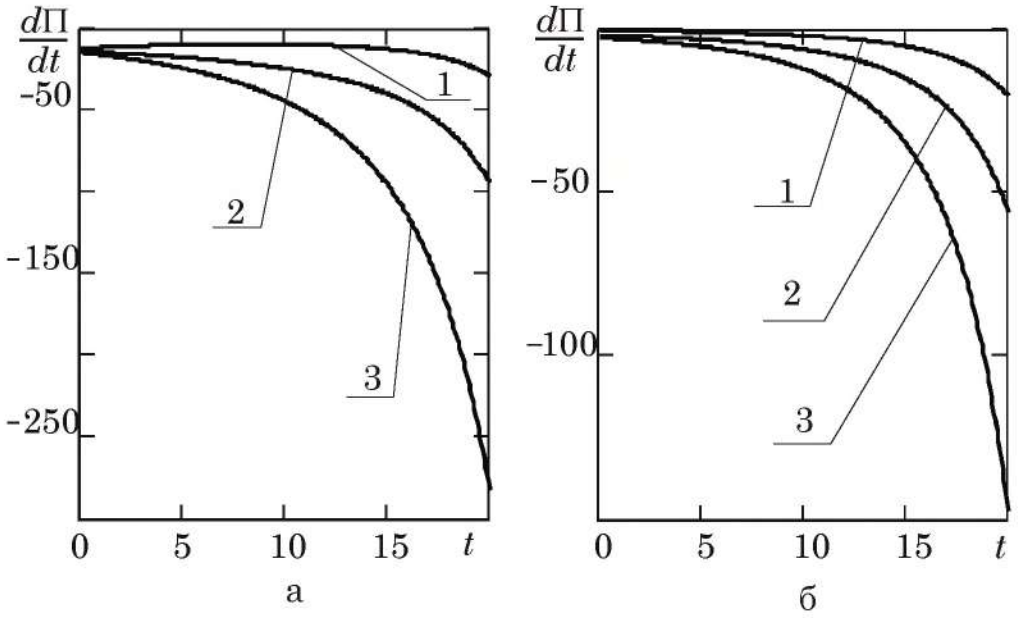


Рис. 12.11. Распределение безразмерных величин вдоль конфузорного течения при Re = 50 в соосном коническом канале с параметрами: ξ_0 =10, ξ_1 = 30, α = 30°. а – градиента давления, рассчитанного с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения средней скорости течения вдоль канала; б – инерционной составляющей безразмерного градиента давления; 1 – в канале с b = 0.035; 2 – b = 0; 3 – b = -0.017.

В рассмотренном ранее канале с b = 0.035 его ширина увеличивалась вдоль всей длины приблизительно в 1.7 раза, то при b = 0.2309 ширина канала на выходе в 5.6 раз больше, чем на входе. Столь значительное увеличение ширины канала вдоль продольной координаты t приводит к немонотонной зависимости относительной площади поперечного сечения от t (7.20) (рис. 12.12). В данном случае площадь поперечного сечения на выходе из канала практически совпадает с площадью сечения на его входе. Поэтому распределение средней безразмерной скорости вдоль течения также будет немонотонно в соответствии с (7.22) (рис. 12.13).

В начале течения с увеличением ширины и площади поперечного сечения канала (рис. 12.12) средняя безразмерная скорость уменьшается, далее вдоль течения она достигает своего минимума и затем возрастает (рис. 12.13), поскольку площадь поперечного сечения канала здесь начинает уменьшаться (рис. 12.12).

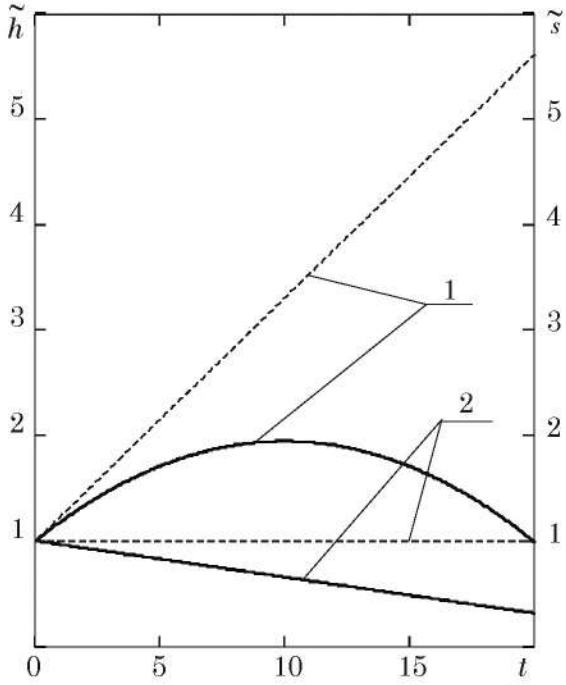


Рис.12.12. Изменение вдоль течения безразмерной ширины канала $\tilde{h}$ – штриховая линия и безразмерной площади поперечного сечения $\tilde{s}$ – сплошные линии в канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$; 1 – для канала с $b = 0.2309$ ($\alpha_1 = 43°$); 2 – в канале с $b = 0$.

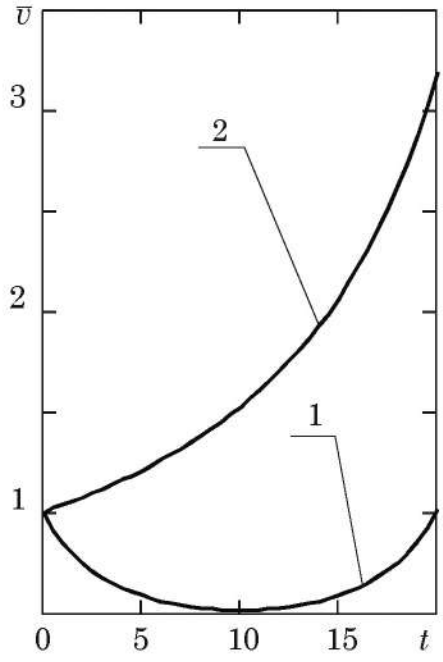


Рис. 12.13. Распределение безразмерной средней по площади поверхности поперечного сечения скорости течения жидкости в соосном коническом конфузоре с геометрическими параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$; 1 – для $b = 0.2309$ ($\alpha_1 = 43°$); 2 – в канале с $b = 0$.

Локализация минимума средней скорости определим из равенства $\dfrac{d\overline{v}}{dt} = 0$

$$t_{\overline{v}\min} = \frac{b(\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha) - 1}{b(2 + b\operatorname{ctg}\alpha)}. \qquad (12.44)$$

Для выбранных в данном случае параметров течения $t_{\overline{v}\min} = 9.917$ (рис. 12.13).

Используя результат (12.44), можно определить значение величины параметра b, начиная с которой распределение средней скорости течения вдоль канала будет немонотонным. Для этого

сначала рассмотрим зависимость $t_{\overline{v}\min}(b)$, построенную для интервала $0 \le b \le \dfrac{\xi_0 \operatorname{tg}\alpha - 1}{\xi_1 - \xi_0}$ (рис. 12.14). Понятно, что зависимость $\overline{v}(t)$ будет немонотонной в том случае, когда зависимость $\tilde{s}(t)$ будет немонотонной, т.е. зависимость площади поперечного сечения от t будет иметь максимум и его координаты также будут определяться выражением (12.44).

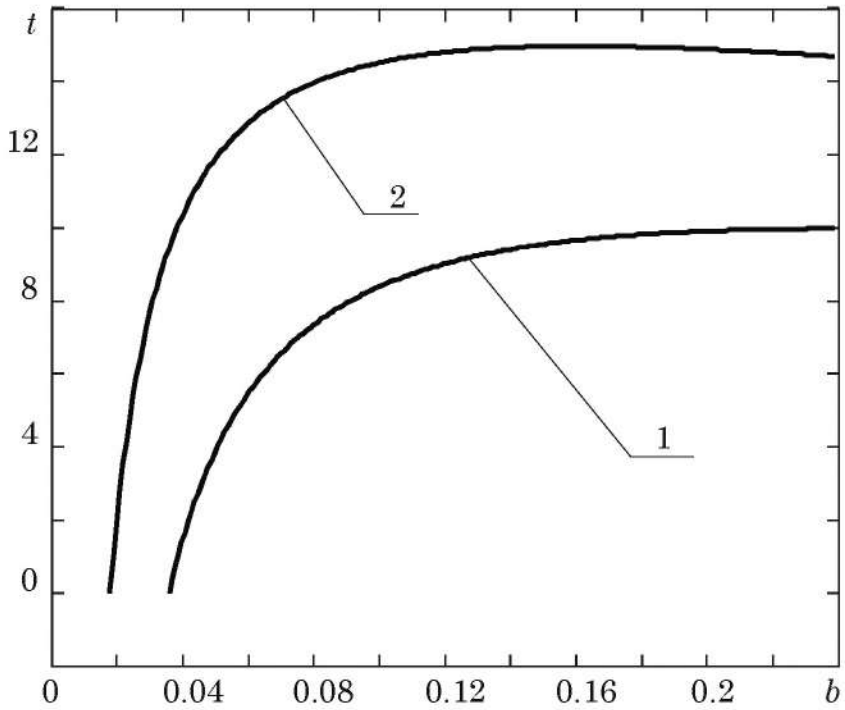


Рис. 12.14. Зависимость безразмерной продольной координаты локализации минимального значения скорости при течении в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ от параметра $b - 1$ и зависимость безразмерной продольной координаты локализации минимального значения скорости сдвига на границе канала от параметра $b - 2$.

Понятно, что при $b = 0$ максимальное значение площади поперечного сечения будет при $t = 0$ и при увеличении t, $\tilde{s}(t)$ будет уменьшаться. В этом случае $\dfrac{d\tilde{s}}{dt} < 0$ в пределах всего канала

(рис. 12.12). Из геометрических соображений понятно, что при фиксированной ширине входа в канал и увеличении b величина $\frac{d\tilde{s}}{dt}$ достигнет 0 сначала на входе в канал. Поэтому, величину b, начиная с которой зависимость $\bar{v}(t)$ будет немонотонной, определим с помощью (12.44), т.е. из равенства $t_{\bar{v}\min} = 0$

$$b_v = \frac{1}{\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (12.45)$$

Для выбранного канала $b_v = 0.0354$.

Мы видим, что параметр b_v является исключительно геометрической характеристикой канала.

При дальнейшем увеличении b максимальное значение площади поперечного сечения будет перемещаться к выходу из канала (рис. 12.14), но координату выхода из канала не достигнет на всем интервале изменения b (рис. 12.14).

Мы рассмотрели особенности распределения средней безразмерной скорости вдоль канала. Изменение распределения скорости в поперечном сечении канала вдоль течения также определяется характером изменения площади поперечного сечения канала вдоль продольной координаты и в рассматриваемом случае будет иметь седлообразный вид (рис. 12.15), причем вид седла с расширяющимся основанием (рис. 12.15б). Особенностями такого распределения скорости жидкости в канале будут определять, в конечном счете, все остальные характеристики течения.

В начале течения, с увеличением ширины канала, уменьшается и скорость, что приводит к резкому падению скорости сдвига на границах канала (рис. 12.16, 12.15б). В то же время в канале постоянной ширины скорость сдвига на границе растет (рис. 12.16), т.к. распределение скорости становится более вытянутым вдоль течения при постоянной ширине основания (рис. 12.15б). Далее вдоль течения скорость сдвига на границе $\dot{\gamma}_\Gamma$ при некотором значении t достигает своего минимума (рис. 12.16). Это значение мы определим из равенства $\frac{d\dot{\gamma}_\Gamma}{dt} = 0$

$$t_{s\min} = \frac{b\left(4\xi_1 - 3\operatorname{ctg}\alpha\right) - 2}{3b\left(b\operatorname{ctg}\alpha + 2\right)}. \qquad (12.46)$$

В нашем случае $t_{s\min} = 14.74$.

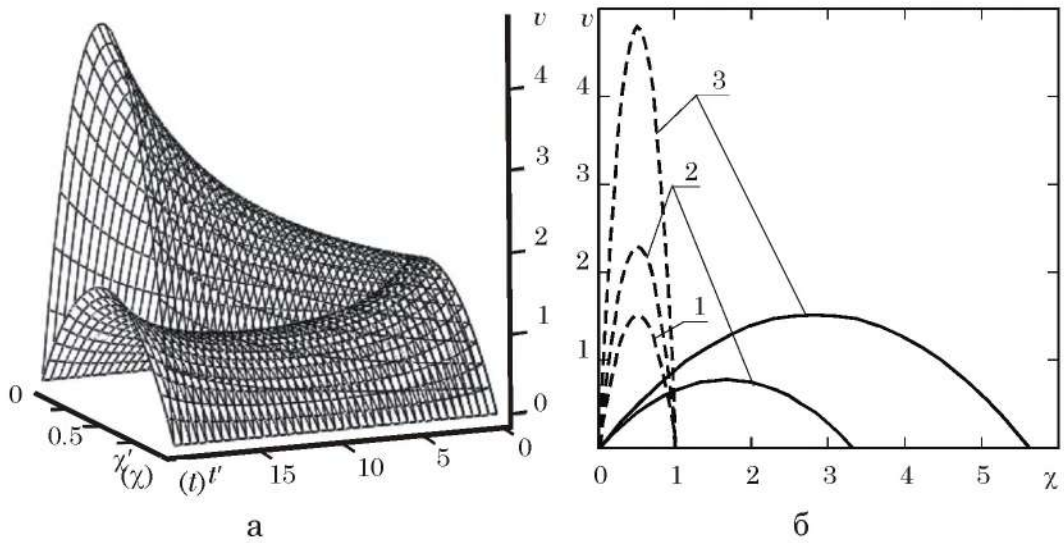


Рис. 12.15. Распределение безразмерной скорости при ламинарном конфузорном течении в соосном коническом канале с геометрическими размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$. а – нижняя поверхность для $b = 0.2309$ ($\alpha_1 = 43°$), верхняя для $b = 0$; б – влияние изменения ширины канала вдоль течения на характер поперечного распределения безразмерной скорости. Штриховые линии для течения в канале с постоянной шириной вдоль течения ($b = 0$), сплошные для течения в канале с увеличивающейся шириной ($b = 0.2309$): 1 – распределение на входе в канал $\xi = 10$; 2 – распределение при $\xi = 20$; 3 – на выходе из канала $\xi = 30$.

После достижения этого значения, $\dot{\gamma}_\Gamma$ начинает увеличиваться (рис. 12.16) несмотря на увеличение ширины канала. Это происходит вследствие увеличения скорости течения (рис. 12.15б) из-за уменьшения площади поперечного сечения канала (рис. 12.12).

Аналогично тому, как мы это делали для средней скорости, можно определить величину параметра b, начиная с которого распределение скорости сдвига $\dot{\gamma}_\Gamma$ на границе вдоль канала будет немонотонным. Очевидно, минимум $\dot{\gamma}_\Gamma$ с увеличением b сначала появится на входе в канал, т.е. при $t_{s\min} = 0$, откуда

$$b_s = \frac{2}{4\xi_1 - 3\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (12.47)$$

В рассматриваемом случае $b_s = 0.0174$.

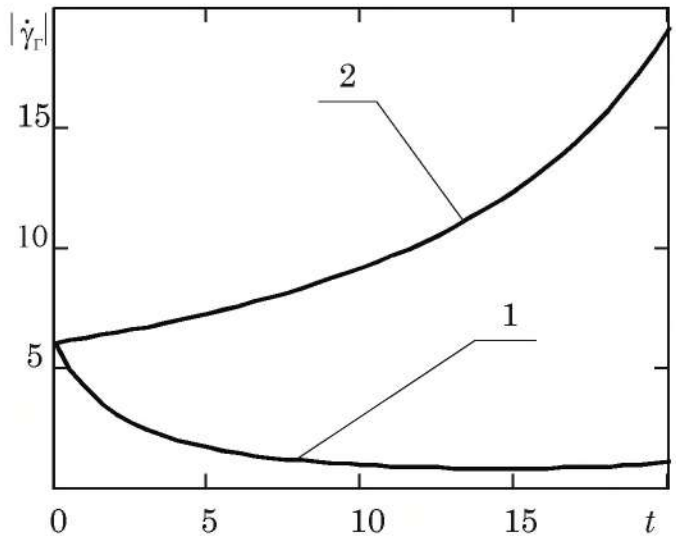


Рис. 12.16. Распределение безразмерной скорости сдвига на границе канала с геометрическими размерами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$; 1 – течение в канале с увеличивающейся шириной ($b = 0.2309$); 2 – течение в канале с постоянной шириной вдоль течения ($b = 0$).

Начиная с этого значения b, в пределах канала, появляется экстремальное значение скорости сдвига на границе, и при увеличении b минимум $\dot{\gamma}_\Gamma$ будет перемещаться к выходу из канала. Параметр b_s, также как и b_v, геометрическая характеристика течения в рассматриваемом канале. Сравнение b_s и b_v показывает, что немонотонное распределение скорости сдвига на стенке вдоль канала $\dot{\gamma}_\Gamma$ (t) возникает при меньших значениях b, чем значения b_v, при которых появляется немонотонность в распределении $\bar{v}(t)$. Это говорит о том, что существуют варианты конфузорных течений в коаксиальных конических каналах с немонотонной зависимостью $\dot{\gamma}_\Gamma$ (t), в то время как средняя скорость будет монотонно увеличиваться вдоль течения (рис. 12.14).

В области значений b, для которых обе рассматриваемые зависимости немонотонны для одинаковых b, экстремальное значение $\dot{\gamma}_\Gamma(t)$ будет ближе к выходу из канала, чем экстремальное значение функции $\bar{v}(t)$. Это происходит потому, что минимальное значение

$\bar{v}(t)$ определяется только максимальной площадью поперечного сечения канала, а минимальное значение $\dot{\gamma}_\Gamma(t)$ определяется как величиной скорости $\bar{v}(t)$, так и шириной канала (рис. 12.15б). Заметим, что для $b = b_s$ максимальное значение площади поперечного сечения будет находиться за пределами рассматриваемого участка канала в районе отрицательных значений t, и при увеличении b будет сдвигаться в сторону канала, достигая его входа при $b = b_v$.

Заметим, что в рассматриваемом канале зависимость (12.44) является монотонно возрастающей, а зависимость (12.46) – немонотонная. На особенностях данных зависимостей мы остановимся несколько позднее, а сейчас вернемся к особенностям в распределении давления в канале, которые полностью определяются распределением скорости в канале и скорости сдвига на его границах.

В данном случае течения, т.е. при $b = 0.2309$, средняя скорость течения и скорость сдвига на стенке канала значительно меньше, чем в уже рассмотренных течениях, поэтому и перепад давления в каналах здесь будет меньше (рис. 12.17). Следует заметить, что даже при числе Re = 5 относительное отличие безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционных сил от П, рассчитанного без такого учета, на большей части канала превосходит 5% (рис. 12.17). В ранее рассмотренном случае это отклонение при Re = 5 не превышало 5% при течении в канале с увеличивающейся шириной (рис. 12.9). В рассматриваемом сейчас случае течения площадь поперечного сечения канала в его начале увеличивается (рис. 12.12), вследствие чего средняя скорость уменьшается (рис. 12.13), а это приводит к тому, что часть кинетической энергии переходит в энергию напряженного состояния. В результате здесь инерционная часть градиента давления положительна (рис. 12.18), что уменьшает абсолютную величину $\left|\frac{d\Pi}{d\xi}\right|$.

В ранее рассмотренной в настоящем разделе геометрии площадь поперечного сечения практически от входа уменьшается вдоль течения, но не столь интенсивно, как в последнем случае, по-

этому в рассматриваемом случае влияние инерционных сил на распределение давления значительнее.

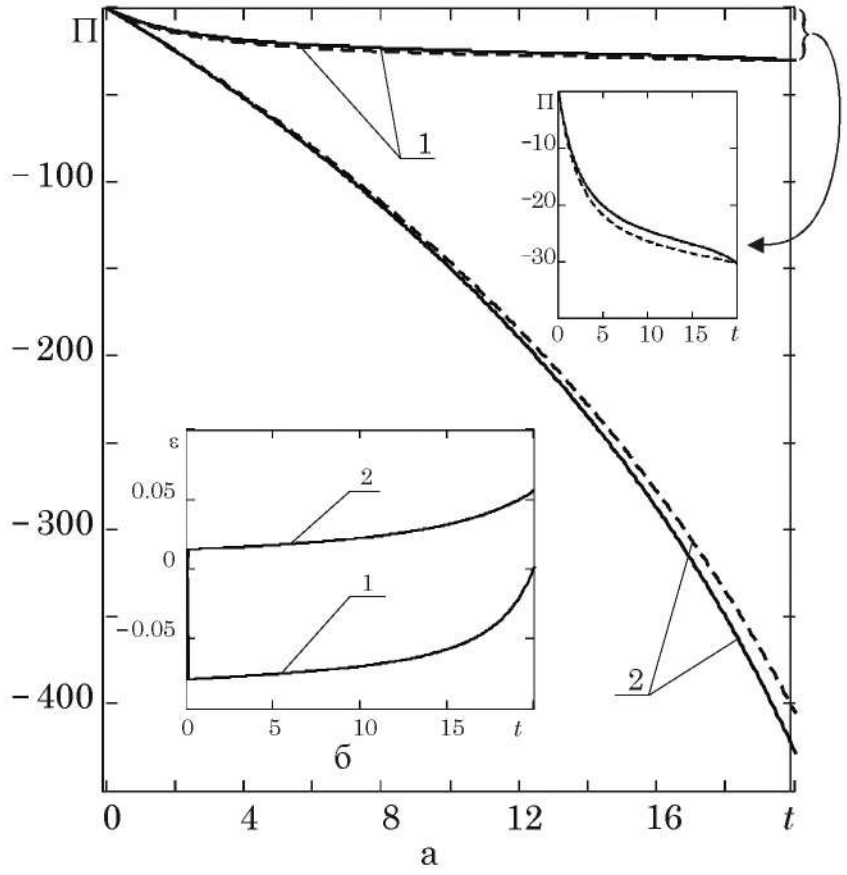


Рис. 12.17. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при Re = 5 – сплошные линии; 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины; б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при Re = 5: 1 – в канале с $b = 0.2309$; 2 – $b = 0$.

Далее вдоль течения поперечное сечение канала уменьшается (рис. 12.12), средняя скорость увеличивается и, вследствие этого, часть энергии напряженного состояния жидкости переходит в кине-

тическую энергию движения. Инерционная часть градиента на некотором расстоянии от входа становится отрицательной (рис. 12.18), что увеличивает абсолютную величину градиента давления (рис. 12.19).

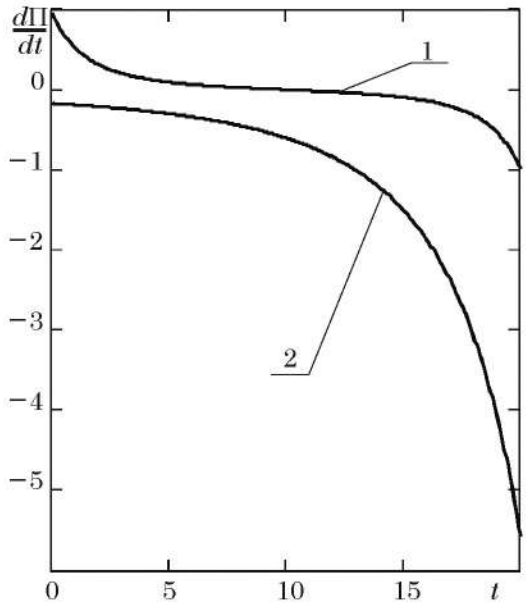


Рис. 12.18. Распределение инерционной составляющей градиента безразмерного давления вдоль конического соосного конфузора с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ для течения с $\mathrm{Re} = 5$; 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины.

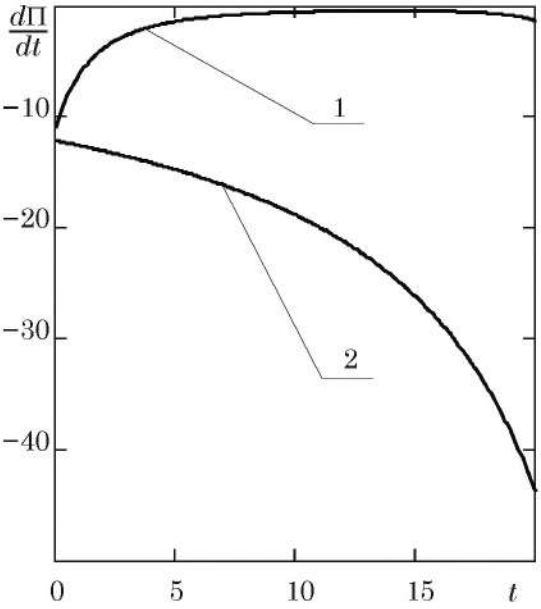


Рис. 12.19. Распределение диссипативной составляющей безразмерного давления вдоль канала с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ для конфузорного течения с $\mathrm{Re} = 5$. 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины.

Заметим, что в выбранной геометрии канала площадь поперечного сечения канала на входе практически совпадает с площадью выходного сечения (рис. 12.12), средняя скорость на входе в канал и на выходе из него равны. Следовательно, кинетическая энергия жидкости при протекании через канал не изменялась, и в соответствии с законом Бернулли приращение инерционной части перепада давления будет равно 0 (рис. 12.20). Поэтому общий перепад

давления в канале будет равен перепаду давления, рассчитанному без учета инерционных свойств (рис. 12.17).

При увеличении числа Рейнольдса в 10 раз, инерционная составляющая безразмерного давления, в соответствии с (12.33), также увеличится в 10 раз (рис. 12.21), а поскольку диссипативная составляющая безразмерного градиента давления не изменится, то влияние инерционных сил на распределение безразмерного давления значительно увеличится (рис. 12.22).

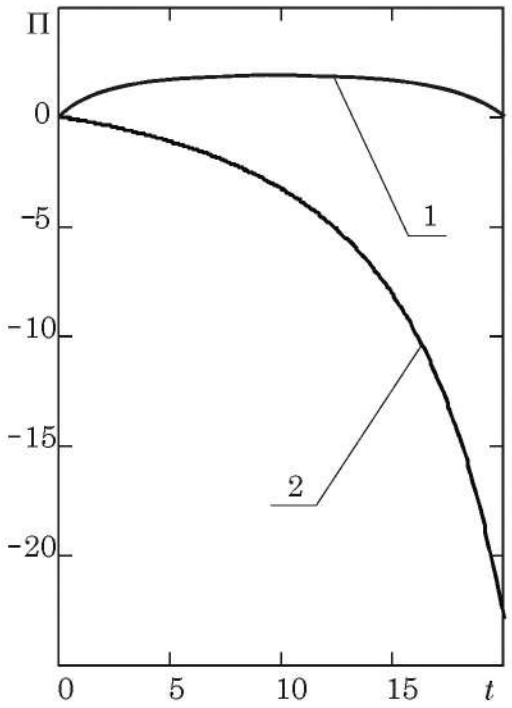


Рис. 12.20. Распределение инерционной составляющей безразмерного давления вдоль конического соосного конфузора с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ для течения с $\mathrm{Re} = 5$. 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины при $b = 0$.

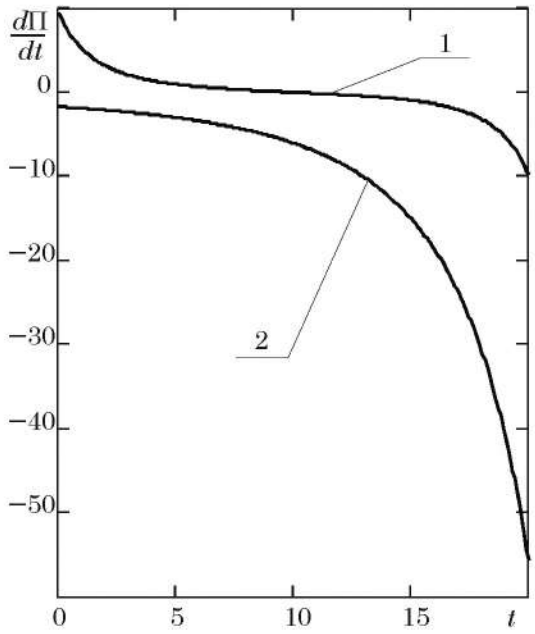


Рис. 12.21. Распределение инерционной составляющей градиента безразмерного давления вдоль конического соосного конфузора с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ для течения с $\mathrm{Re} = 50$. 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины при $b = 0$.

Это понятно, потому что при уменьшении скорости вдоль течения (рис. 12.13) большая часть кинетической энергии будет

трансформироваться в энергию напряженного состояния жидкости, что и будет приводить к значительно меньшему значению безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционных сил от величины П, рассчитанного без этого учета (рис. 12.22).

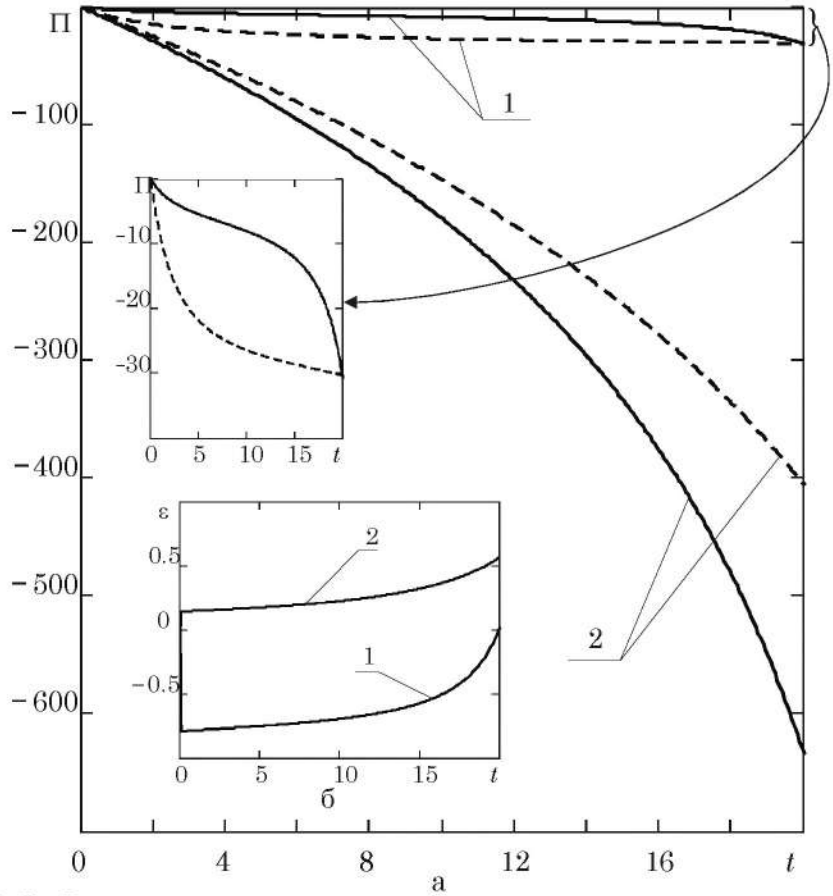


Рис. 12.22. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при Re = 50 – сплошные линии; 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины; б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при Re = 5: 1 – в канале с $b = 0.2309$; 2 – $b = 0$.

В итоге на большей части канала относительное отклонение между указанными величинами будет более 50%. Но это отклоне-

ние так же, как и в предыдущем случае, на выходе из канала будет равно 0, поскольку изменение кинетической энергии, а значит и инерционной части безразмерного давления, равно нулю (рис. 12.23).

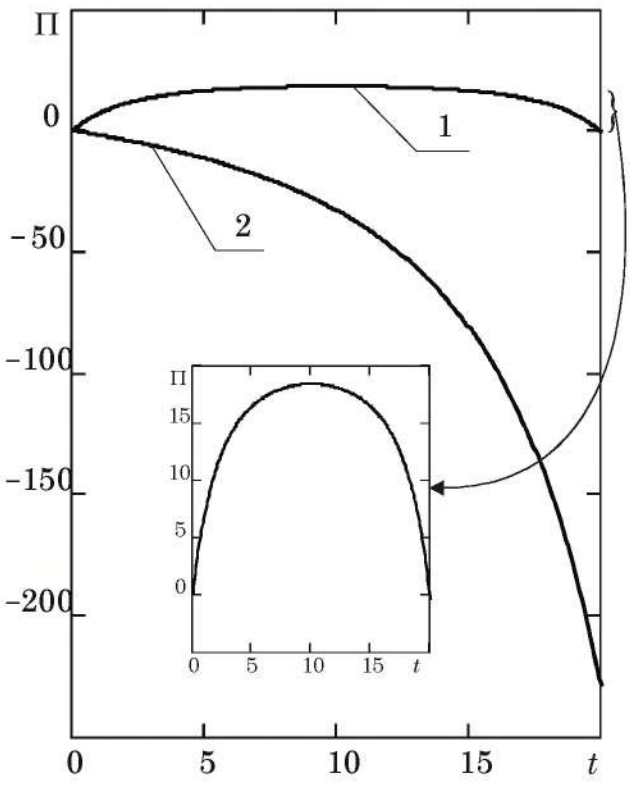


Рис. 12.23. Распределение инерционной составляющей градиента безразмерного давления вдоль конического соосного кофузора с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ для течения с $\mathrm{Re} = 50$. 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины при $b = 0$.

При увеличении числа Рейнольдса до 150 характер течения несколько изменится. Инерционные силы в данном случае будут преобладающими, а поэтому инерционная часть градиента давления по абсолютной величине будет значительно превосходить его диссипативную составляющую (рис. 12.24). Из-за этого безразмерный градиент давления в начале течения, где средняя скорость уменьшается, будет положительной величиной (рис. 12.24), вследствие чего течение будет происходить в сторону увеличения давления (рис. 12.25), в отличие от всех ранее рассмотренных случаев. Но на выходе из канала безразмерное давление, рассчитанное с учетом инерционных членов и без их учета, будет совпадать вследствие равенства кинетической энергии течения жидкости на входе и выходе канала (рис. 12.25).

Величину чисел Рейнольдса, начиная с которых течение на входе в канал будет происходить в сторону увеличения давления, можно определить из условия:

$$\left.\frac{d\Pi}{dt}\right|_{t=0} = 0, \tag{12.48}$$

и, используя выражение (12.26), получим соотношение, связывающее параметр b и число Re′, начиная с которого жидкость течет в сторону увеличения давления

$$\mathrm{Re}' = 6\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{\xi_1 b - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1}. \tag{12.49}$$

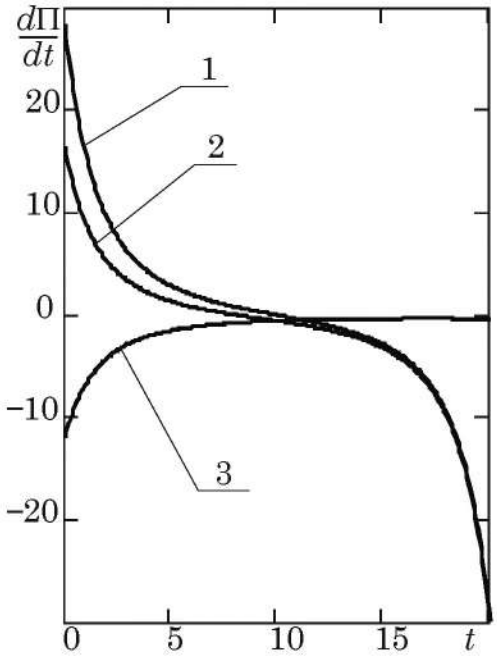


Рис. 12.24. Распределение безразмерных величин при конфузорном течении в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$, $b = 0.2309$ и числе Рейнольдса Re = 150. 1 – инерционная составляющая градиента давления; 2 – градиент давления; 3 – диссипатив-

Понятно, что параметр b должен быть положительным и удовлетворять условию (12.7) для каналов с границами, раскрытыми в одну сторону.

Если в (12.49) положить $\alpha = 90°$, то получим соотношение дающее величину числа Рейнольдса, начиная с которого радиальное сходящееся течение между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной плоскости, происходит в сторону увеличения давления

$$\mathrm{Re}' = \frac{12\xi_1}{\xi_1 b - 1}. \tag{12.50}$$

Положив $b = 0$, мы получим, что $\mathrm{Re}' = -6(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\alpha)$ для (12.49) и $\mathrm{Re}' = -12\xi_1$ для (12.50). Данный результат можно интерпретировать как то, что течение в сторону увеличения давления при $b = 0$ возможно, но в обратном направлении, т.е. это будет диффузорное течение с координатой входа равной ξ_1, что вполне согласуется с (9.41) и (9.50).

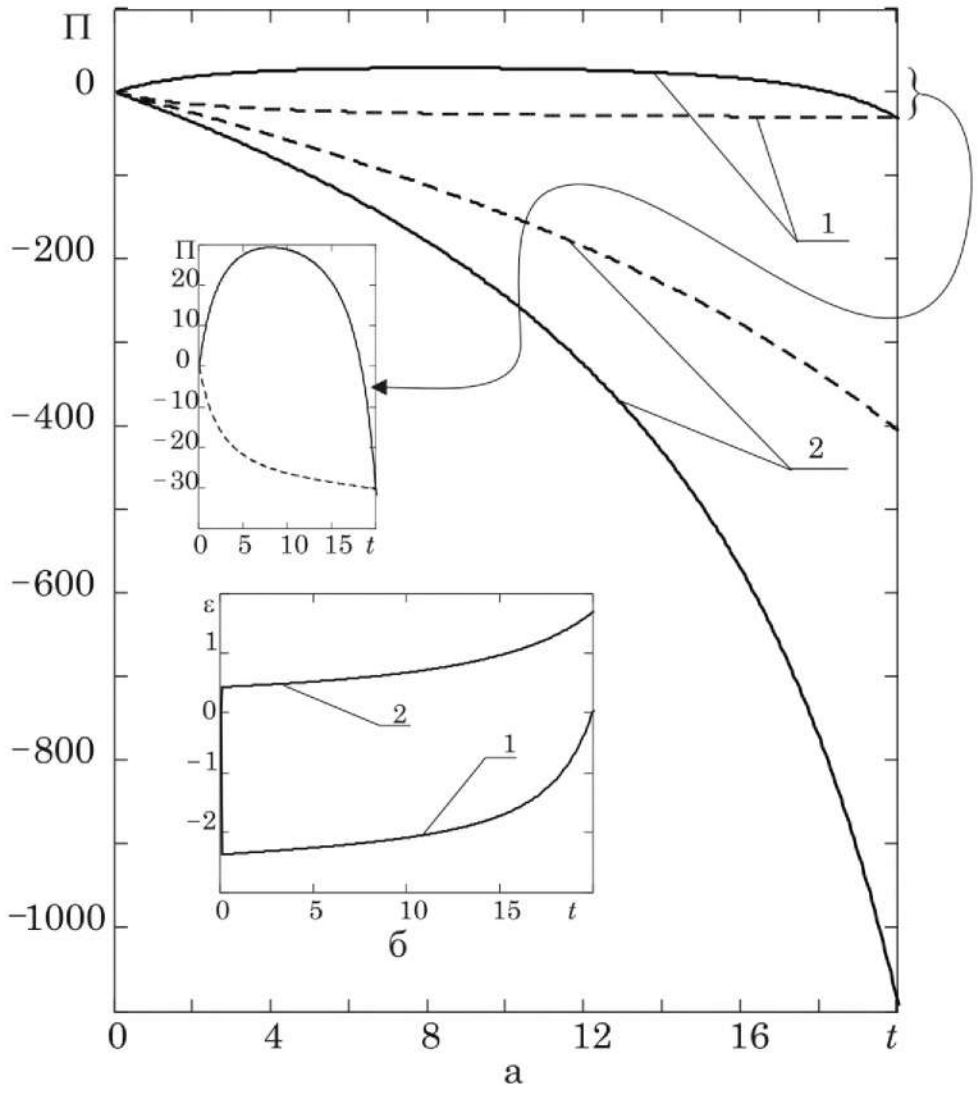


Рис. 12.25. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при $\mathrm{Re} = 150$ – сплошные линии; 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.2309$; 2 – течение в канале постоянной ширины; б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при $\mathrm{Re} = 5$: 1 – в канале с $b = 0.2309$; 2 – $b = 0$.

Давайте рассмотрим течение в канале, в котором, как и в предыдущем случае, площадь поперечного сечения вблизи входа увеличивается вдоль течения, достигает максимальной величины и затем уменьшается (рис. 12.26), но уменьшается так, что на выходе из канала площадь поперечного сечения становится меньше, чем на входе (рис. 12.26).

Это можно получить, например, в канале с размерами, равными: $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha_0 = 30°$, $\alpha = 32°$. Параметр b в этом случае равен $b = 0.034921$.

Площадь поперечного сечения канала вдоль течения в этом случае изменяется меньше, чем в канале постоянной ширины (рис. 12.26), что приводит к меньшему изменению средней скорости вдоль течения (рис. 12.27). Поэтому при малых значениях Re влия-

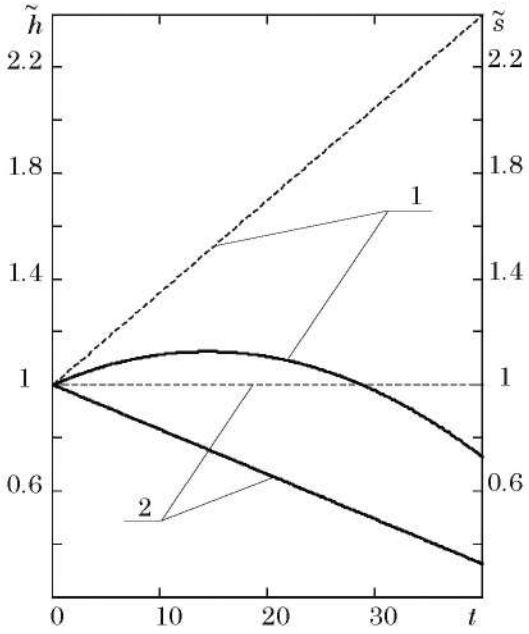


Рис. 12.26. Изменение вдоль течения безразмерной ширины канала $\tilde{h}$ – штриховая линия и безразмерной площади поперечного сечения $\tilde{s}$ – сплошные линии в канале с параметрами: $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$: 1 – для канала с $b = 0.035$ ($\alpha_1 = 32°$); 2 – в канале с $b = 0$.

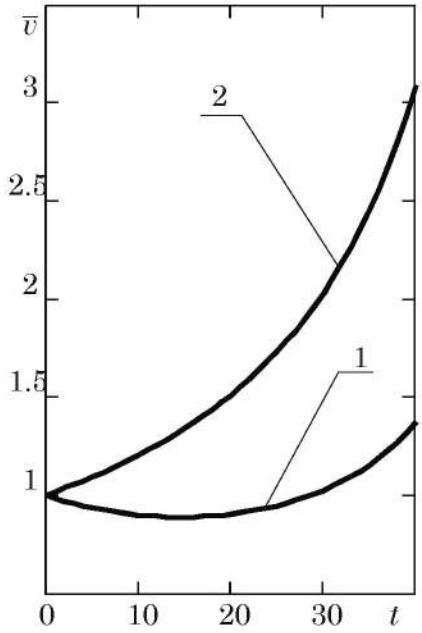


Рис. 12.27. Распределение средней по поперечному сечению безразмерной скорости течения жидкости в соосном коническом конфузоре с геометрическими параметрами: $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$; 1 – для $b = 0.035$ ($\alpha_1 = 32°$); 2 – в канале с $b = 0$.

ние инерционных сил на распределение безразмерного давления крайне незначительно (рис. 12.28).

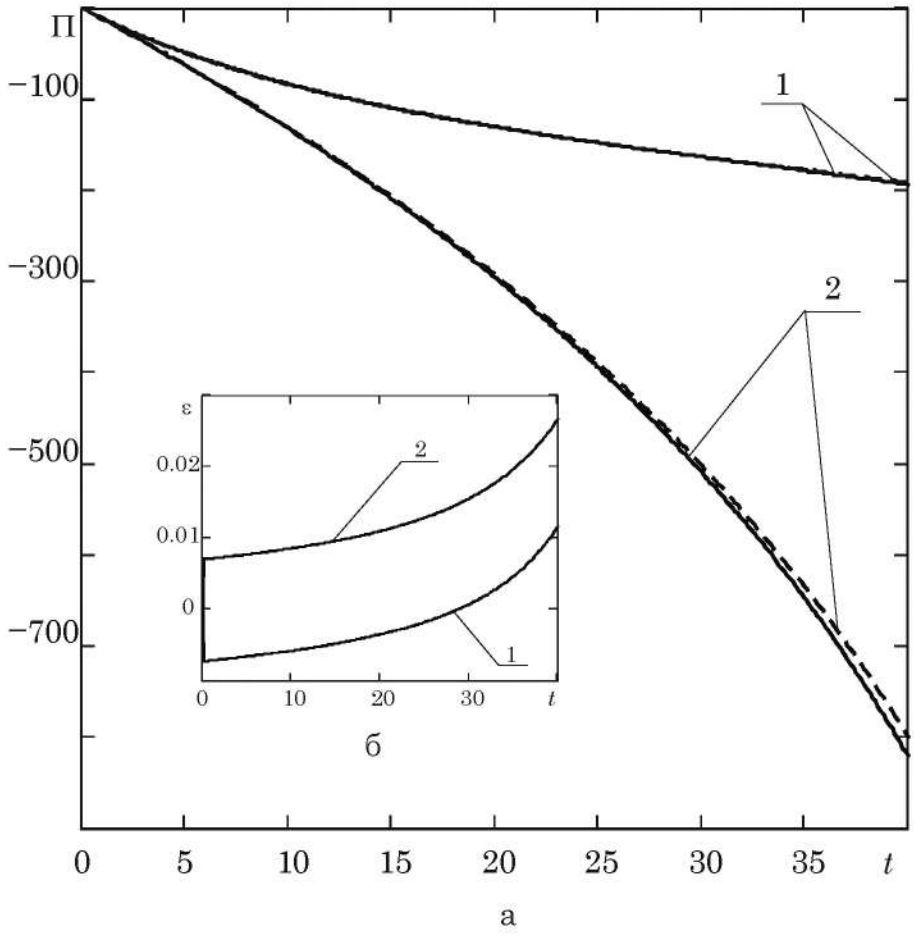


Рис. 12.28. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при Re = 5 – сплошные линии; 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.035$; 2 – течение в канале постоянной ширины; б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы, от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при Re = 5: 1 – в канале с $b = 0.035$; 2 – $b = 0$.

При увеличении числа Рейнольдса до 150 влияние инерционных сил возрастает на протяжении канала, где средняя скорость течения уменьшается (рис. 12.27), безразмерное давление, вычис-

ленное с учетом инерционных сил, по абсолютной величине меньше, чем П, вычисленное без такого учета (рис. 12.29).

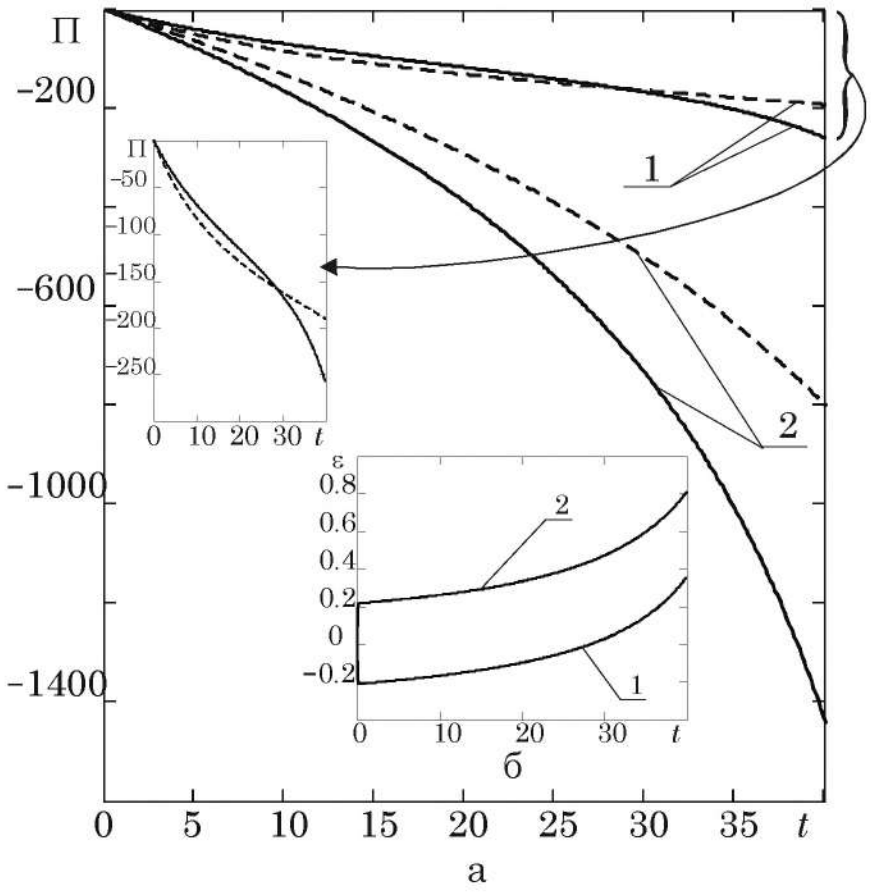


Рис. 12.29. Распределение вдоль соосного конического канала с параметрами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$ при конфузорном течении: а – безразмерного давления, рассчитанного без учета инерционных свойств – штриховые линии и с учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения при Re = 150 – сплошные линии; 1 – в канале с линейно увеличивающейся шириной при $b = 0.035$; 2 – течение в канале постоянной ширины; б – относительных отклонений безразмерного давления, рассчитанного с учетом инерционной силы, от безразмерного давления, рассчитанного без этого учета при Re = 150: 1 – в канале с $b = 0.035$; 2 – $b = 0$.

Затем вдоль течения средняя скорость начинает возрастать и часть энергии напряженного состояния жидкости переходит в кинетическую энергию, вследствие чего инерционная составляющая

безразмерного градиента давления становится отрицательной, что увеличивает абсолютное значение общего градиента давления (рис. 12.30). В итоге, безразмерное давление, рассчитанное с учетом инерционных сил, уменьшается более интенсивно, чем П, рассчитанное по выражению (12.28) (рис. 12.29), и на выходе из канала значение (12.29) значительно меньше, чем значение (12.28).

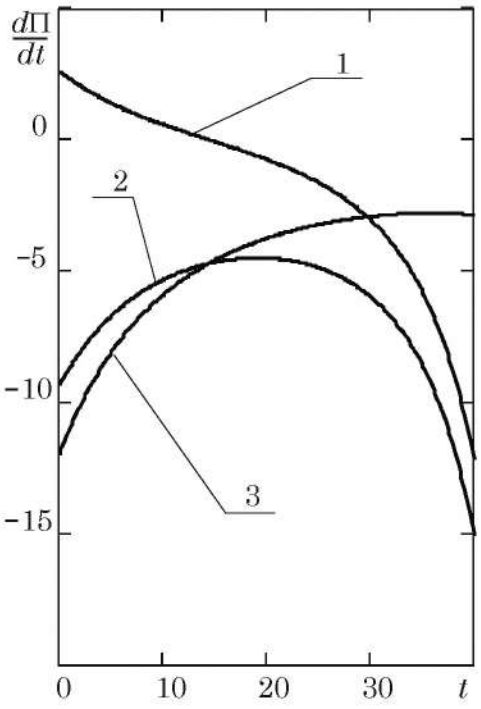


Рис. 12.30. Распределение безразмерных величин при конфузорном течении в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$, $b = 0.035$ и числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 150$. 1 – инерционная составляющая градиента давления; 2 – градиент давления; 3 – диссипативная составляющая градиента давления.

Последней из рассмотренных геометрий присуща еще одна особенность, а именно, при течении в таком канале зависимости координаты локализации минимальных значений средней скорости и скорости сдвига на границе канала от параметра b не монотонны (рис. 12.31). Это связано с зависимостью координаты локализации поперечного сечения канала с максимальной площадью от параметра b, которая, очевидно, будет повторять кривую 1 на рисунке 12.31. Если увеличивать b, начиная от значения b_v, то интенсивность увеличения поверхности поперечного сечения канала возрастает с увеличением t (рис. 12.32), и локализация максимального значения смещается в сторону выхода из канала. Координата t максимальной площади поперечного сечения выхода из канала не достигает, поскольку при достижении некоторого значения b более интенсивно увеличивается площадь поперечного сечения с меньшими значениями координаты t, чем уже достигнутые (рис. 12.32), и локализация максимального значения площади

поверхности поперечного сечения смещается к входу в канал. Вследствие этого кривая $t_{v\min}(b)$ имеет немонотонный характер.

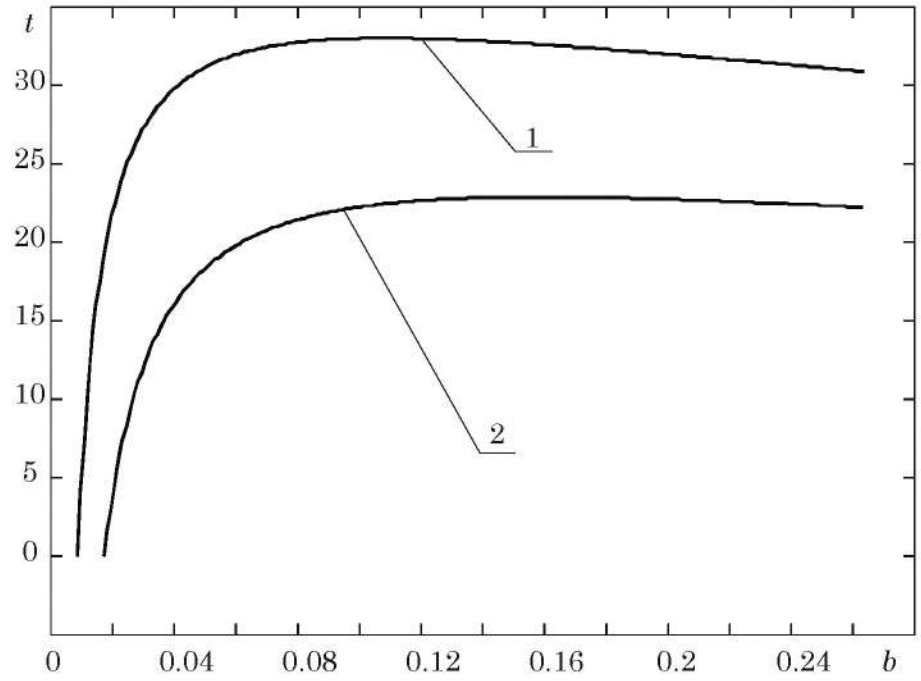
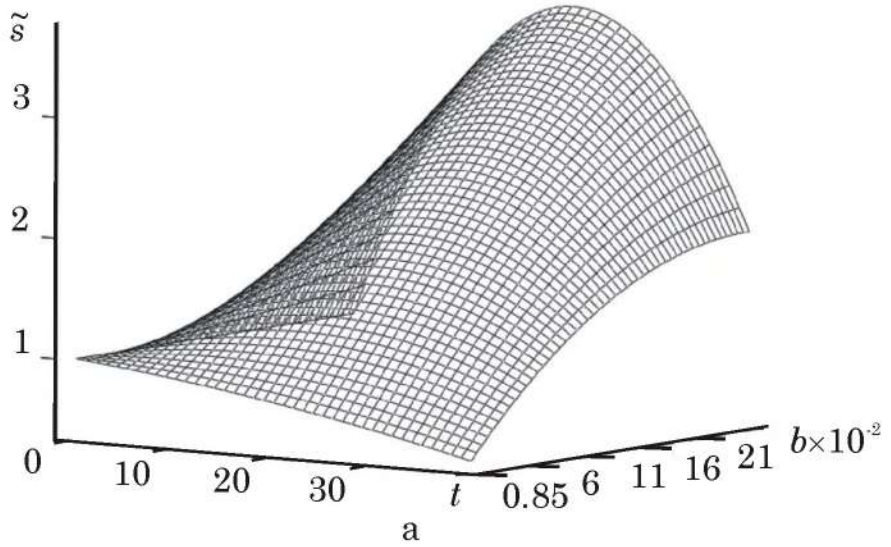
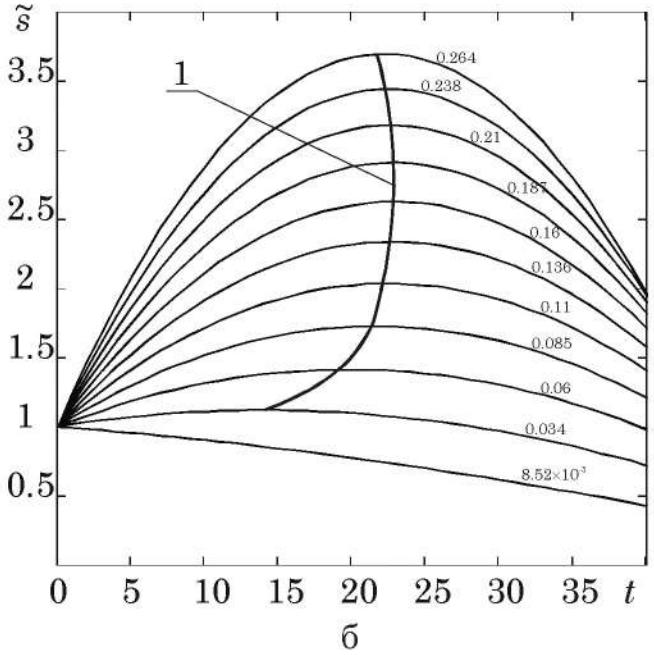


Рис. 12.31. Зависимость безразмерной продольной координаты локализации минимального значения скорости при течении в соосном коническом канале с размерами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$ от параметра $b - 1$ и зависимость безразмерной продольной координаты локализации минимального значения скорости сдвига на границе канала от параметра $b - 2$.

Ранее мы выяснили, что для одинаковых значений b выполняется неравенство $t_{v\min} < t_{s\min}$, и по причинам, уже описанным ранее, максимальное значение $t_{s\min}$ достигается при меньшем значении b, чем значение b, при котором $t_{v\min}$ максимально (рис. 12.31). Эти значения b можно определить из равенств $\frac{dt_{\bar{v}\min}}{db} = 0$ и $\frac{dt_{s\min}}{db} = 0$. В нашем случае они равны $b_{ts} = 0.10306$ и $b_{tv} = 0.1645$. Зависимость скорости сдвига на стенке канала от t и b показаны на рисунке 12.33.



а



б

Рис. 12.32. Зависимость безразмерной относительной площади поперечного сечения соосного конического конфузора с параметрами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$ – $\tilde{s}$ от безразмерной продольной координаты t и параметра b – а; б – зависимость безразмерной площади поперечного сечения соосного конического конфузора от безразмерной продольной координаты t для различных параметров b; 1 – кривая локализации максимального значения площади поперечного сечения канала.

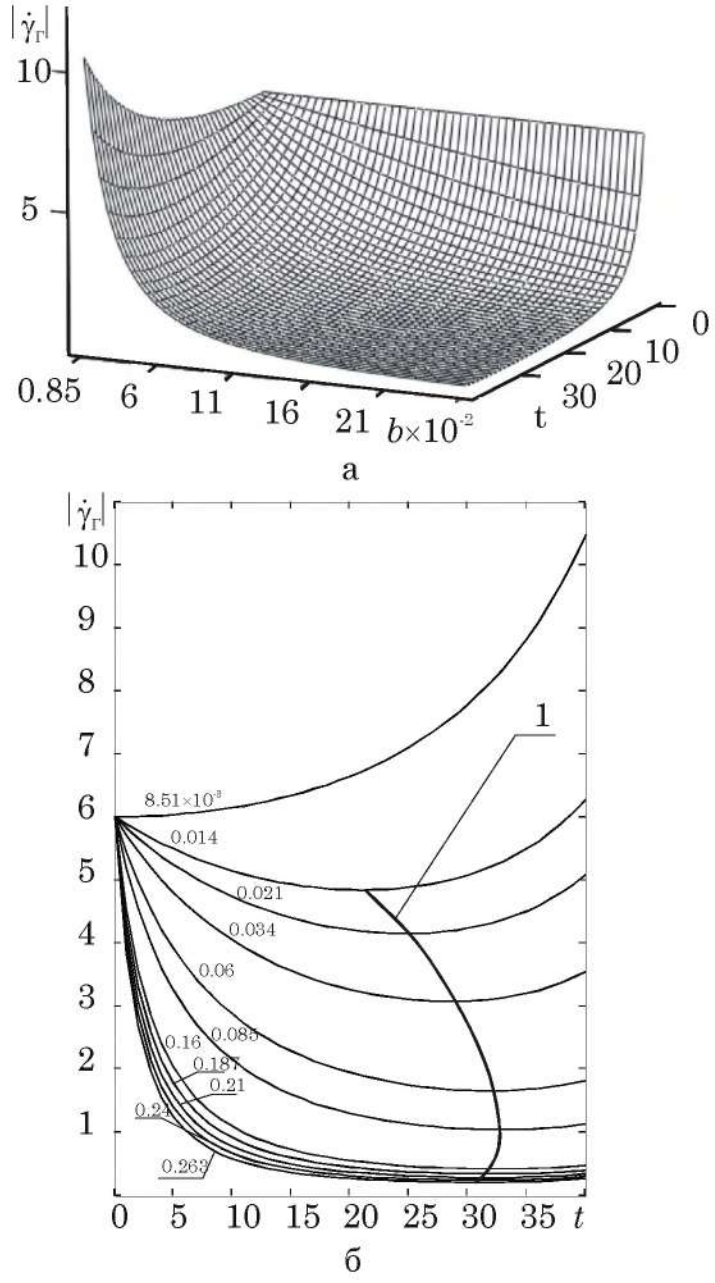


Рис. 12.33. Зависимость безразмерной скорости сдвига на границе соосного конического конфузора с параметрами $\xi_0 = 20$, $\xi_1 = 60$, $\alpha = 30°$ от безразмерной продольной координаты t и параметра b – а; б – зависимость безразмерной скорости сдвига на границе соосного конического конфузора от безразмерной продольной координаты t для различных параметров b; 1 – кривая локализации минимального значения скорости сдвига на границе канала.

Исследованные выше варианты течения представляют практически все возможные случаи распределения скорости жидкости при конфузорном течении в соосном коническом канале с линейно изменяющейся шириной вдоль течения. При этом мы не изменяли величину угла раскрытия внешней границы канала, но изменение этого или других параметров не приведут к качественно новым зависимостям в распределении скорости и давления в канале, а внесут лишь количественные изменения.

Заметим, что если выбрать значение полуугла раскрытия внешнего конуса равным 90°, то получим решение задачи сходящегося радиального течения между плоскостью и конической поверхностью, расположенной над ней и раскрытой в сторону от нее.

Сравним безразмерные давления на выходе из канала (перепад давления) с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$ и различными полууглами раскрытия внешнего конуса: $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 90°$. Зададим изменение параметра b в пределах [–0.0262; 0.2126], что соответствует интервалу изменения полуугла раскрытия внутренней конической поверхности [28.5°, 42°], а число Рейнольдса будет меняться в интервале [0, 150].

Поверхности, отображающие зависимость перепада безразмерного давления в канале от параметров b и Re, представлены на рисунке 12.34. Они расположены достаточно близко друг к другу при любых значениях Re и b из области определения П, что подтверждает ранее сделанное заключение о характере зависимости $\Pi(\alpha)$. Относительные же отклонения могут достигать значительной величины (рис. 12.35), особенно в области больших значений b и Re.

Заметим, что зависимость безразмерного давления на выходе из канала от числа Re в соответствии с (12.29) линейная (рис. 12.34). В области отрицательных значений параметра b, т.е. для каналов с уменьшением ширины вдоль течения, зависимость $\Pi(b)$ достаточно резкая (рис. 12.34). В области положительных значений b эта зависимость слабая. Это происходит, как мы видели ранее, потому, что в каналах с увеличивающейся шириной вдоль течения средняя скорость незначительно изменяется вдоль течения (рис. 12.36), и в со-

ответствии с (12.27), некоторое увеличение $\tilde{h}(t)$ не приведет к значительным отклонениям в градиенте давления. В области отрицательных значений b средняя скорость прогрессивно увеличивается к выходу из канала (рис.12.36), и в соответствии с (12.27) уменьшение $\tilde{h}(t)$ будет приводить к значительному изменению градиента

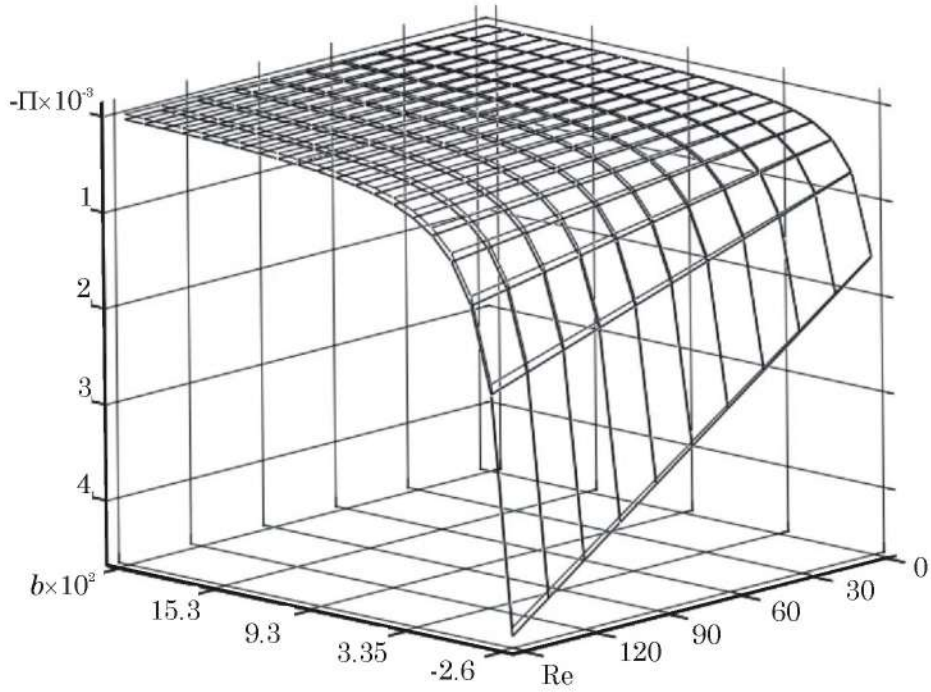


Рис. 12.34. Зависимость перепада безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале с параметрами: $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$ от числа Re и параметра b. Нижняя поверхность для $\alpha = 90°$, верхняя для $\alpha = 30°$.

давления, и, как следствие, к большей зависимости $\Pi(b)$ (рис. 12.34).

Наибольшее относительное отклонение безразмерных давлений на выходе из канала наблюдается в области положительных b и больших Re. Это связано с тем, в области максимальных значений параметра b наблюдается наибольшее отличие средних безразмерных скоростей при течении в каналах с полууглами раскрытия $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 90°$ (рис. 12.36).

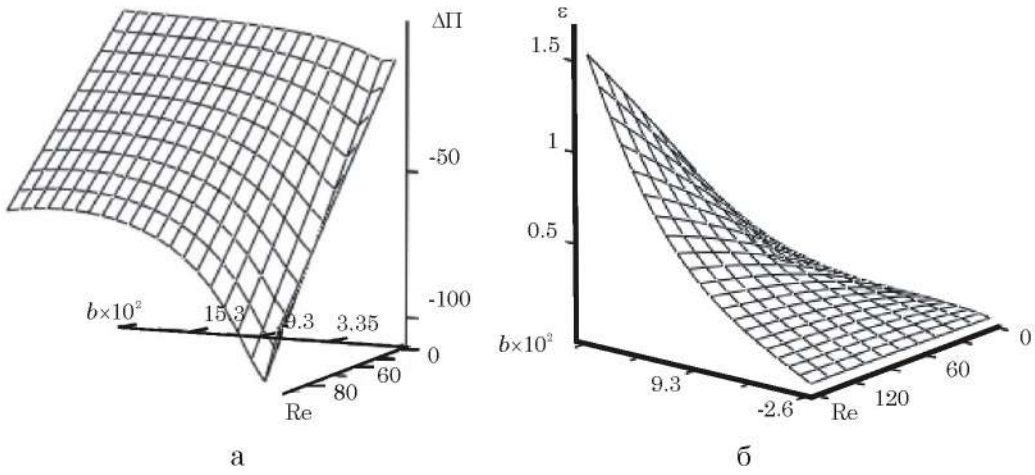


Рис. 12.35. Зависимость абсолютного – а и относительного – б отклонений между безразмерными давлениями на выходе из соосного конического конфузора с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$ и полууглами раскрытия внешней границы 30° и 90° от числа Re и параметра b.

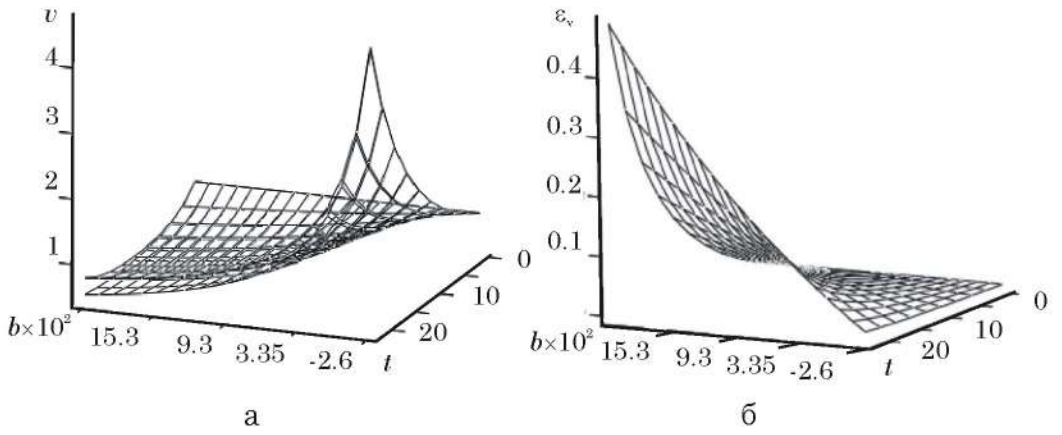


Рис. 12.36.Зависимость средней безразмерной скорости от безразмерной продольной координаты t и параметра b – а: верхняя поверхность для $\alpha = 30°$, нижняя для $\alpha = 90°$. б – зависимость относительного отклонения между средними безразмерными скоростями при конфузорном течении в соосном коническом канале с параметрами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 30$ и полууглами раскрытия внешней границы 30° и 90° от t и параметра b.

12.5. Условия, при которых можно пренебречь инерционными свойствами конфузорного ламинарного течения в соосном коническом канале переменной ширины

Число, предел ставшего, символически представляется уже не образом фигуры, а образом уравнения.

О. Шпенглер

Выяснив основные особенности ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах переменной ширины, давайте определим характерные значения чисел Рейнольдса, при которых можно пренебречь влиянием инерционных сил на перепад давления в канале. В качестве значимой величины примем относительное отклонение перепада давления в канале, вычисленное без учета инерционных сил, от перепада давления, вычисленного с их учетом, равное 5 %, т.е. при $\varepsilon_F \le 0.05$ для расчета давления можно использовать выражение (12.28).

Ранее мы определили ε_F как отношение $\dfrac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}}$ (9.119), что приводит к выражению

$$\varepsilon_F(\xi) = \frac{\dfrac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1 - \left[\dfrac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+bt)^2\left[2(\xi_1 - t) - (1+bt)\mathrm{ctg}\,\alpha\right]}\right]^2\right\}}{\dfrac{3(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}{1+b\xi_1}\left[E_1(t) - E_2(t)\right]}, \qquad (12.51)$$

где $E_1(t) = \dfrac{(2+b\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^2}{2(1+b\xi_1)^2}\ln\dfrac{2(\xi_1 - t) - (1+bt)\mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+bt)(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}$,

$$E_2(t) = \frac{bt}{1+bt}\left[\frac{2+bt}{1+bt} + \frac{2+b\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+b\xi_1}\right].$$

Использовать выражение (12.51) для оценки влияния инерционных сил на перепад давления в канале неудобно из-за его гро-

моздкости, поэтому мы попробуем получить более простые и удобные выражения.

При исследовании свойств конфузорного течения в соосных конических каналах мы видели, что функция $\varepsilon_F(t)$ достигает своего максимума на входе в канал либо на выходе из него, а между значениями $\varepsilon_F(0)$ и $\varepsilon_F(\xi_1 - \xi_2)$ функция $\varepsilon_F(t)$ является монотонной (рис. 12.9, 12.10, 12.17, 12.22, 12.25, 12.28, 12.29). Поэтому, определив значения $\varepsilon_F(0)$ и $\varepsilon_F(\xi_1 - \xi_2)$, выбрав большее из них, найдем именно для него величину Re_1, то для всех $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_1$ уверенно можно пренебрегать инерционными силами при вычислении перепада давления в канале.

Сначала давайте рассмотрим отношение (12.51) для течения в канале с уменьшающейся шириной, т.е. при $b < 0$ вычислим значение $\varepsilon_F(t)$ при $t \to 0$. Прямая подставка $t = 0$ приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности применим к (12.51) правило Лопиталя и вычислим предел при $t \to 0$, после чего получим значение

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon_F(t) = -\frac{\mathrm{Re}\left(b\xi_1 - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1\right)}{6\left(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}. \qquad (12.52)$$

Данное выражение имеет такую же структуру, как и выражение (10.75). Можно сказать, что эти соотношения совпадают с точностью до параметров обезразмеривания. Это происходит вследствие того, что градиенты безразмерного давления и их компоненты при диффузорном и конфузорном течении в одном и том же соосном коническом канале и на одной и той же координате ξ либо t будут пропорциональны друг другу.

Легко проверить, что значение $\varepsilon_F(0)$, вычисленное по (12.52) хорошо согласуется со значением $\varepsilon_F(0)$, полученным во всех ранее рассмотренных случаях. Заметим, что если в (12.52) положить $b = 0$, то получим значение $\varepsilon_F(0)$ для течения в канале с параллельными границами. Если положить $\alpha = 90°$, придем к выражению для сходящегося течения между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной к ней

$$\varepsilon_{F_{\alpha=90^\circ}}(0) = -\mathrm{Re}\frac{b\xi_1 - 1}{12\xi_1}, \tag{12.53}$$

из которого получим при $b = 0$ выражение для сходящегося радиального течения между параллельными дисками

$$\varepsilon_F = \frac{\mathrm{Re}}{12\xi_1}. \tag{12.54}$$

Принимая величину существенного отклонения в расчете безразмерного давления с учетом инерционных сил, возникающих за счет изменения площади поперечного сечения канала, от значения безразмерного давления, полученного без учета сил инерции, равной n %, получим из (12.52) для Re_1 выражение

$$\mathrm{Re}_1 = 0.06n\left|\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{b\xi_1 - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1}\right|. \tag{12.55}$$

При $n = 5\%$ получим

$$\mathrm{Re}_1 = 0.3\left|\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{b\xi_1 - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1}\right|. \tag{12.56}$$

Интересно отметить, что последняя величина Re_1 ровно в 20 раз меньше, чем число Re′, определяемое (12.49).

Заметим также, что выражение (12.56) с точностью до параметров обезразмеривания совпадает с (10.76).

Из (12.56) для течения между плоскостью и конусом, т.е. при $\alpha = 90°$, получим

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{0.6\xi_1}{|b\xi_1 - 1|}, \tag{12.57}$$

а при сходящемся течении между дисками

$$\mathrm{Re}_1 = 0.6\xi_1. \tag{12.58}$$

Определим значение ε_F на выходе из канала, т.е. при $t \to \xi_1 - \xi_0$. Проведенные расчеты показали, что для различных отрицательных значений b величина ε_F находится вблизи некоторой постоянной величины, и при увеличении абсолютного значения b стремится к ней.

Понятно, что при уменьшении ширины канала на его выходе $\varepsilon_F(t \to \xi_1 - \xi_0)$ будет стремиться к значению ε_F при $\tilde{h}(\xi_0) = 0$. Безразмерная ширина канала на выходе определяется как $\tilde{h}(\xi_0) = 1 + b(\xi_1 - \xi_0)$, откуда, определив b как $b = \dfrac{\tilde{h}(\xi_0) - 1}{\xi_1 - \xi_0}$, подставим его в (12.51) и вычислим предел (12.51) при $\tilde{h}(\xi_0) \to 0$. Прямая подстановка $\tilde{h}(\xi_0) = 0$ приводит к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, которую, как и ранее, раскрываем с помощью правила Лопителя и, вычисляя предел при $\tilde{h}(\xi_0) \to 0$, получим

$$\lim_{\tilde{h}(\xi_0)\to 0} \varepsilon_F\left[\tilde{h}(\xi_0)\right] = \varepsilon_F(\xi_0) = \mathrm{Re}\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{24(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}. \qquad (12.59)$$

Если в (12.59) положить $\alpha = 90°$, получим значение $\varepsilon_F(\xi_0)$ для радиального сходящегося течения между плоскостью и круглой конической поверхностью с осью, перпендикулярной к плоскости, и уменьшающейся шириной канала вдоль течения (рис. 6.3а)

$$\varepsilon_{F_{\alpha=90^\circ}}(\xi_0) = \frac{\mathrm{Re}\,\xi_1}{12(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}. \qquad (12.60)$$

Принимая в качестве значимой величины отклонение, равное n%, из (12.59) получим

$$\mathrm{Re}_1 = 0.24n\frac{(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}, \qquad (12.61)$$

а из (12.60) получим для $\alpha = 90°$

$$\mathrm{Re}_1 = 0.12n\frac{(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}{\xi_1}. \qquad (12.62)$$

И тогда для конкретного значения и, например, для $n = 5\%$ получим

$$\mathrm{Re}_1 = 1.2\frac{(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}, \qquad (12.63)$$

и соответственно для $\alpha = 90°$

$$\mathrm{Re}_1 = 0.6\frac{(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}{\xi_1}. \qquad (12.64)$$

Поскольку выражения (12.56) и (12.63) достаточно просты для вычисления, мы для определения критериального значения числа Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать инерционными свойствами, возникающими за счет увеличения средней скорости при течении в коаксиальном коническом канале с уменьшающейся шириной на любой радиальной координате, будем выбирать наименьшую из них, т.е

$$\mathrm{Re}_1 = \min\left\{0.3\left|\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{b\xi_1 - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1}\right|, 1.2\frac{(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}\right\}. \qquad (12.65)$$

Выражение (12.61) и все выражения, получаемые из него, определяют значения чисел Рейнольдса, вплоть до которых можно пренебрегать динамической составляющей при вычислении перепада давления на всей длине канала независимо от величины числа (12.55).

Рассмотрим течение в канале с увеличивающейся шириной. Очевидно, что выражение для вычисления ε_F при $t \to 0$ будет в этом случае совпадать с (12.52), и тогда критическое значение числа Рейнольдса будет задаваться соотношениями (12.55) и (12.56).

Получить простое соотношение для расчета ε_F при $t \to \xi_1 - \xi_0$ нет возможности, но аналогично тому, как мы поступали в разделе 9.11 девятой главы, можно и здесь оценить значение ε_F на выходе из канала с увеличивающейся шириной.

Для этого вычислим предел $\lim\limits_{\xi_1 \to \xi_0} \varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0)$. Прямая подстановка ξ_0 вместо ξ_1 в (12.51) приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую раскроем с помощью правила Лопиталя

$$\varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0) = \lim_{\xi_1 \to \xi_0} \varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0) =$$

$$= \lim_{\xi_1 \to \xi_0} \left| \frac{\dfrac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1 - \left[\dfrac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+bt_1)^2\left[2(\xi_1 - t_1) - (1+bt_1)\mathrm{ctg}\,\alpha\right]}\right]^2\right\}}{\dfrac{3(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha)}{1+b\xi_1}\left[E_1(t_1) - E_2(t_1)\right]} \right| \Rightarrow \quad (12.66)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Правило} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{Re}_1\left[2 - b(4\xi_0 - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\right](1+b\xi_0)^2}{6(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\left[2(1+b\xi_0)^2 - b\xi_0(1-b)\mathrm{ctg}\,\alpha\right]},$$

где $t_1 = \xi_1 - \xi_0$.

Заметим, что если в (12.66) положить $b = 0$, то мы получим выражение (9.123), найденное нами для ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины, т.е. для выражения (12.66) выполняется предельный переход к ранее полученному результату, относящемуся к более простому случаю течения.

Принимая значимое значение для ε_F равное n %, из (12.66) определим значение числа Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать динамической составляющей давления при его расчете на выходе из соосного конического конфузора с линейно увеличивающейся шириной в случае ламинарного течения, т.е. для случая, когда течение в канале можно с заданной точностью считать безинерционным

$$\mathrm{Re}_1 = 0.06n \frac{(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha)\left[2(1+b\xi_0)^2 - b\xi_0(1-b)\mathrm{ctg}\,\alpha\right]}{\left[2 - b(4\xi_0 - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\right](1+b\xi_0)^2}. \quad (12.67)$$

Для того, чтобы выбрать число Рейнольдса, вплоть до которого можно пренебрегать динамической составляющей давления при его расчете на выходе из соосного конфузора как с увеличивающейся, так и с уменьшающейся шириной, необходимо взять наименьшее из значений (12.61) и (12.67), которое, очевидно, будет соответствовать наибольшему значению одного из относительных отклонений (12.59) или (12.66).

При фиксированном значении безразмерной координаты входа в конфузор выражение (12.59) будет иметь большее значение на значительной части области определения, задаваемой параметрами b и ξ_0 (рис. 12.37), поэтому Re_1, определенное по (12.61), почти всегда будет меньше (12.67), и его можно использовать для выполнения оценок. Величина (12.67) будет меньше (12.61) только при малых значениях ξ_0 и для наибольших по модулю отрицательных значениях b (рис. 12.37).

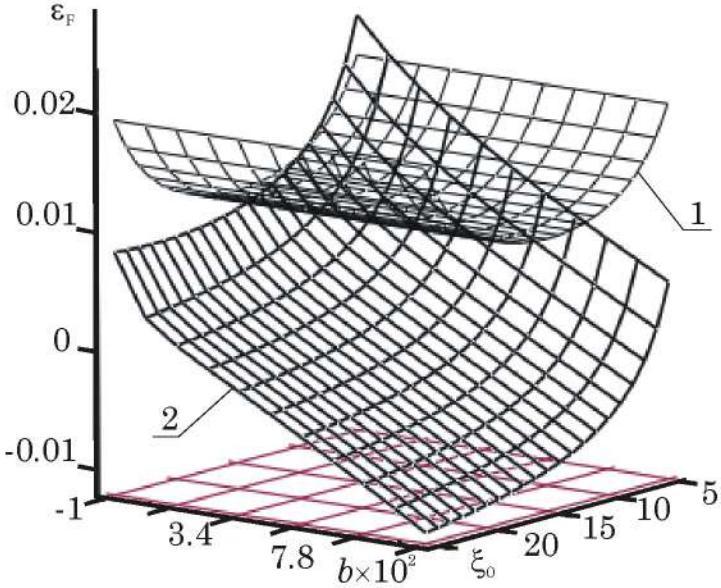


Рис. 12.37. Зависимость относительного отклонения безразмерного давления на выходе из соосного конического конфузора, вычисленного с учетом характерной инерционной силы от его диссипативной составляющей от параметров b и ξ_0. 1 – в канале с уменьшающейся шириной вдоль течения (12.59); 2 – распределение (12.66).

Ранее при анализе распределения безразмерного давления в разделе 12.3 мы видели, что во всех рассмотренных случаях течения с увеличивающейся шириной значение $\varepsilon_F(\xi_0)$ близко к значению отношения (9.123) для течения в канале с постоянной шириной (рис. 12.9, 12.10). В таких случаях для определения критического значения Re_1 мы можем использовать соотношение (9.126). В тех же случаях, когда отношение (12.51) на выходе из канала сильно отличается от значения $\varepsilon_F(\xi_0)$ в канале постоянной ширины (рис. 12.17), для определения Re_1 можно использовать выражение (12.56), т.е.

$$\mathrm{Re}_1 = \min\left\{\left|0.3\left(2\xi_0 - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\right|, 0.3\left|\frac{2\xi_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha}{b\xi_1 - b\,\mathrm{ctg}\,\alpha - 1}\right|\right\}. \qquad (12.68)$$

12.6. Диапазон чисел Рейнольдса в котором можно пренебречь диссипативными свойствами при расчете перепада давления для ламинарного течения в соосном коническом конфузоре переменной ширины

Цифры – судьбы, забитые в жесть

А. Новиков

В предыдущем разделе мы определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в соосном коническом конфузоре переменной ширины. Это возможно в тех случаях течения, когда в выражении (12.29) первый член, показывающий компоненту безразмерного давления, определяемую трением на границах канала, значительно превосходит второй член, определяющий динамическую компоненту давления. Но, очевидно, могут существовать значения чисел Рейнольдса, при которых второй член (12.29) будет значительно превосходить первый.

В данном разделе мы определим диапазон чисел Re, в котором при расчете давления в коническом соосном конфузоре переменной ширины можно с заданной точностью пренебречь изменением давления за счет трения на границах канала по сравнению с изменением его динамической составляющей, т.е. по сравнению с изменением давления в канале, происходящем за счет изменения средней по площади поперечного сечения скорости жидкости.

Также, как и в предыдущем разделе настоящей главы, определим относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативного члена от его динамической составляющей, как

$$\varepsilon_D(\xi)=\left|\frac{\Pi-\Pi_{din}}{\Pi_{din}}\right|=\left|\frac{\Pi_{dis}}{\Pi_{din}}\right|, \qquad (12.69)$$

где Π_{din} определяется выражением (12.33).

Сравнивая (12.69), (9.119) и (12.51), получим соотношение, связывающее величину относительного отклонения безразмерного давления от его диссипативной части со значением относительного

отклонения среднего безразмерного давления от его динамической части

$$\varepsilon_D(t) = \frac{1}{\varepsilon_F(t)}, \tag{12.70}$$

аналогичное (8.51) и (8.103) и (9.70). Следовательно, там, где величина ε_F имеет минимальное значение, ε_D имеет максимальное значение и наоборот. Это понятно потому, что П является суммой двух слагаемых, и там, где сумма имеет минимальное относительное отклонение от одного из них, она будет иметь максимальное относительное отклонение от другого.

Если ввести величину значимого отклонения равную n %, то критическое значение числа Рейнольдса, при превышении которого можно пренебрегать трением, рассчитывая безразмерное давление в конфузоре, будет определяться из соотношения

$$\varepsilon_D \le \frac{n}{100}. \tag{12.71}$$

Используя (12.70) из соотношения (12.52), получаем величину относительного отклонения безразмерного давления от его динамической компоненты на входе в канал

$$\varepsilon_D(0) = \frac{1}{\varepsilon_F(0)} = \frac{6(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha)}{\mathrm{Re}_1\left|b\xi_1 - b\operatorname{ctg}\alpha - 1\right|}, \tag{12.72}$$

которое при $b = 0$ переходит в (12.72).

Далее из (12.72) с помощью (12.71) находим величину числа Рейнольдса, начиная с которого можно с точностью n % пренебрегать трением на стенках канала при вычислении давления вблизи входа в канал

$$\mathrm{Re}_1 \ge \frac{600(2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha)}{n\left|b\xi_1 - b\operatorname{ctg}\alpha - 1\right|}, \tag{12.73}$$

и если в этом выражении положить $b = 0$, получим выражение (12.73), а при $\alpha = 90°$ мы получаем выражение для сходящегося течения между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной к ней

$$\mathrm{Re}_1 \geq \frac{1200\xi_1}{n\left|b\xi_1 - 1\right|}, \tag{12.74}$$

и, наконец, положив в (12.74) $b = 0$, получим одно из выражений (9.137).

Для того, чтобы найти значение числа Рейнольдса, начиная с которого можно пренебрегать трением на границах канала при расчете давления на выходе из канала, необходимо рассмотреть отдельно течение в канале с увеличивающейся шириной и в канале с уменьшающейся шириной вдоль течения.

Для каналов с уменьшающейся шириной из выражений (12.32), (12.70) и (12.71), получаем

$$\mathrm{Re}_1 \geq \frac{2400}{n}\frac{(\xi_1 - \xi_0)\xi_0}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}, \tag{12.75}$$

а из соотношения (12.66) получаем выражение

$$\mathrm{Re}_1 \geq \frac{600(2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha)\left[2(1+b\xi_0)^2 - b\xi_0(1-b)\operatorname{ctg}\alpha\right]}{n\left[2 - b(4\xi_0 - 3\operatorname{ctg}\alpha)\right](1+b\xi_0)^2}, \tag{12.76}$$

которое можно использовать как для каналов с увеличивающейся шириной, так и для каналов с уменьшающейся шириной вдоль течения.

Положив в (12.75) $\alpha = 90°$, мы получаем выражение для сходящегося течения между плоскостью и конусом, раскрытым в сторону от плоскости, и с осью, перпендикулярной к ней (рис. 6.3)

$$\mathrm{Re}_1 \geq \frac{1200}{n}(\xi_1 - \xi_0)\frac{\xi_0}{\xi_1}, \tag{12.77}$$

а если положить $\alpha = 90$ в (12.76), то получим условие, в случае выполнения которого можно пренебречь трением при расчете перепада давления для сходящегося течения между плоскостью и конусом с осью, перпендикулярной к плоскости

$$\mathrm{Re}_1 \geq \frac{1200\xi_0}{n(1 - 2b\xi_0)}, \tag{12.78}$$

где b может быть как положительным, так и отрицательным.

Заметим, что при выполнении последних двух условий при вычислении перепада давления на всей длине канала можно пренебрегать трением в независимости от значения числа Re_1 на входе в канал, т.е. не обращая внимание на условие (9.73).

Итак, мы определили диапазоны изменения чисел Рейнольдса Re_1, в которых при расчете безразмерного давления для ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины можно пренебречь одной из его составляющих, либо необходимо учитывать обе. Выбирая существенным значением относительного отклонения безразмерного давления от его составляющих величину, равную n %, запишем диапазоны для критических чисел Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_1 \le 0.24n\frac{(\xi_1-\xi_0)\xi_0}{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha};$$

можно пренебрегать динамической составляющей при расчете перепада давления на всей длине канала с уменьшающейся шириной,

$$\mathrm{Re}_1 \le n\frac{6(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)\left[2(1+b\xi_0)^2-b\xi_0(1-b)\operatorname{ctg}\alpha\right]}{100\left[2-b(4\xi_0-3\operatorname{ctg}\alpha)\right](1+b\xi_0)^2};$$

можно пренебрегать динамической составляющей при расчете перепада давления на всей длине канала как с уменьшающейся шириной, так и с увеличивающейся шириной,

(9.79)

$$\mathrm{Re}_1 \ge \frac{2400}{n}\frac{(\xi_1-\xi_0)\xi_0}{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha};$$

можно пренебрегать диссипативной составляющей при вычислении перепада давления в конфузоре с уменьшающейся шириной,

$$\mathrm{Re}_1 \ge \frac{600(2\xi_0-\operatorname{ctg}\alpha)\left[2(1+b\xi_0)^2-b\xi_0(1-b)\operatorname{ctg}\alpha\right]}{n\left[2-b(4\xi_0-3\operatorname{ctg}\alpha)\right](1+b\xi_0)^2},$$

можно пренебрегать диссипативной составляющей при расчете перепада давления на всей длине канала как с уменьшающейся шириной, так и с увеличивающейся шириной.

Во всех остальных случаях при расчете перепада давления на всей длине соосного конического конфузора необходимо учитывать обе составляющие давления.

12.7. Некоторые случаи "безинерционных" течений в соосных конических конфузорах

Но это вещество нужно нам лишь для одной цели: чтобы могли предположить, что его нет, и утверждать, что тогда не будет и инерции.

В. де Ситтер

На рисунках 12.17 и 12.20 мы видели, что существуют ламинарные конфузорные течения в соосных конических каналах, при которых изменение динамической составляющей безразмерного давления на полной длине канала равно нулю. Рассматривая класс таких течений в разделе 10.8 десятой главы для соосных конических диффузоров, мы их определили как безинерционные течения.

Очевидно, что условием, которому должно подчиняться такое течение, является выражение

$$\Pi_{din}\left(\xi_1 - \xi_2\right) = 0. \qquad (12.80)$$

Если ширина канала вдоль течения изменяется линейно, то на выходе ширина канала будет равна: $\tilde{h}_1 = \tilde{h}\,(\xi_1 - \xi_0) = 1 + b(\xi_1 - \xi_0)$, и, подставляя это значение в (12.80), получим для определения $\tilde{h}_1$ алгебраическое уравнение четвертой степени

$$\left(\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_0\tilde{h}_1 - \tilde{h}_1^2\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 = 1. \qquad (12.81)$$

Геометрически приемлемым корнем уравнения (12.81) является значение

$$\tilde{h}_1 = \frac{\xi_0 - \sqrt{\xi_0^2 - 2\xi_1\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (12.82)$$

откуда получаем выражение для определения параметра b, при котором перепад давления в канале будет определяться только диссипативными свойствами течения

$$b_D = \frac{\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha - \sqrt{\xi_0^2 - 2\xi_1 \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}}{(\xi_1 - \xi_0)\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (12.83)$$

Заметим, что значение (12.83) также должно удовлетворять соотношению (12.7), т.е. не для всех значений параметров ξ_0, ξ_1 и α возможно безинерционное течение в соосном коническом конфузоре.

Из выражения (12.83) можно получить значение b_D в случае радиального сходящегося течения между плоскость и симметрично расположенным над ней конусом. Подставляя значение $\alpha = 90°$ в (12.83), мы придем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, раскрывая которую получим

$$b_{D90^\circ} = \frac{1}{\xi_0}. \qquad (12.84)$$

Значения b_D (12.83) и (12.84) определяют течение, при котором инерционная составляющая давления будет отсутствовать только на выходе из канала. Также, как при диффузорном течении, для течения в конфузоре возможно безинерционное течение на всей длине канала. Очевидно, что для этого площадь поперечного сечения канала не должна изменяться вдоль течения. Это означает, что безинерционное по всей длине канала диффузорное и конфузорное течение возможно только в геометрически идентичных каналах. Но поскольку параметры обезразмеривания при конфузорном и диффузорном течении различны, то и выражения для определения ширины канала формально будут отличаться друг от друга. Поэтому сейчас мы определим зависимость ширины канала от t для конфузорного полностью безинерционного течения. Изменение ширины канала вдоль течения будет определяться условием

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = 0, \qquad (12.85)$$

из (7.9) и (7.20) мы можем записать

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{h}(t)\left[2(\xi_1 - t) - \tilde{h}(t)\operatorname{ctg}\alpha\right]}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (12.86)$$

И поскольку относительная площадь поперечного сечения канала на его входе равна $\tilde{s}(0) = 1$, то из (12.86) мы имеем уравнение для определения $\tilde{h}(t)$

$$\tilde{h}^2 \operatorname{ctg}\alpha - 2\tilde{h}(\xi_1 - t) + 2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha = 0, \qquad (12.87)$$

решение которого записывается в виде:

$$\tilde{h}(t) = (\xi_1 - t)\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{(\xi_1 - t)^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2\xi_1 \operatorname{tg}\alpha + 1}. \qquad (12.88)$$

Заметим, что для сходящегося радиального течения между плоскостью и круглым конусом с осью, перпендикулярной к плоскости, безразмерная площадь поперечного сечения, как следует из (12.86), определится выражением

$$\tilde{s}_{90^\circ}(t) = \frac{\xi_1 - t}{\xi_1}\tilde{h}(t), \qquad (12.89)$$

и тогда изменение ширины канала для безинерционного течения в указанном случае определится выражением

$$\tilde{h}_{90^\circ}(t) = \frac{\xi_1}{\xi_1 - t}. \qquad (12.90)$$

12.8. Особенности расходно-напорной характеристики ламинарного течения в соосных конических конфузорах переменной ширины, рассчитанной с учетом инерционных свойств

Всякое описание физических результатов основано, в конечном счете, на обычном опыте, приспособленном к тому, чтобы разбираться в окружающем и прослеживать связь между причинами и следствиями.

Н. Бор

Решение задачи ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале, полученное нами в безразмерном виде

(12.26), (12.29) и (12.36), позволяет его исследовать независимо от конкретных значений физических параметров и геометрических размеров канала и изучать наиболее общие свойства течения.

В то же время при создании промышленных аппаратов и выборе технологических параметров производственных процессов необходимо рассчитывать конкретные физические переменные и параметры, такие, как скорость жидкости и перепад давления в проточных каналах оборудования. Например, при разработке экструзионных машин необходимо знать расходно-напорную характеристику формующего оборудования, неотъемлемой частью которого являются соосные конические каналы [7, 61].

Используя решение, полученное для задачи ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины с учетом характерной для конфузорных течений инерционной силы (12.29), построим расходно-напорную характеристику таких каналов при ламинарных течениях. Учитывая безразмерные переменные и параметры (12.10) и следуя правилу, представленному в (2.78), получим расходно-напорную характеристику для соосного конического конфузора переменной вдоль течения ширины и определенного параметрами: шириной канала на его входе – h_0, полууглом раскрытия внешней границы – α, значением b и радиальными координатами входа в канал и выхода из него – R_0 и R_1. В итоге получаем

$$\Delta P(Q)=\frac{\mu Q}{\pi h_0^3\sin\alpha}\left\{\frac{3(b\operatorname{ctg}\alpha+2)^2}{2(1+b\xi_1)^3}\ln\frac{2\xi_0-\left[1+b(\xi_1-\xi_0)\right]\operatorname{ctg}\alpha}{\left[1+b(\xi_1-\xi_0)\right](2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)}-\right.$$

$$\left.-\frac{3b(\xi_1-\xi_0)}{(1+b\xi_1)\left[1+b(\xi_1-\xi_0)\right]}\left[\frac{2+b\operatorname{ctg}\alpha}{1+b\xi_1}+\frac{2+b(\xi_1-\xi_0)}{1+b(\xi_1-\xi_0)}\right]\right\}+ \tag{12.91}$$

$$+\frac{\rho Q^2}{2\pi^2 h_0^4(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha)^2}\times$$

$$\times\left\{1-\left[\frac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{\left[1+b\left(\xi_1-\xi_0\right)\right]\left[2\xi_0-\left[1+b\left(\xi_1-\xi_0\right)\right]\operatorname{ctg}\alpha\right]}\right]^{-2}\right\}.$$

Кратко рассмотрим свойства зависимости (12.91) для жидкости с параметрами: $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3, при ее течении в соосном коническом конфузоре с геометрическими размерами: $h_0 = 0.01$ м, $R_0 = 0.1$ м, $R_1 = 0.4$ м, и для различных значений параметра b и объемного расхода Q.

Сначала выберем полуугол раскрытия внешней поверхности канала равным $\alpha = 60°$. В этом случае в области наибольших значений b зависимость $\Delta P(Q)$ явно немонотонная (рис. 12.38). Действи-

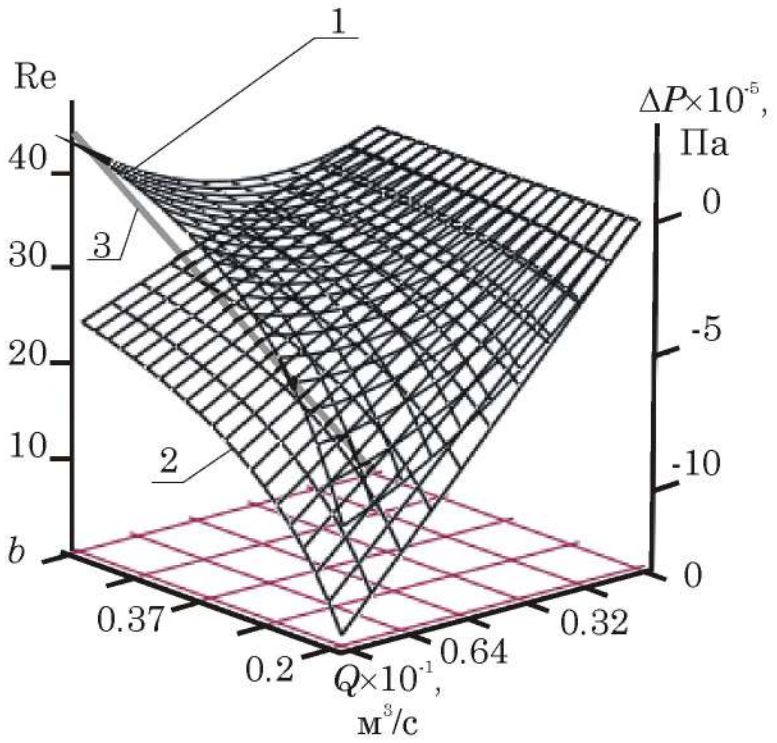


Рис. 12.38. Напорно-расходная характеристика соосного конического кофузора с геометрическими параметрами: $R_0 = 0.1$ м, $R_1 = 0.4$ м, $\alpha = 60°$ при течении жидкости с физическими свойствами: $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3. Параметр b изменяется в пределах [0.2; 0.54]. 1 – расчет с учетом инерционных свойств течения; 2 – расчет без учета инерционных свойств; 3 – зависимость числа Рейнольдса (12.10) от расхода жидкости Q.

тельно, при малых объемных расходах Q преобладают силы трения, и давление в канале P с увеличением Q уменьшается (модуль $|\Delta P|$ увеличивается), что достаточно хорошо прослеживается и из самой записи расходно-напорной характеристики (12.91), если ее несколько упростить, представив в виде

$$\Delta P(Q) = AQ + BQ^2. \tag{12.92}$$

Далее, вычисляя производную по Q, получаем соотношение

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial Q} = A + 2BQ, \tag{12.93}$$

из которого видим, что при малых значениях Q она будет стремиться к величине

$$\left.\frac{\partial \Delta P}{\partial Q}\right|_{Q=0} = A, \tag{12.94}$$

а это и означает, что при малых значениях Q в изменении ΔP будет преобладать диссипативная составляющая давления, которая всегда отрицательна, и давление будет при увеличении Q в интервале малых значений падать. Но при дальнейшем увеличении Q второй член в выражении (12.93) может стать преобладающим, и модуль перепада давления начнет уменьшаться с увеличением объемного расхода (рис. 12.38). Понятно, что такое возможно только при положительных значениях B, т.е. при таких значениях b, при которых площадь поперечного сечения на выходе из канала больше, чем на его входе. В этом случае часть кинетической энергии текущей жидкости переходит в потенциальную энергию внутренних напряжений, что и ведет к восстановлению давления на выходе из канала. А это в свою очередь означает, что при больших значениях b конфузорное течение жидкости в рассматриваемом канале приобретает свойства течения несжимаемой жидкости в расходящемся канале.

Заметим, что, используя (12.93), мы можем определить значение расхода Q_e, при котором перепад давления в канале будет

наибольшим, конечно, только для тех значений параметра b, для которых зависимость $\Delta P(Q)$ немонотонная

$$Q_e = -\frac{A}{2B}, \tag{12.95}$$

и тогда максимальный перепад давления определится из (12.92) как

$$\Delta P_{\max} = -\frac{A^2}{4B}. \tag{12.96}$$

Значения параметров A и B определяются из выражений (12.91) и (12.92).

Необходимо также отметить, что зависимость (12.91) не является нестационарной зависимостью, а представляет решение стационарной задачи при заданном объемном расходе жидкости Q.

При меньших значениях параметра b средняя скорость течения на выходе из канала увеличивается на меньшую величину по сравнению со средней скоростью на входе в канал, чем для уже рассмотренных значений параметра b. В этом случае потери динамического напора уже недостаточно для восстановления давления (рис. 12.38). Вследствие этого при малых положительных значениях b зависимость $\Delta P(Q)$ монотонно убывающая (рис. 12.38), но в некотором интервале положительных значений b перепад давления в канале, рассчитанный по (12.91), меньше, чем перепад давления, рассчитанный без учета инерционных свойств, т.е. при $\mathrm{Re} = 0$ (рис. 12.39).

При дальнейшем уменьшении b для некоторого его значения площадь поверхности поперечного сечения входа в канал и выхода из канала сравниваются, и влияние инерционной составляющей давления на величину его перепада в канале исчезает, т.е. перепад давления, вычисленный по (12.91) при любых значениях Re будет равен величине первого члена (12.91) (рис. 12.39). Значение b в этом случае определяется соотношением (12.83).

Дальнейшее уменьшение параметра b приводит к тому, что перепад давления, рассчитанный по (12.91), будет больше перепада

давления в канале, рассчитанного без учета характерной инерционной силы (рис. 12.39).

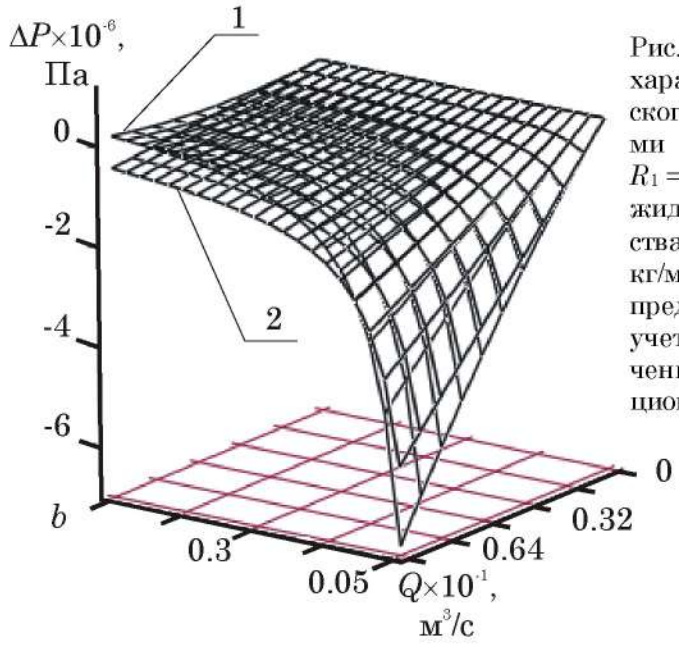


Рис. 12.39. Напорно-расходная характеристика соосного конического кофузора с геометрическими параметрами: $R_0 = 0.1$ м, $R_1 = 0.4$ м, $\alpha = 60°$ при течении жидкости с физическими свойствами: $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3. Параметр b изменяется в пределах [0.05; 0.54]. 1 – расчет с учетом инерционных свойств течения; 2 – расчет без учета инерционных свойств.

При отрицательных значениях параметра b отклонение между зависимостью (12.91) и ее первым членом увеличивается (рис. 12.40) вследствие роста средней по поверхности поперечного сечения канала скорости на выходе из канала и квадратичной зависимости динамической компоненты давления от средней скорости.

Для малых углов раскрытия внешней конической поверхности различие между зависимостью (12.91) и ее диссипативной частью увеличивается (рис. 12.41). При $\alpha = 15°$ перепад давления в канале, рассчитанный с учетом характерной инерционной силы, будет больше перепада давления, вычисленного при $\mathrm{Re} = 0$ для всех возможных значений параметра b (рис. 12.41). Это происходит потому, что для всех возможных значений b средняя по площади поверхности поперечного сечения скорость на выходе из канала будет больше средней скорости жидкости на его входе.

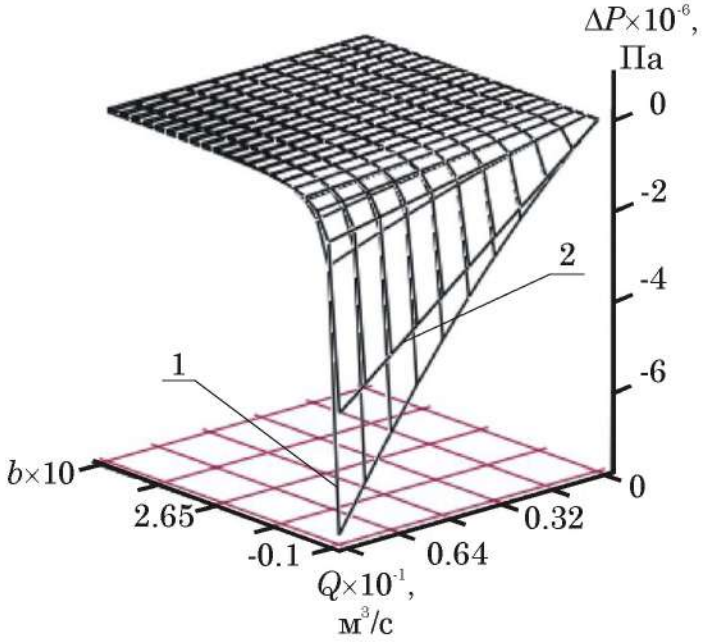


Рис. 12.40. Напорно-расходная характеристика соосного конического конфузора с геометрическими параметрами: $R_0 = 0.1$ м, $R_1 = 0.4$ м, $\alpha = 60°$ при течении жидкости с физическими свойствами: $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3. Параметр b изменяется в пределах [-0.01; 0.54]. 1 – расчет с учетом инерционных свойств течения; 2 – расчет без учета инерцион-

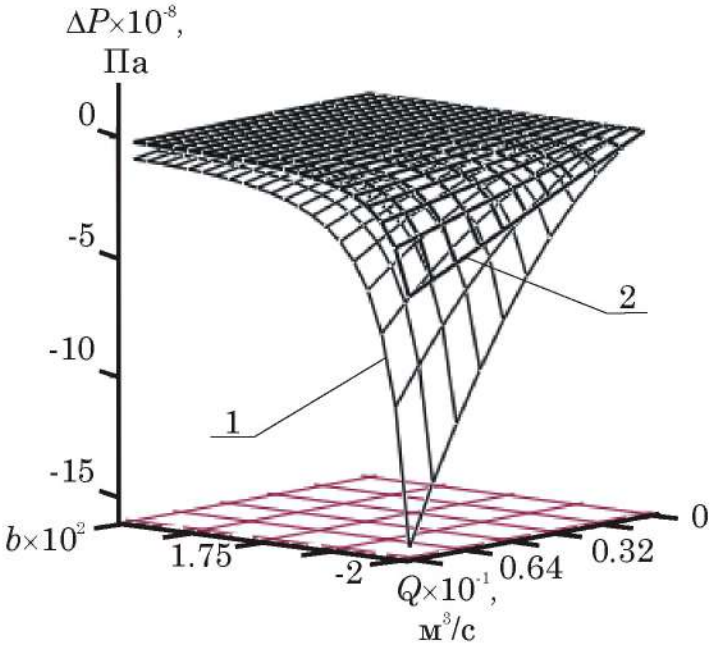


Рис. 12.41. Напорно-расходная характеристика соосного конического конфузора с геометрическими параметрами: $R_0 = 0.1$ м, $R_1 = 0.4$ м, $\alpha = 15°$ при течении жидкости с физическими свойствами: $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3. Параметр b изменяется в пределах [-0.02; 0.055]. 1 – расчет с учетом инерционных свойств течения; 2 – расчет без учета инерционных свойств; 3 – зависимость числа Рейнольдса (12.10) от расхода жидкости Q.

ГЛАВА 13

АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО КОНФУЗОРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ГРАНИЦ ПРИ ЧАСТИЧНОМ УЧЕТЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ В БИКОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Мы не будем здесь рассматривать вопрос о том, приемлемо ли это представление с точки зрения современных астрономических знаний.

А. Эйнштейн

13.1. Решение задачи ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной границ в биконических координатах

Если все вывести правильно, то так и получится.

Э. Резерфорд

Выражение (12.29), полученное при решении задачи конфузорного течения в соосном коническом канале с переменной вдоль течения шириной, позволяет определить распределение безразмерного давления во всем возможном диапазоне изменения параметров задачи, за исключением значения параметра b, при котором выражение (12.28) расходится, т.е. при $b = -1/\xi_1$. Мы уже в главе 7 рассматривали этот случай для выражения (7.37) и знаем, что он соответствует ламинарному течению в соосном коническом конфузоре, образованном поверхностями с общей вершиной (рис. 7.9).

Постановку задачи ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном поверхностями с общей

вершиной и пренебрежимо малыми числами Рейнольдса, мы рассмотрели в главе 7, и постановка со значимыми числами Рейнольдса не внесет новизны, поэтому решение указанной задачи с существенными числами Re найдем из ранее полученного решения задачи конфузорного ламинарного течения в соосных конических каналах переменной ширины, которые образованы поверхностями, не имеющими общей вершины (12.26), (12.28), (12.29), (12.33), (12.36).

Распределение скорости в канале будет очевидно такое же, как и при течении с исчезающе малыми значениями чисел Re. В связи с этим здесь рассмотрим только распределение безразмерного давления и его градиента. Подставляя значение $b=-1/\xi_1$ в (12.26), получим выражение для определения безразмерного градиента давления

$$\frac{d\Pi}{dt}=-\frac{12\xi_1^4}{(\xi_1-t)^4}-2\mathrm{Re}_1\frac{\xi_1^4}{(\xi_1-t)^5}. \qquad (13.1)$$

Начальное условие для (13.1) остается прежним

$$\Pi=0, \quad t=0. \qquad (13.2)$$

Первый член в правой части (13.1) – это диссипативная составляющая безразмерного градиента давления, а второй член – это динамическая его составляющая. В разделе 7.5 мы получили распределение безразмерного давления в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ при течении с $\mathrm{Re}=0$ (7.65), интегрируя первый член (13.1) с условием (13.2). А в разделе 12.3 двенадцатой главы мы записали выражение для распределения безразмерного давления при конфузорном течении в соосном коническом канале переменной ширины в виде суммы его компонент (12.29). Это позволяет и начальное условие (13.2) переписать в виде суммы компонент

$$\Pi_{dis}+\Pi_{din}=0, \quad t=0, \qquad (13.3)$$

где Π_{dis} – диссипативная составляющая безразмерного давления; Π_{din} – его динамическая составляющая. И поскольку на входе в канал перепад давления, вызванный трением жидкости о стенки ка-

нала, будет равен 0, то для выполнения (13.3) и соответственно (13.2) должно выполняться условие

$$\Pi_{din} = 0, \quad t = 0. \tag{13.4}$$

Это означает, что для того, чтобы получить распределение безразмерного давления вдоль течения нам необходимо проинтегрировать второй член (13.1) с условием (13.4)

$$\Pi_{din}(t) = -2\,\mathrm{Re}_1\,\xi_1^4 \int \frac{dt}{(\xi_1 - t)^5} = -\frac{1}{4(\xi_1 - t)^4} + C. \tag{13.5}$$

Константу интегрирования определяем из начального условия (13.4) и получаем распределение динамической составляющей безразмерного давления в рассматриваемом канале

$$\Pi_{din} = \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right]. \tag{13.6}$$

Суммируя полученный результат с (7.65), находим распределение безразмерного давления в соосном коническом конфузоре, образованном поверхностями с общей вершиной

$$\Pi = 4\xi_1\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}_1\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right]. \tag{13.7}$$

Сравним распределение безразмерного давления, полученное при решении задачи в биконической системе координат (13.7), с распределением, полученным в разделе 8.8 при решении исследуемой задачи в сферической системе координат.

13.2. Сравнение решений, полученных в биконической и сферической системах координат

Формулы и законы расстилают застывность над картиной природы.

О. Шпенглер

Рассмотрим течение в конфузоре с параметрами $\alpha_1 = 10°$, $\alpha = 25°$, что определяет координату входа в конфузор (7.66) – $\xi_1 = 3.73$; координатой выхода, равной $\xi_0 = \xi_1/3 = 1.24$, и числом Рейнольдса, равным $\mathrm{Re}_1 = 100$.

Здесь следует отметить, что значения чисел Рейнольдса в (13.7) и в (8.84) мы возьмем одинаковыми, т.е. не будем приводить их к одному масштабу скорости. Это мы вправе сделать потому, что различие в масштабах скорости незначительно и не превосходит 3 %. Действительно

$$\frac{V_{0D}}{V_{0S}} = \frac{2(\tau_1 - \tau_2)\xi_1^2}{(8\xi_1 - \mathrm{ctg}\alpha)\sin\alpha} = 0.973, \qquad (13.8)$$

и, поскольку множитель масштабного перехода для безразмерного давления, полученный в сферических координатах, будет величиной, обратной к (13.8), то (8.84) в масштабе, применяемом при решении задачи в биконических координатах, запишется в виде

$$\Pi_{Sb} = \frac{\mathrm{Re}_1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right] + \\ + \frac{\lambda + 6\xi_1^2}{3\xi_1^3}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^7\right]\frac{(2\xi_1 - \mathrm{ctg}\alpha)\sin\alpha}{2(\tau_1 - \tau_2)\xi_1^2}, \qquad (13.9)$$

т.е. вид динамического члена не изменился.

Сравнение показывает, что согласие между (13.7) и (8.84), взятом без переходного множителя лучше, чем между (13.7) и (13.9). Для выбранной геометрии и для числа $\mathrm{Re}_1 = 100$ относительное отклонение не превышает 0,5 %, в первом случае, а во втором – практически в 2 раза больше (рис. 13.1), но также невелико. Такое соотношение наблюдается для всех исследованных размеров канала и чисел Re_1. При увеличении Re_1 относительное отклонение (13.7) от (8.84) уменьшается, а при увеличении оно стремится к постоянной величине для всей длины канала (рис. 7.13), полученной в разделе 7.6 для случая течения с $\mathrm{Re}_1 = 0$.

В результате проведенного анализа мы можем заключить, что во всех практически интересных случаях конфузорного течения в соосных конических каналах, образованных поверхностями с об-

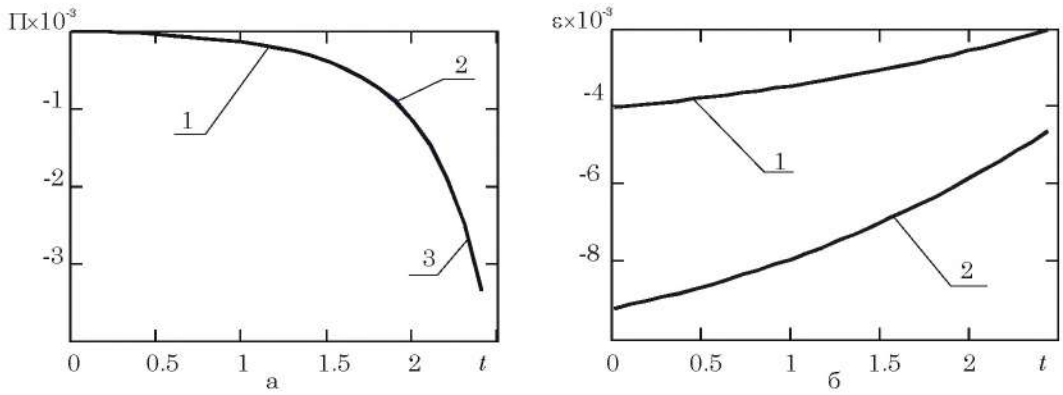


Рис. 13.1. Распределение вдоль течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной границ: а – безразмерного давления; 1 – решение, полученное в биконической системе координат; 2 – решение, полученное в сферических координатах.; 3 – распределение безразмерного давления, полученного в сферических координатах и показанного в масштабе, использованном при решении задачи в биконических координатах; б – распределение относительного отклонения зависимости 1 (а) от зависимости 2 (а) – 1; 2 – относительное отклонение зависимости 1 (а) от зависимости 3 (а).

щей вершиной, для определения перепада давления можно использовать выражение (13.7) или (8.84), а постоянную разделеня λ_C рассчитывать по соотношениям (7.80) или (7.81), что совпадает с выводами, сделанными в главе 7.

13.3. Определение условий, при которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления

Зарядила, как удот, –
Что ни слово – то Федот!
Окромя Федота нету
Ни печалей, ни забот!

Л. Филатов

В ранее рассмотренных в настоящей монографии задачах ламинарного течения в соосных конических каналах с учетом ха-

рактерных для них инерционных сил мы видели, что существуют определенные интервалы значений чисел Рейнольдса, в которых можно одной из составляющих давления пренебречь при его вычислении.

В главе 8 мы определили эти интервалы для конфузорного течения в соосном коническом канале с общей вершиной его границ при рассмотрении задачи в сферических координатах.

В следующих двух разделах мы определим условия, при которых можно пренебречь либо инерционными силами, либо силами трения при течении в соосном коническом диффузоре конечных размеров, образованными конусами с общей вершиной, с помощью рассмотрения течения в биконической системе координат и сравним результаты, полученные в текущем разделе с результатами, полученными ранее в главе 8 при решении задачи в сферических координатах.

В качестве значимой величины примем относительное отклонение безразмерного давления в канале, вычисленного с учетом силы трения и инерционных сил от безразмерной диссипативной или безразмерной динамической составляющей безразмерного давления, равное 5 %. Определим относительное отклонение полного безразмерного давления от его составляющих как

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\Pi - \Pi_i}{\Pi_i} \right|, \qquad (13.10)$$

где $i = 1, 2$; индекс 1 или F – для динамической составляющей, а индекс 2 или D – для диссипативной составляющей давления.

13.4. Условия пренебрежения динамической составляющей безразмерного давления в соосном коническом конфузоре с общей вершиной в биконическом приближении

Число есть начало всех вещей, воспринимаемых рассудком.

Николай Кузанский

Сначала определим условия, при которых можно пренебречь динамической составляющей безразмерного давления. Выражение (13.10) в этом случае примет вид

$$\varepsilon_F(\xi) = \left| \frac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}} \right|. \qquad (13.11)$$

Как и раньше, при определении критических значений чисел Рейнольдса, за значимую величину относительного отклонения безразмерного давления, вычисленную с помощью решения, полученного в биконических координатах от его диссинативной составляющей, примем величину, равную 5 %, т.е. если выполняется условие:

$$\varepsilon_F = \left| \frac{\Pi - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}} \right| \le 0.05, \qquad (13.12)$$

при вычислении перепада давления в соосном коническом конфузоре динамическую составляющую давления можно не учитывать.

Исследование зависимости $\varepsilon_F(t)$ показывает, что она, как и во всех ранее исследованных случаях течения, является монотонной функцией, т.е. максимальное значение по абсолютной величине ε_F может принимать только на границах области определения – $[0,\ \xi_1 - \xi_0]$, поэтому исследуем выражение (13.12) на границах указанного интервала.

Прямая подстановка $t = 0$ в (13.12)

$$\varepsilon_F(t) = \frac{\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4\right]}{4\xi_1\left[1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3\right]} = \frac{\mathrm{Re}}{8\xi_1}\frac{1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4}{1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3} \qquad (13.11)$$

приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую раскрываем с помощью правила Лопиталя

$$\varepsilon_F(0)=\lim_{t\to 0}\varepsilon_F(t)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Re}_1}{6\xi_1}\frac{\xi_1}{\xi_1-t}=\frac{\mathrm{Re}_1}{6\xi_1}. \quad (13.14)$$

Заметим, что использование правила Лопиталя при вычислении предела (13.13) означает переход от отношения динамической составляющей перепада давления к диссипативной его составляющей к отношению градиентов этих величин в начале течения.

Из (13.14) находим, что условие (13.12) вблизи входа в канал выполняется для чисел Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_1\le 0.3\xi_1. \quad (13.15)$$

Для того чтобы вычислить величину ε_F на выходе из канала перепишем (13.13) в виде

$$\varepsilon_F(\xi_1-\xi_0)=\frac{\mathrm{Re}_1}{8\xi_1}\frac{1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^4}{1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^3}. \quad (13.16)$$

Из соотношения (13.16) на выходе из канала мы с помощью (13.16) можем получить два характерных значения ε_F. Первое – устремив ξ_0 к 0. Прямая замена ξ_0 на 0 приведет к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$, раскрывая которую по правилу Лопиталя будем иметь

$$\lim_{\xi_0\to 0}\varepsilon_F(\xi_1-\xi_0)=\lim_{\xi_0\to 0}\frac{\mathrm{Re}_f}{8\xi_1}\frac{1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^4}{1-\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^3}=\lim_{\xi_0\to 0}\frac{\mathrm{Re}_f}{6\xi_0}=\infty. \quad (13.15)$$

Результат, полученный в (13.17), говорит о том, что при стремлении $\xi_0\to 0$ инерционные силы станут преобладающими при любых значениях числа Re_1. Данный результат хорошо согла-

суется с выражением (8.97), полученном в пункте 8.11, и это значение было получено из решения, справедливого для любых значений ξ, а отношение (13.13) записано из решения, удовлетворяющего условию (9.8). Но вычисления в (13.17) выполнены исключительно для определения характерного значения величин $\varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0)$.

Второе характерное значение ε для выхода из канала можно получить, устремив ξ_1 к ξ_0. Физически это означает уменьшение длины канала до 0 при фиксированной безразмерной координате выхода из канала – ξ_0. Вычисляя предел с помощью правила Лопиталя, получим

$$\lim_{\xi_1 \to \xi_0} \varepsilon_F(\xi_1 - \xi_0) = \frac{\mathrm{Re}_f}{6\xi_0}, \tag{13.18}$$

откуда находим величину чисел Рейнольдса, при которых будет выполняться условие (13.12):

$$\mathrm{Re}_1 \le 0.3\xi_0. \tag{13.19}$$

Соотношение (13.19) показывает, что выполнение условия (13.12) на выходе из канала накладывает на числа Рейнольдса более жесткие ограничения, чем выполнение этого условия на входе в канал, поскольку $\xi_\infty < \xi_1$. Это значит, что пренебречь влиянием инерционных сил и не учитывать динамическую составляющую перепада давления при вычислении перепада давления на всей длине конфузора, что эквивалентно расчету безразмерного давления на выходе из канала, можно только в том случае, когда числа Рейнольдса удовлетворяют условию (13.19).

13.5. Условия пренебрежения диссипативной составляющей безразмерного давления при его вычислении в случае конфузорного течения в соосном коническом канале, образованном границами с общей вершиной

Мы любим все – и жар холодных чисел,
И дар божественных видений....

А. Блок

В качестве критерия пренебрежения диссипативной составляющей перепада давления опять-таки выберем относительное отклонение, только относительное отклонение безразмерного давления его динамической составляющей

$$\varepsilon_D(t) = \frac{\Pi - \Pi_{din}}{\Pi_{din}} = \frac{8\xi_1}{\mathrm{Re}_1} \frac{1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^3}{1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - t}\right)^4}, \tag{13.20}$$

которая, как мы видим, является обратной величиной к (13.12)

$$\varepsilon_D = \frac{1}{\varepsilon_F}. \tag{13.21}$$

Так же, как и ранее, значимым будем считать относительное отклонение более 5 %, т.е. пренебрегать силами трения будем при выполнении условия

$$\varepsilon_D \le 0.05. \tag{13.22}$$

Соотношение (13.21) говорит о том, что зависимость $\varepsilon_D(t)$ является монотонной и максимальные абсолютные значения ε_D принимает на границах интервала $[0,\ \xi_1 - \xi_0]$.

Вычислим ε_D на входе в конфузор. Для этого воспользуемся соотношением (13.14)

$$\varepsilon_D(0) = \frac{6\xi_1}{\mathrm{Re}_1}. \tag{13.23}$$

Откуда определяем диапазон изменения чисел Рейнольдса, для которых выполняется условие (13.22)

$$\mathrm{Re}_1 \ge 120\xi_1. \tag{13.24}$$

На выходе из канала, т.е. при $t = \xi_1 - \xi_0$, из (13.18) будем иметь

$$\varepsilon_D\left(\xi_1-\xi_0\right)=\frac{6\xi_0}{\mathrm{Re}_1}, \tag{13.25}$$

и, соответственно, числа Рейнольдса, при которых будет выполнено условие (13.22), определяется как

$$\mathrm{Re}_1 \geq 120\xi_0. \tag{13.25}$$

Очевидно, что числа Re_1, определенные в последнем неравенстве, будут меньше, чем числа, определенные в (13.24), т.е. для того, чтобы определить диапазон чисел Рейнольдса, при котором можно пренебречь трением при вычислении перепада давления на всей длине канала, необходимо пользоваться неравенством (13.26), которое в данном случае менее строго, чем неравенство (13.24), которым предпочтительнее пользоваться, если необходимо пренебречь трением вдоль всего канала на каждом значении $t\in\left[0,\ \xi_1-\xi_0\right]$.

13.6 Расходно-напорная характеристика ламинарного течения в соосных конических конфузорах с общей вершиной его границ, полученная в биконических координатах

Все действие природы – это лишь математические следствия небольшого числа неизменных законов.

П. Лаплас

С помощью определения безразмерных параметров (12.10) перейдем к размерной записи расходно-напорной характеристики канала

$$\Delta P=\frac{\mu V_0}{h_0}\Pi. \tag{13.27}$$

Используя соотношение (7.66), преобразуем, выражение для средней скорости на входе в канал к виду

$$V_0 = \frac{Q}{\pi R_1^2 \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1)\sin\alpha\left[2 - \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1)\mathrm{ctg}\alpha\right]}, \qquad (13.28)$$

откуда применяя (12.10), получаем выражение для числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\rho Q}{\pi\mu R_1 \sin\alpha\left[2 - \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1)\mathrm{ctg}\alpha\right]}, \qquad (13.29)$$

и тогда используя полученное нами решение (13.7), расходно-напорную характеристику можно записать в размерном виде

$$\Delta P = \frac{4\mu Q\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^3\right]}{\pi R_1^3 \mathrm{tg}^2(\alpha - \alpha_1)\sin\alpha\left[2 - \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1)\mathrm{ctg}\alpha\right]} + \frac{\rho Q^2\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4\right]}{2\pi^2 R_1^4 \sin^2\alpha\left[2 - \mathrm{tg}(\alpha - \alpha_1)\mathrm{ctg}\alpha\right]^2}. \qquad (13.30)$$

ГЛАВА 14

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФУЗОРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ С ПОМОЩЬЮ ТЕЧЕНИЯ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ КАНАЛАХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Одноглазый Ганнибал высмеял художника, изобразившего его с двумя глазами, и наградил изобразившего его в профиль.

по К. Гельвецию

14.1. Введение. Геометрическая возможность аппроксимации

...построение физической теории должно происходить посредством отыскания такой математической (или даже геометрической) структуры, основные величины которой можно отождествлять с основными физическими величинами.

А.С. Эддингтон ("принцип отождествления")

В тринадцати предыдущих главах данной монографии рассматривалось ламинарное течение ньютоновской жидкости в соосных конических каналах, и в частности, в главе 4 было рассмотрено ползущее течение в соосном коническом канале постоянной ширины, а в девятой главе мы исследовали ламинарное диффузорное течение с учетом характерной инерционной силы в соосном коническом канале постоянной ширины.

Но в практических приложениях бывают случаи, когда различием в кривизне и самой кривизной граничных поверхностей можно пренебречь, и, благодаря этому, мы можем рассматривать течение в кольцевом коническом канале как течение в расширяющемся плоском канале постоянной ширины (рис. 14.1), т.е. канал

образованный секторными границами, перпендикулярными аппликате и прямоугольными поверхностями, ограничивающими его по полярной координате. Называть такой канал в дальнейшем мы будем секториальным каналом.

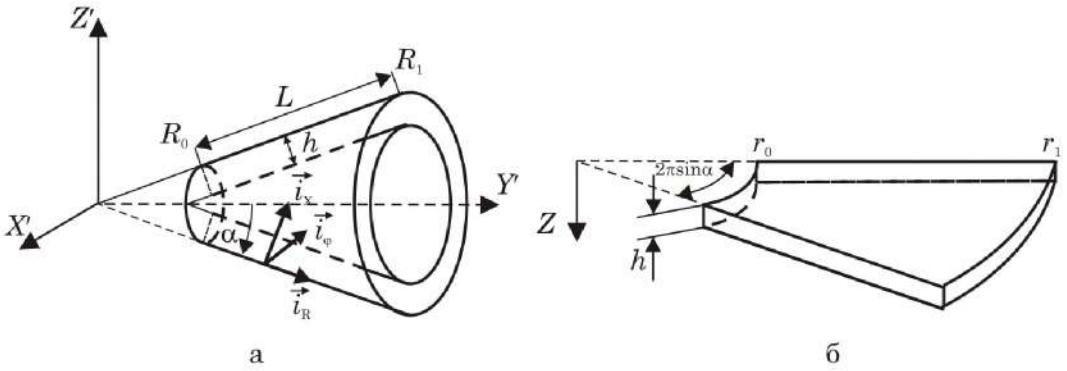


Рис. 14.1. Геометрия конического зазора постоянной ширины: а – связь декартовых и биконических координат с геометрией канала: L- длина конической части канала, м; h - ширина зазора, м; $\mathbf{i}_R$, $\mathbf{i}_X$, $\mathbf{i}_\varphi$- орты в биконической системе координат; б – разворот конического зазора на плоскость.

В дальнейшем, анализируя течения в таких каналах, мы будем рассматривать плоские секториальные течения, отмечать их особенности и сравнивать эти особенности с особенностями, выявленными при анализе течений в соосных конических каналах с помощью биконических координат. Заметим, что это необходимо сделать, поскольку радиальные течения в секториальных каналах могут представлять самостоятельный как академический, так и практический интерес. Предельным случаем подобного течения является радиальное течение между параллельными плоскостями. Такое течение достаточно хорошо известно и изучено [119].

Непосредственно исследованию течения в секториальных каналах к настоящему времени посвящено только несколько работ автора данной монографии. В работе [26] рассмотрены ламинарное диффузорное течение и конвективный теплообмен ньютоновской жидкости в секториальном канале постоянной ширины и предложен способ аппроксимации данным течением ламинарного течения в соосном коническом канале, образованным эквидистантными поверхностями. В работе [36] автор исследовал ламинарное течение с

учетом характерной инерционной силы в секториальном диффузоре постоянной ширины. Далее в настоящей главе мы расширим и детализируем исследования, представленные автором в двух последних цитированных работах.

Если соосный кольцевой канал образован коническими поверхностями с полууглом раскрытия α, расстоянием между ними h и ограничен радиальными координатами R_0 и R_1, отсчитываемыми от вершины внешнего конуса, то плоский канал будет представлять собой часть цилиндрического сектора с углом раскрытия $\varphi = 2\pi\sin\alpha$, высотой h и ограниченного радиусами в цилиндрической системе координат r_0 и r_1 (рис. 14.1), которые равны радиальным координатам R_0 и R_1 в биконической системе координат.

Течение жидкости в таком канале удобно описывать в цилиндрической системе координат, связанной с геометрией канала (рис. 14. 1б). Как и раньше, мы предполагаем, что течение в соосном коническом канале аксиально-симметричное, поэтому при его аппроксимации течением в плоском расширяющемся канале постоянной ширины мы будем рассматривать радиальное и аксиально-симметричное течение во всем диапазоне изменения угловой координаты $\varphi = [0...2\pi\sin\alpha]$. Действительно, мы как бы разрезаем аксиально-симметричное течение в коаксиальном коническом канале вдоль образующей конической поверхности и разворачиваем его на плоскость, поэтому распределение скоростей в плоскостях, ограничивающих канал при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi\sin\alpha$, должны совпадать с распределением скорости в плоскости диаметрального сечения с любым значением угла φ.

14.2. Математическая постановка задачи ползущего течения в секториальном диффузоре постоянной ширины

Ищи простоту и не верь ей!

А. Н. Уайтхед

Для выяснения основных закономерностей, характерных для ползущих течений в секториальных диффузорах постоянной шири-

ны, сначала сформулируем задачу в размерном виде, поскольку в первой главе мы не рассматривали такие течения.

Преобразуем систему уравнений движения, описывающих медленное, стационарное течение ньютоновской жидкости с постоянными свойствами без учета массовых сил, записанную в цилиндрических координатах [102], в систему уравнений, описывающих ползущее аксиально-симметричное течение в секториальном канале. Эта система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\right) + \mu\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}; \tag{14.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \mu\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}, \tag{14.2}$$

а уравнение неразрывности запишется как [102]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \tag{14.3}$$

Уравнение (14.3) позволяет получить соотношение между абсолютными величинами составляющих скорости жидкости. Действительно, изменение радиальной составляющей скорости V_r, в данном случае продольной составляющей, т.е. направленной вдоль течения, происходит на расстоянии ~ $r_1 - r_0$, а изменение поперечной составляющей, т.е. V_z, происходит на расстоянии ~ h, и тогда уравнение (14.3) дает соотношение $V_z \sim \dfrac{h}{r_1 - r_0}|V_r|$, а поскольку мы исследуем течение в каналах, для которых выполняется условие $h << r_1 - r_0$, мы можем считать, что $V_z = o(V_r)$.

Малая величина поперечной составляющей скорости по сравнению с продольной составляющей позволяет положить $V_z = 0$ и рассматривать течение, как плоскопараллельное течение. Для ламинарного течения в плоском канале данное предположение является вполне разумным и ранее использовалось многими авторами при исследовании плоских прямолинейных и расходящихся течений [119, 132].

Пренебрежение составляющей скорости V_z позволяет редуцировать систему уравнений (14.1)–(14.3) к двум уравнениям:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}; \tag{14.4}$$

$$\frac{d}{dr}(rV_r) = 0. \tag{14.5}$$

Как и прежде, граничными условиями для уравнений (14.4) и (14.5) являются условия прилипания на стенках канала:

$$V_r = 0,\ h = 0; \tag{14.6}$$

$$V_r = 0,\ h = h_0, \tag{14.7}$$

заданное давление на входе в канал

$$P = P_0,\ r = r_0, \tag{14.8}$$

и заданный расход жидкости Q.

Мы уже отмечали, что значение P_0 – это относительная величина, поскольку при течении несжимаемых жидкостей характер течения определяется градиентом давления (14.4), что позволяет нам заменить в уравнении (14.4) значение абсолютного статического давления текущим перепадом давления $\Delta P = P - P_0$. Следовательно, при решении задачи мы определим как распределение градиента давления вдоль течения, так и распределение перепада давления в зависимости от параметров задачи, что важно для технических приложений, поскольку это позволяет определить расходно-напорную характеристику канала $\Delta P(Q)$.

Как и при рассмотрении течения в соосном коническом канале уравнение (14.5) мы заменим условием постоянства расхода для поперечного сечения канала на произвольном радиусе r

$$2\pi r \sin\alpha \int_0^h V_r dz = Q. \tag{14.9}$$

Для выяснения основных и наиболее общих закономерностей, характерных для ползущих течений в секториальных диффузорах постоянной ширины, сформулируем задачу в безразмерном виде. Для этого выберем масштабные множители, исходя из самих уравнений движения (14.4)–(14.5).

В качестве линейного масштаба выберем расстояние между поверхностями, образующими канал, т.е. ширину канала – h (рис. 14.1). В качестве масштаба скорости выберем среднюю по площади поверхности поперечного сечения входа в канал скорость и обозначим ее как V_{f0}.

Но сначала, используя (14.9), определим среднюю по поперечному сечению канала скорость как отношение расхода к площади поперечного сечения

$$S_f = 2\pi r h \sin\alpha, \tag{14.10}$$

и поэтому средняя по площади поверхности поперечного сечения скорость при течении в секториальном канала запишется в виде

$$\bar{V} = \frac{Q}{2\pi r h \sin\alpha}, \tag{14.11}$$

и тогда V_{f0} определится выражением

$$V_{f0} = \frac{Q}{2\pi r_0 \sin\alpha h}. \tag{14.12}$$

Вводя безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{r}{h};\ \chi = \frac{z}{h};\ \upsilon = \frac{V_r}{V_{f0}};\ \Pi = \frac{(P - P_0)h}{\mu V_{f0}}, \tag{14.13}$$

запишем систему уравнений (14.4), (14.6)–(14.9) в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \chi^2}; \tag{14.14}$$

$$\upsilon = 0,\ \chi = 0; \tag{14.15}$$

$$\upsilon = 0,\ \chi = 1; \tag{14.16}$$

$$\Pi = 0,\ \xi = \xi_0; \tag{14.17}$$

$$\int_0^1 \upsilon d\chi = \frac{\xi_0}{\xi}. \tag{14.18}$$

14.3. Решение задачи ползущего диффузорного течения жидкости в секториальном канале постоянной ширины

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько возможно, простым.

Л. Карно

Средняя по поперечному сечению безразмерная скорость определяется выражением

$$\overline{v}_f = \frac{\overline{V}}{V_{f0}} = \frac{\xi_0}{\xi}. \tag{14.19}$$

Заметим, что если определить безразмерную площадь поперечного сечения плоского канала как

$$\tilde{s}_f = \frac{S_f}{S_0} = \frac{2\pi r h \sin\alpha}{2\pi r_0 h \sin\alpha} = \frac{\xi}{\xi_0}, \tag{14.20}$$

где S_0 – площадь поперечного сечения входа в канал, то можно записать

$$\overline{v}_f = \frac{1}{\tilde{s}_f}. \tag{14.21}$$

Заметим, что величину $\tilde{s}_f$, определенную отношением (14.20), мы, как и в предыдущих главах, будем называть относительной площадью поверхности поперечного сечения.

Дважды проинтегрировав (14.14) по χ, получим общее решение

$$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\chi^2 = \upsilon + C_1\chi + C_2, \tag{14.22}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые определяем, подставляя (14.20) в (14.15) и (14.16)

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi};\ C_2 = 0, \tag{14.23}$$

и тогда для υ получаем

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\left(\chi^2 - \chi\right). \tag{14.24}$$

Выражение, описывающее распределение безразмерного градиента давления вдоль течения, получим с помощью условия постоянства расхода (14.18)

$$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\xi}\int_0^1\left(\chi^2 - \chi\right)d\chi = \frac{1}{2}\frac{d\Pi}{d\chi}\left(\frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{2}\chi^2\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{12}\frac{d\Pi}{d\xi}, \tag{14.25}$$

откуда

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\frac{\xi_0}{\xi}, \tag{14.26}$$

или используя (14.19), запишем

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = -12\overline{\upsilon}_f(\xi), \tag{14.27}$$

т.е. распределение безразмерного градиента давления вдоль канала полностью определяется распределением средней по поперечному сечению канала безразмерной скоростью.

Подставляя (14.26) в (14.24), получим выражение, определяющее распределение скорости жидкости в канале

$$\upsilon = 6\frac{\xi_0}{\xi}\left(\chi - \chi^2\right) = 6\overline{\upsilon}_f(\xi)\left(\chi - \chi^2\right). \tag{14.28}$$

Максимальное значение безразмерной скорости, очевидно, будет наблюдаться при $\chi = \frac{1}{2}$ и определяться как

$$\upsilon_{\max} = \frac{3}{2}\overline{\upsilon}_f(\xi) = \frac{3}{2}\frac{\xi_0}{\xi}. \tag{14.29}$$

Выражения (14.28), (14.29), записанные с использованием средней безразмерной скорости, формально совпадают с аналогичными соотношениями при течении в плоской призматической трубе [132], но их отличительной особенностью является зависимость рас-

пределения скорости от продольной координаты ξ вследствие изменения площади поперечного сечения канала.

Далее интегрируя (14.26) с начальным условием (14.17), получим

$$\Pi(\xi) = 12\xi_0 \ln\frac{\xi_0}{\xi} = 12\xi_0 \ln \bar{v}_f(\xi). \qquad (14.30)$$

Мы видим, что распределение безразмерного давления вдоль канала будет определяться не только распределением средней безразмерной скорости, но и геометрическими размерами. Очевидно, все сказанное относительно решения безразмерной задачи (14.14)–(14.30) относится и к размерным величинам, но с учетом физических свойств жидкости.

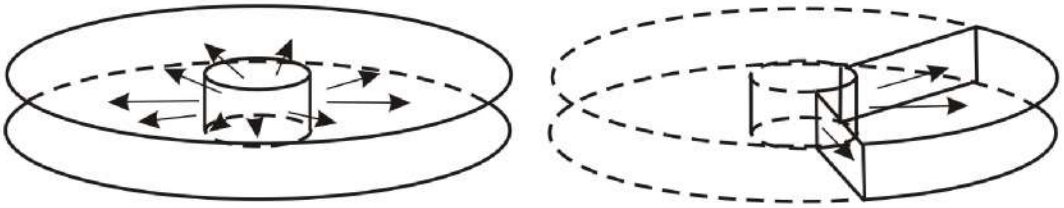
Выражения (14.28), (14.30) формально аналогичны решению, полученному в [119] для радиального течения между плоскими дисками, которое также можно получить, как мы видели ранее, положив в (4.25) и (4.28) $\alpha = 90°$. Описывают же эти два решения различные случаи диффузорного течения. Соотношения (4.31) и (4.32) описывают распределение скорости и давления при медленном радиальном течении между пластинами (рис. 14.2а), а соотношения (14.28), (14.30) описывают медленное радиальное течение в секторе между плоскими дисками при том же расходе жидкости (рис. 14.2б). Эти различия выражены в масштабном множителе скорости V_0. В выражениях (4.31), (4.32) масштаб скорости равен $V_0^* = \dfrac{Q}{2\pi r_0 h}$, а в (14.28) и (14.30) – $V_{f0} = \dfrac{Q}{2\pi r_0 h \sin\alpha}$.

Для того, чтобы провести сравнение величин безразмерного давления, полученных в разных приближениях, т.е. в секториальном канале – (14.30) и в соосном коническом канале – (4.28), нам необходимо перевести их в один масштаб.

Определим множитель для перевода (4.28) в масштаб выражения (14.30). Поскольку вязкость жидкости и ширина канала h в обоих случаях одинаковы, следовательно, выражения (14.28) и (4.28) отличаются только множителем масштаба скорости, и тогда

$$\Pi' = \Pi \frac{V_0}{V_{f0}} = \Pi \left(1 - \frac{1}{2\xi_0 \operatorname{ctg} \alpha} \right)^{-1}, \qquad (14.31)$$

здесь П определяется по (4.28).



а б

Рис. 14.2. а – радиальное диффузорное течение между параллельными плоскостями; б – радиальное диффузорное течение в секториальном канале с параллельными стенками

Определяя относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного для диффузорного течения с помощью плоского приближения от безразмерного давления, определенного в биконических координатах как

$$\varepsilon(\xi) = \frac{\Pi - \Pi'}{\Pi'}, \qquad (14.32)$$

сравним распределения безразмерных давлений в каналах, определяемых величинами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 120$ для различных полууглов раскрытия α (рис. 14.3). Сравнение показывает, что при $\xi \geq 10$ и $\alpha \geq 30°$ соотношение (14.30) позволяет получать результаты не более, чем на 5%, отклоняющиеся на большей части канала от результатов, полученных с помощью (14.31).

Отклонение результатов, вычисленных по (14.30) и (14.31) для различных значений ξ_0 при $\alpha = 15°$ и $\xi_1 = 50$, не превышает 5% при $\xi_0 \geq 20$ (рис. 14.4). Немонотонность зависимости $\Pi(\xi_0)$ на рисунке 3 связана с выбором параметров обезразмеривания. Значение V_0 при расчете считается постоянным, а площадь поверхности трения в области, где средняя скорость жидкости близка к V_0, увеличивается с ростом ξ_0, что приводит к росту модуля безразмерного давления, но затем с уменьшением длины канала перепад давления начинает уменьшаться (рис. 14.4).

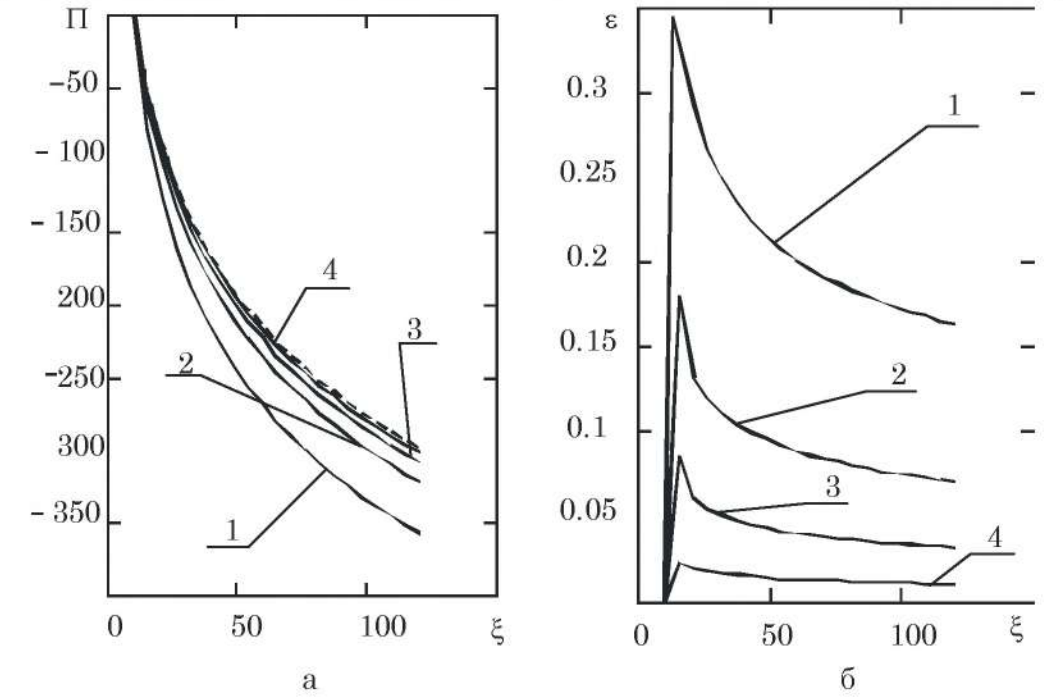


Рис. 14.3. Распределение вдоль канала: а – безразмерного давления для течения с параметром $\xi_0 = 10$. Штриховая линия – расчет по (14.30), сплошные линии по (14.31). 1 – для полуугла раскрытия $\alpha = 7°$, 2 – $\alpha = 15°$, 3 – 30°, 4 – 60°; б – относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного по (14.31) от величин, вычисленных с помощью (14.30) для полууглов раскрытия диффузоров: 1 – $\alpha = 7°$, 2 – $\alpha = 15°$, 3 – 30°, 4 – 60°.

Из выражений (14.30) и (14.31) легко получить локализацию максимума зависимости $\Pi(\xi_0)$. Для плоского канала максимальное значение П определяется соотношениями

$$\Pi_{\max} = -12\xi_{0m}, \qquad \xi_{0m} = \frac{\xi_1}{e}, \tag{14.33}$$

а для приближения (4.28) выражениями

$$\Pi_{\max} = -\frac{6\left(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha\right)}{e\sin\alpha}, \; \xi_{0m} = \frac{2\xi_1 \sin\alpha + \left(e-1\right)\cos\alpha}{2e\sin\alpha}, \tag{14.34}$$

где e – основание натурального логарифма, ξ_{0m} – координата $\Pi_{\max}$.

Понятно, что выражения (14.34) переходят в (14.33) при $\xi_0 \mathrm{tg}\alpha >> 1$, и заметим, что (14.34) представлено в безразмерных переменных (4.5).

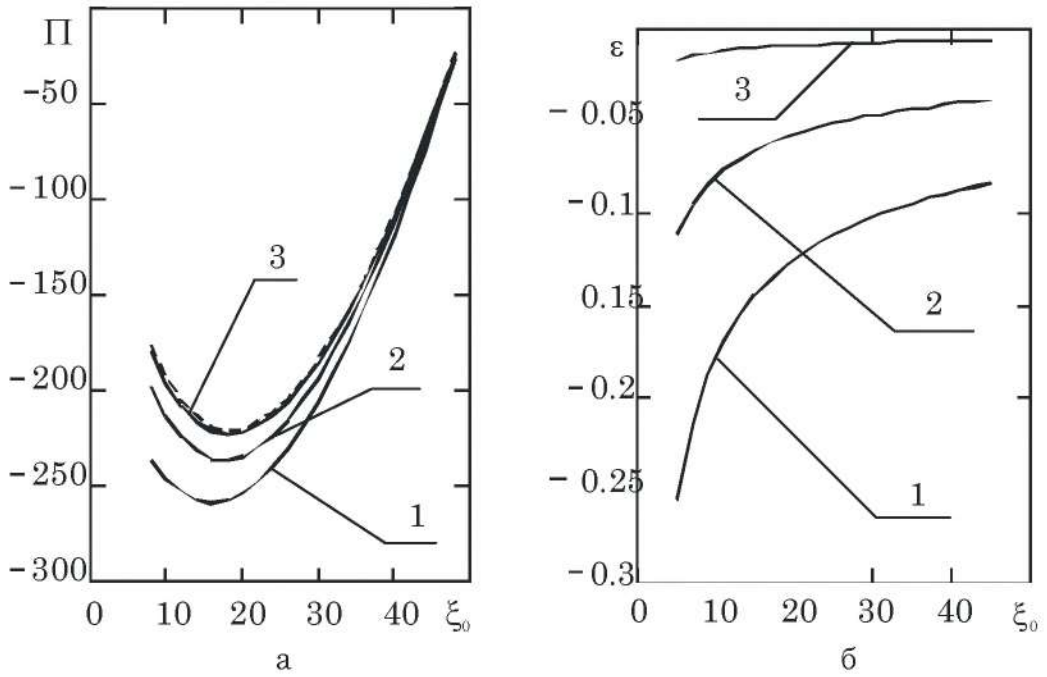


Рис. 14.4. Зависимость от безразмерной координаты входа в канал $\xi_1 = 50$: а – безразмерного давления, вычисленного по (14.30) – штриховая линия и по (14.31) – сплошные линии. 1 – для полуугла раскрытия $\alpha = 7°$, 2 – $\alpha = 15°$, 3 – 30°, 4 – 60°; б – относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного по (14.31) от величин, вычисленных с помощью (14.30) для полууглов раскрытия диффузоров: 1 – $\alpha = 7°$, 2 – $\alpha = 15°$, 3 – 60°.

Наибольшие значения относительного отклонения (14.32) наблюдаются вблизи входа в канал. Это связано с тем, что здесь наблюдаются наименьшие радиусы кривизны граничных поверхностей и максимальное различие в кривизне границ канала, а значит и наибольшее различие в площадях поперечного сечения конического канала и аппроксимирующего плоского канала для одинаковых радиальных координат ξ (рис. 14.5)

$$\varepsilon_{SP} = \frac{2\pi r h \sin\alpha}{\pi h\left(2r\sin\alpha - h\cos\alpha\right)} - 1 = \frac{1}{2\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1}. \qquad (14.35)$$

Очевидно, что здесь наблюдаются наибольшие отличия в безразмерных средних скоростях течения, которые определяются относительными площадями поперечного сечения (4.17) и (14.21). В свою очередь распределение безразмерного давления в канале оп-

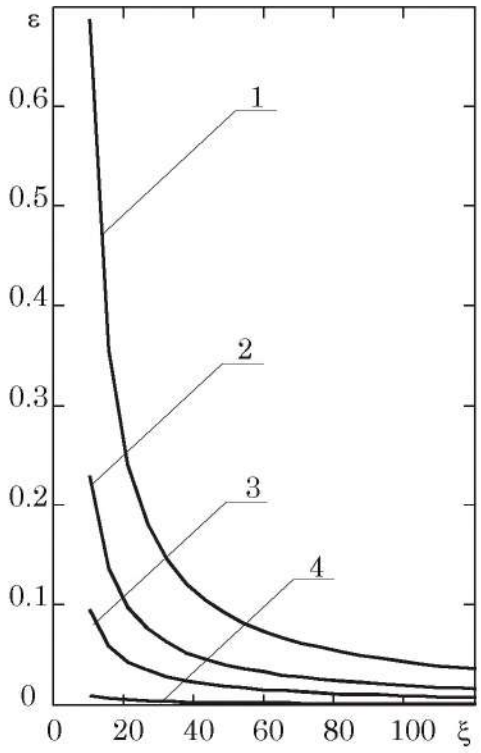


Рис. 14.5. Распределение относительного отклонения площади поперечного сечения (14.35) плоского аппроксимирующего канала от площади поперечного сечения соосного конического канала постоянной ширины вдоль течения: 1 – для полуугла раскрытия граничных поверхностей $\alpha = 7°$, 2 – $\alpha = 15°$, 3 – $\alpha = 30°$, 4 – $\alpha = 80°$

ределяется безразмерной средней скоростью (4.29) и (14.30), что и вызывает наибольшее относительное отклонение давлений вблизи входа. Очевидно, что здесь же будут наблюдаться и отклонения в распределениях скоростей сдвига вдоль границ канала. Для плоского приближения модуль безразмерного значения скорости сдвига на границе $\dot{\gamma}_{f\Gamma}$ будет равен

$$\dot{\gamma}_{f\Gamma} = \left|\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}\Big|_{\chi=0}\right| = 6\frac{\xi_0}{\xi} = 6\overline{\upsilon}_f(\xi), \tag{14.36}$$

что очевидно согласуется для плоского канала с (14.27), поскольку баланс сил на элементарной длине канала можно записать как

$$dP \cdot S_f = \mu 2\pi r \sin\alpha \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial \chi}\right|_{\chi=0} dr, \tag{14.37}$$

откуда и следует (14.27).

14.4. Анализ решения задачи ползущего течения в секториальном диффузоре постоянной ширины

Хощу вамъ, братие, брань поведати...

Сказание о мамаевом побоище

Рассмотрим распределение относительного отклонения перепада давления в канале, рассчитанного для плоского приближения

(14.30), от давления, рассчитанного для конического канала (14.31) при увеличении полуугла раскрытия канала от $\alpha = 7°$ до $\alpha = 80°$, и для каналов различной длины, но с равными координатами входа $\xi_0 = 10$ (рис. 14.6).

Наибольшее отклонение наблюдается у каналов с меньшей длиной. Происходит это потому, что с увеличением длины канала увеличиваются и радиусы кривизны поверхностей и уменьшается различие между ними. Поэтому с увеличением ξ_1 увеличивается и часть канала, где различие в величине средней скорости, полученной для плоского приближения, и конического приближения мало, а для каналов с малой длиной различие в средней скорости (4.18) и (14.21) существенно на всей длине.

Максимальное отклонение в перепаде давления наблюдается для каналов с малым углом раскрытия вне зависимости от их длины (рис. 14.6). Это связано с тем, что с уменьшением углов раскрытия конических поверхностей уменьшаются и радиусы кривизны границ и их относительные отличия между собой. Поэтому у каналов с малыми α наибольшее различие в площадях поперечных сечений (рис. 14.5) и значит средней скорости и перепаде давления (рис. 14.7). При увеличении α различие между плоским и коническим каналом уменьшается и полностью исчезает при $\alpha = 90°$. Поэтому и различие в перепадах давления, рассчитанных по (14.30) и (14.31), у таких каналов будет отсутствовать (рис. 14.6). Из рисунка 14.6 также видно, что определение перепада давления с помощью соотношения (14.30), полученного для плоской аппроксимации диффузорного течения в коаксиальных конических каналах, будет отличаться не более, чем на 5% от значения, полученного с помощью выражений (4.28) или (14.31) для каналов с полууглом раскрытия конических поверхностей $\geq 35°$ при длине образующих конических поверхностей не менее, чем в 10 раз больших ширины канала. При величине образующих $r_1 - r_0 \geq 40\ h$ данное отличие в перепадах давления по (14.30) и (14.31) достигается при $\alpha \geq 30°$, а при $r_1 - r_0 \geq 120\ h$ при $\alpha \geq 20°$.

Следует заметить, что если в (14.30) устремить $\xi \to \infty$, то $\Pi \to -\infty$, т.е. результат аналогичен решению для прямолинейных кана-

лов постоянного поперечного сечения и соосного конического канала постоянной ширины.

Для выяснения характера зависимости давления в канале с заданными значениями ξ_0 и ξ_1 от угла раскрытия образующих поверхностей в плоском приближении от угла раскрытия сектора, равного $2\pi\sin\alpha$, необходимо выбрать масштаб давления, независящий от угла α, как мы это сделали в разделах 4.6 и 9.4.

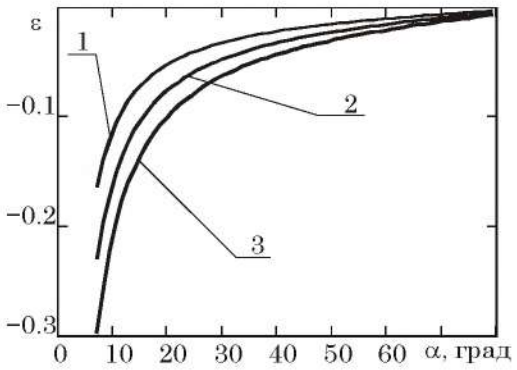


Рис. 14.6. Зависимость относительного отклонения перепада давления в плоском аппроксимирующем канале от перепада давления в соосном коническом канале постоянной ширины и безразмерной координатой входа $\xi_0 = 10$ при течении с одинаковыми расходами от полуугла раскрытия образующих поверхностей. 1 – для канала с безразмерной координатой выхода $\xi_1 = 20$, 2 – для $\xi_1 = 40$, 3 – для $\xi_1 = 120$.

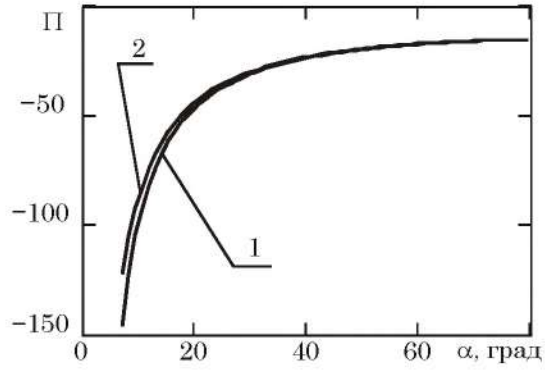


Рис. 14.7. Зависимость безразмерного перепада давления при диффузорном течении в канале с безразмерными координатами $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 120$ от полуугла раскрытия граничных поверхностей. 1 – для соосного конического канала; 2 – для аппроксимирующего плоского канала.

За масштаб скорости при плоской аппроксимации мы также, как и в пунктах 4.6 и 9.4, выберем величину (4.39), тогда условие постоянства расхода примет вид

$$\int_0^1 v_f^* d\chi = \frac{1}{2\xi_0 \sin\alpha}, \qquad (14.38)$$

а безразмерная средняя скорость по поперечному сечению канала определяется соотношением

$$\overline{v}_f^* = \frac{1}{2\xi \sin\alpha}. \tag{14.39}$$

Формальное определение всех остальных безразмерных величин остается прежним. В новых переменных решение задачи (14.14)–(14.18), (14.38) будет выглядеть:

$$v_f^* = \frac{3\left(\chi - \chi^2\right)}{\xi \sin\alpha} = 6\overline{v}_f^*\left(\chi - \chi^2\right); \tag{14.40}$$

$$\frac{d\Pi_f^*}{d\xi} = -\frac{6}{\xi \sin\alpha} = -12\overline{v}_f^*; \tag{14.41}$$

$$\Pi_f^* = \frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{\xi_0}{\xi} = \frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{\overline{v}_f^*}{\overline{v}_{0f}^*}. \tag{14.42}$$

Для безразмерных координат $\xi_0 = 10$, $\xi_1 = 40$ зависимость безразмерного давления Π_f^* от α представлены на рисунке 6.

Данные выражения показывают, что во всех рассмотренных приближениях диффузорного течения в соосных конических каналах формулы, определяющие распределение безразмерной скорости в канале и безразмерного градиента давления в канале, записанные через среднюю безразмерную скорость, совпадают и имеют одинаковую зависимость при различных определениях средней безразмерной скорости (14.39), (14.21), (4.18), (14.26) и (14.41).

Выражения для вычисления безразмерного давления при течении в соосном коническом канале, полученные с использованием одинаковых безразмерных координат и масштабов в биконическом и плоском приближении (4.40) и (14.42), также совпадают при записи через средние безразмерные скорости, которые определяются различными формулами (9.59) и (14.39).

Определим, как сильно отличаются значения безразмерного давления при течении с пренебрежительно малыми инерционными силами в случае приближения с частичным учетом кривизны границ канала, т.е.

$$\Pi^* = \frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi - \operatorname{ctg}\alpha}, \tag{14.43}$$

и в случае аппроксимации соосного конического течения плоским каналом, т.е. выражения (14.42) для различных значений угла раскрытия граничных поверхностей. Наибольшее относительное отклонение (14.42) от (14.43) наблюдается при малых значениях α (рис. 14.7). Это понятно, потому что при малых α наблюдается наибольшее отличие в площади поперечного сечения конического и плоского каналов (рис. 14.5). Площадь поперечного сечения в коническом канале для одинаковых координат ξ меньше, чем в плоском, что и приводит к большей средней скорости течения, к большему значению скорости сдвига на стенках канала и, в итоге, к большему перепаду давления на выделенном участке канала с одинаковыми координатами ξ_0 и ξ_1.

Понятно также, что при уменьшении значения ξ_1 относительное отклонение будет расти, поскольку будет происходить относительное увеличение участка канала, прилегающего к его входу, где наблюдается большее различие в скоростях сдвига на границах (14.36), а значит и в градиентах давления. Из этого следует, что наибольшее относительное отклонение (14.42) от (14.43) будет наблюдаться при $\xi_1 \to \xi_0$.

Вычислим это отклонение

$$\varepsilon_{\max} = \lim_{\xi_1 \to \xi}\left|\frac{\Pi_f^* - \Pi^*}{\Pi^*}\right| = \lim_{\xi_1 \to \xi_0}\left|\frac{\ln\dfrac{\xi_1}{\xi_0}}{\ln\dfrac{2\xi_1\operatorname{tg}\alpha - 1}{2\xi_0\operatorname{tg}\alpha - 1}} - 1\right| \Rightarrow \tag{14.44}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Правило} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\xi_0\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_0}.$$

Соотношение (14.44) позволяет получить критерий, при выполнении которого относительное отклонение между (14.42) и (14.43) будет заведомо меньше n %. Для этого достаточно положить $\varepsilon_{\max} \le n$, откуда запишем

$$\xi_0 \geq \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2n}. \qquad (14.45)$$

Если n = 5%, то (14.45) принимает вид

$$\xi_0 \geq 10\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (14.46)$$

Заметим, что соотношение (14.46) получено при стремлении длины канала к 0. При конечной длине канала $\varepsilon < \varepsilon_{max}$, и поэтому для практически интересных случаев течения можно использовать выражение

$$\xi_0 \geq 5\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (14.47)$$

Выполнение критерия (14.46) убедительно иллюстрируется на рисунке 14.8.

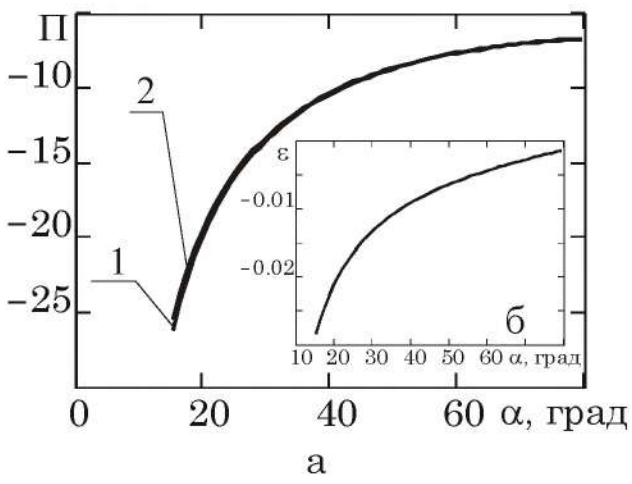


Рис. 14.8. а) Зависимость безразмерного перепада давления при диффузорном течении в канале с безразмерными определяющими координатами ξ_0 = 40, ξ_1 = 120 от полуугла раскрытия граничных поверхностей. 1 – для соосного конического канала; 2 – для аппроксимирующего плоского канала. б) – зависимость относительного отклонения перепада давления в плоском аппроксимирующем канале от перепада давления в соосном коническом канале при диффузорном течении.

Очевидно, что распределение относительного отклонения между безразмерными давлениями, вычисленными по (14.43) и (14.42), которые представлены на рисунке 14.7, будет совпадать с кривой 2 (рис. 14.6) для ξ_0 = 10, ξ_1 = 40, поскольку выражения (14.30) и (14.42) отличаются только множителем $\frac{1}{\xi_0 \sin\alpha}$.

Итак, мы выяснили пределы применимости плоской аппроксимации при исследовании медленного диффузорного течения в соосных конических каналах. Далее рассмотрим плоскую аппрокси-

мацию диффузорного течения с учетом характерной инерционной силы, возникающей за счет изменения поперечного сечения канала при диффузорном течении в коаксиальных конических каналах и их аппроксимирующих секториальных диффузоров постоянной ширины.

14.5. Постановка и решение задачи ламинарного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины с учетом характерной инерционной силы

Красота уравнений важнее, чем их согласие с экспериментом.

П.А.М. Дирак

В разделах 8.2 и 9.2 мы отмечали, что при течении в соосных конических диффузорах всегда существует ненулевая инерционная сила, действующая на жидкость, которая возникает вследствие изменения скорости течения при изменении площади поперечного сечения вдоль канала. Данную силу мы назвали характерной инерционной силой для диффузорного течения. Очевидно, что и при диффузорном течении в секториальных каналах будет возникать аналогичная сила.

Сейчас давайте исследуем влияние этой силы на распределение давления при диффузорном течении в соосных конических каналах с помощью плоской аппроксимации, но при этом заметим, что течение в секториальных каналах также может иметь как академический, так и практический самостоятельный интерес.

Рассматривать течение будем, как и прежде, в цилиндрических координатах (рис. 14.1). Учитывая сделанное ранее сравнение радиальной и аксиальной составляющих скорости $V_z = o(V_r)$, мы можем записать уравнение движения в форме Озеена [102] для дивергентного течения в секториальном канале как

$$\rho\bar{V}\frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}, \qquad (14.48)$$

где $\bar{V}$ – средняя по сечению канала скорость.

Уравнение неразрывности (14.5), граничные условия (14.6)–(14.8) и условие постоянства расхода (14.9) остаются без изменений.

Уравнение (14.48) в безразмерных переменных (14.13) примет вид

$$\mathrm{Re}_f \bar{v}_f \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}, \tag{14.49}$$

где

$$\mathrm{Re}_f = \frac{\rho V_{f0} h}{\mu} \tag{14.50}$$

это число Рейнольдса, а $\bar{v}_f = \dfrac{\bar{V}}{V_{f0}}$.

Условиями однозначности для решения (14.49) остаются условия (14.15)–(14.18).

Поскольку при течениях с малыми и умеренными числами в каналах длина начального гидродинамического участка, как правило, значительно меньше длины канала [132], мы пренебрегаем инерционными силами, связанными с формированием профиля скорости на входе в канал, и поэтому мы можем рассматривать в уравнении (14.49) среднее по поперечному сечению канала значение инерционной силы, действующей на жидкость, т.е. сделать замену

$$\mathrm{Re}_f \bar{v}_f \frac{\partial v}{\partial \xi} = \mathrm{Re}_f \bar{v}_f \frac{d\bar{v}_f}{d\xi}. \tag{14.51}$$

Более детально формирование развитого профиля скорости жидкости при диффузорных течениях в секториальных каналах будет рассмотрено в главах 19 и 20.

Подставляя (14.19) в (14.51) и затем подставляя результат в (14.49), получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\xi_0^2}{\xi^3} \mathrm{Re}_f = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \tag{14.52}$$

В (14.52) левая часть не зависит от χ, обозначим ее через D и дважды проинтегрируем полученное уравнение, совершенно аналогично тому, как мы это делали для уравнения (14.14). Далее, используя граничные условия (14.15) и (14.16), получим для υ выражение

$$\upsilon = \frac{1}{2} D\left(\chi^2 - \chi\right). \tag{14.53}$$

Подставляя (14.53) в (14.16), получим

$$D = -12\frac{\xi_0}{\xi}, \tag{14.54}$$

т.е. выражения для распределения скорости совпадает с (14.24)

$$\upsilon = 6\frac{\xi_0}{\xi}\left(\chi - \chi^2\right) = 6\overline{\upsilon}_f(\xi)\left(\chi - \chi^2\right). \tag{14.55}$$

Далее, приравнивая $D(\xi)$ левой части (14.52), получим уравнение для определения безразмерного градиента давления

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \frac{\xi_0^2}{\xi^3}\mathrm{Re}_f - 12\frac{\xi_0}{\xi} = \frac{\mathrm{Re}_f}{\xi_0}\overline{\upsilon}_f^3 - 12\overline{\upsilon}_f. \tag{14.56}$$

Также, как и при конической аппроксимации, градиент давления состоит из двух частей: из инерционной части, которая пропорциональна числу Re_f и средней скорости в третьей степени и диссипативной части, которая пропорциональна первой степени, средней безразмерной скорости и равна удвоенному значению модуля сдвига на стенке канала, взятому с отрицательным знаком в соответствии с (14.27) и (14.36).

Интегрируя (14.56) с условием (14.17), получим выражение, определяющее распределение безразмерного давления при диффузорном течении в плоском секторе постоянной ширины (рис. 14.1)

$$\Pi_f = \frac{1}{2}\mathrm{Re}_f\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2\right] + 12\xi_0 \ln\frac{\xi_0}{\xi} = \tag{14.57}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}_f\left(\overline{v}_{0f}^2 - \overline{v}_f^2\right) + 12\xi_0 \ln \overline{v}_f,$$

где $\overline{v}_{0f} = 1$ – средняя безразмерная скорость на входе в канал, а

$$\Pi_{din} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}_f\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2\right] \qquad (14.58)$$

динамическая составляющая безразмерного давления Π_f.

Заметим, что если положить $\mathrm{Re}_f = 0$, получим решение (14.27)–(14.30).

14.6. Анализ влияния характерной инерционной силы на параметры диффузорного ламинарного течения в секториальном канале постоянной ширины

Конечная цель физики заключается в том, чтобы объяснить, из чего построен мир, что его сохраняет и как он действует.

П. Девис

Выражение (14.57) показывает, что параметрами, определяющими решение задачи, являются Re_f и ξ_0. Рассмотрим сначала влияние числа Re_f на распределение безразмерного давления при диффузорном течении в секториальном канале постоянной ширины, задавая значения Re_f равным $\mathrm{Re}_f = 5$, $\mathrm{Re}_f = 50$, $\mathrm{Re}_f = 150$ и 200; значение координаты входа в канал, как и раньше, примем равным $\xi_0 = 10$.

При малых значениях чисел Рейнольдса, в данном случае при $\mathrm{Re}_f = 5$, влияние инерционных свойств незначительно, и безразмерный градиент давления незначительно отличается от градиента давления, вычисленного без учета инерционных свойств (14.26) (рис. 14.9), поэтому и распределение безразмерного давления вдоль течения в этих случаях практически совпадают (рис. 14.10).

Увеличение числа Re_f приводит к более существенному влиянию инерционного члена на градиент давления (рис. 14.9).

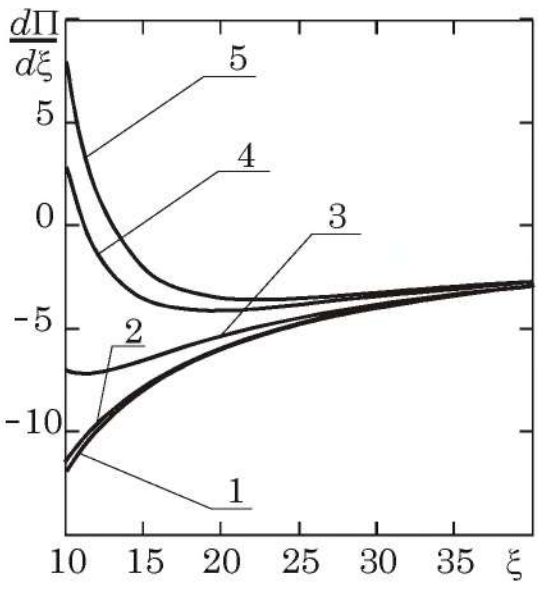


Рис. 14.9. Распределение безразмерного градиента давления для диффузорного течения в соосном коническом канале при его аппроксимации плоским каналом. 1 – для течения с пренебрежимо малым числом Re; 2 – для течения при Re = 5; 3 – при Re = 50; 4 – при Re = 150; 5 – при Re = 200.

Наибольшее влияние наблюдается в начале течения, поскольку величина инерционного члена в градиенте давления пропорциональна $\frac{1}{\xi^3}$ (рис. 14.11), а диссипативного – $\frac{1}{\xi}$.

Инерционная составляющая градиента давления значительна вблизи входа в канал, а затем интенсивно убывает вдоль течения (рис. 14.11), и на некотором расстоянии от входа влияние сил инерции практически исчезает (рис. 14.9). Поэтому и наибольшее относительное отклонение в распределении безразмерного давления при его расчете с учетом инерционных сил и без учета этих сил наблюдается в начале течения (рис. 14.10).

При дальнейшем течении, когда инерционная составляющая градиента давления становится значительно меньше составляющей градиента давления, вызванной трением, абсолютная величина разности в значениях безразмерного давления для течения с пренебрежимо малыми инерционными свойствами и с существенными инерционными силами изменяется незначительно вдоль канала (рис. 14.10). Относительное отклонение безразмерного давления при течении с существенными инерционными силами от Π_f при течении с $\mathrm{Re}_f \approx 0$ уменьшается вдоль течения вследствие того, что вниз по потоку с уменьшением скорости инерционные силы стремятся к нулю, и основной вклад в изменение безразмерного давления (14.57) здесь вносит сила трения, поэтому перепад давления с

учетом Re_f и без этого учета изменяется здесь на одинаковую величину, что и ведет к уменьшению относительного отклонения ε_F вниз по потоку (рис. 14.10).

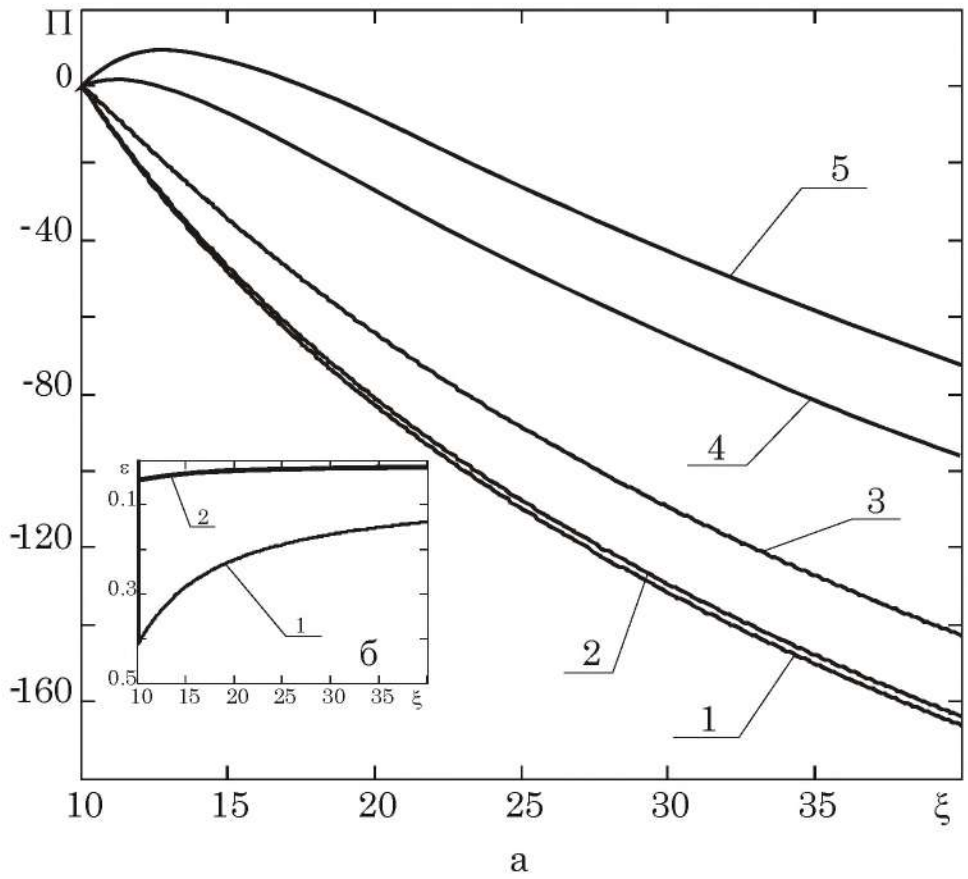


Рис. 14.10. Распределение безразмерного давления вдоль безразмерной координаты ξ при диффузорном течении в соосном коническом канале с начальной координатой $\xi_0 = 10$. Аппроксимация плоским каналом – а: 1 – для течения с Re = 0; 2 – для Re = 5; 3 – для Re = 50; 4 – для Re = 100; 5 – для Re = 200; б – распределение относительного отклонения безразмерного давления, вычисленного с учетом инерционной силы от величины безразмерного давления, вычисленного при Re = 0. 1 – для течения при Re = 150; 2 – при Re = 5.

Дальнейшее увеличение числа Re_f приводит к тому, что инерционная сила становится преобладающей, и безразмерный градиент давления становится положительным в начале течения

(рис. 14.9), и течение здесь происходит в направлении возрастания давления (рис. 14.10).

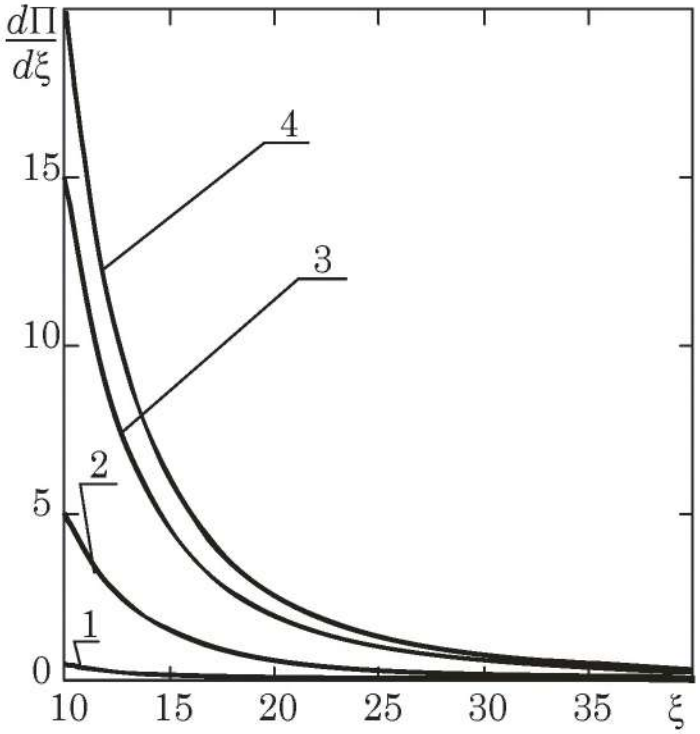


Рис. 14.11. Распределение инерционной составляющей безразмерного градиента давления вдоль безразмерной координаты ξ для плоской аппроксимации диффузорного течения в соосном коническом канале: 1 – для течения при Re = 5; 2 – течение при Re = 50; 3 – Re = 150; 4 – Re = 200.

Значение числа Re_f, начиная с которого течение вблизи входа в канал происходит в направлении возрастания давления, можно определить из условия

$$\left.\frac{d\Pi}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0\,, \tag{14.59}$$

что приводит к величине

$$\mathrm{Re}_f = 12\xi_0, \tag{14.60}$$

которая совпадает со значением, полученным для радиального течения между плоскими пластинами в разделе 9.4 девятой главы, соотношение (9.50). При дальнейшем течении инерционная сила уменьшается более интенсивно, чем сила трения, и на некотором расстоянии от входа градиент давления становится равным 0. Очевидно, что здесь наблюдается максимальное значение безразмерно-

го давления (рис. 14.10) и его локализация определяется из условия (9.44), т.е. $\frac{d\Pi}{d\xi} = 0$

$$\xi_{\Pi max} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}_f \xi_0}{12}}, \qquad (14.61)$$

что опять совпадает со значением, полученным в главе 9, выражение (9.51) для диффузорного течения между плоскими поверхностями. Подставив (14.61) в (14.57) можно получить выражение для определения максимального значения безразмерного давления при $\mathrm{Re}_f > 12\xi_0$.

При дальнейшем течении сила трения уменьшается вследствие уменьшения средней скорости, и модуль градиента давления опять уменьшается (рис. 14.9). В итоге, зависимость безразмерного градиента давления от ξ немонотонна (рис. 14.9). Минимальное значение безразмерного градиента давления (рис. 14.9) можно определить, как и в главе 9, из условия (9.20), т.е. $\frac{d^2\Pi}{d\xi^2} = 0$, что дает величину

$$\xi_{\Pi' min} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Re}_f \xi_0}, \qquad (14.62)$$

что совпадает с (9.31) при $\alpha = 90°$.

Возвращаясь к (14.57), заметим, что перепад давления в канале при стремлении его длины к ∞ также стремится к бесконечности, т.к. максимальное увеличение давления в рассматриваемом канале бесконечной длины за счет перехода кинетической энергии в потенциальную равно $\frac{1}{2}\mathrm{Re}_f$, что не сможет компенсировать стремящийся к ∞ перепад давления, вызванный трением о стенки канала (стр. 606). Данный результат формально совпадает с результатом, полученным в модели с частичным учетом кривизны границ в главе 4.

На рисунке 14.10 мы сравнивали распределение безразмерного давления вдоль течения при различных значениях числа Re_f. Давайте сравним перепад давления на выделенном участке канала

при различных значениях числа Re_f в зависимости от угла раскрытия поверхностей. Для этого, также как и при рассмотрении течения без учета инерционных свойств, необходимо исключить в масштабных параметрах зависимость от α. В качестве масштаба скорости опять примем выражение (4.39), тогда зависимость (14.57) запишется как

$$\Pi_f^* = \frac{6}{\sin\alpha}\ln\frac{\xi_0}{\xi_1} + \frac{\mathrm{Re}^*}{8\xi_0^2\sin^2\alpha}\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2\right], \qquad (14.63)$$

где

$$\mathrm{Re}^* = 2\xi_0\sin\alpha\,\mathrm{Re}_f = \frac{\mathrm{Re}_f}{\overline{v}_f^*(\xi_0)} = \frac{\rho Q}{\pi\mu h}, \qquad (14.64)$$

т.е. численное значение Re^*, как правило, будет значительно выше, чем значение Re_f для одного и того же расхода жидкости Q и одних и тех же геометрических размеров канала.

Следует заметить, что значение Re^* не является критериальным значением числа Рейнольдса, поскольку масштаб скорости (4.39) не характеризует физическую величину скорости жидкости в канале.

Выражение (14.63) говорит, что в такой постановке задача имеет 4 определяющих параметра:α, ξ_0, ξ_1, Re^*. Зафиксируем два из них $\xi_0 = 10$; $\xi_1 = 40$ и рассмотрим зависимость $\Pi(\alpha, \mathrm{Re}^*)$. Сначала сравним зависимости для двух значений Re_f, равных 0, т.е. зависимость (14.42) и зависимость (14.63) при $\mathrm{Re}^* = 1200$.

Безразмерный перепад давления (14.42) на участке секториального канала при диффузорном течении с незначительными инерционными свойствами уменьшается при росте α, а значит и угла раскрытия секториального канала – φ (рис. 14.12) вследствие уменьшения средней скорости течения жидкости из-за увеличения площади поперечного сечения канала.

При течении с существенными инерционными свойствами перепад давления определяется выражением (14.63) и изменяется незначительно с изменением α (рис. 14.13). Это происходит вследствие того, что при малых значениях α средняя скорость течения в

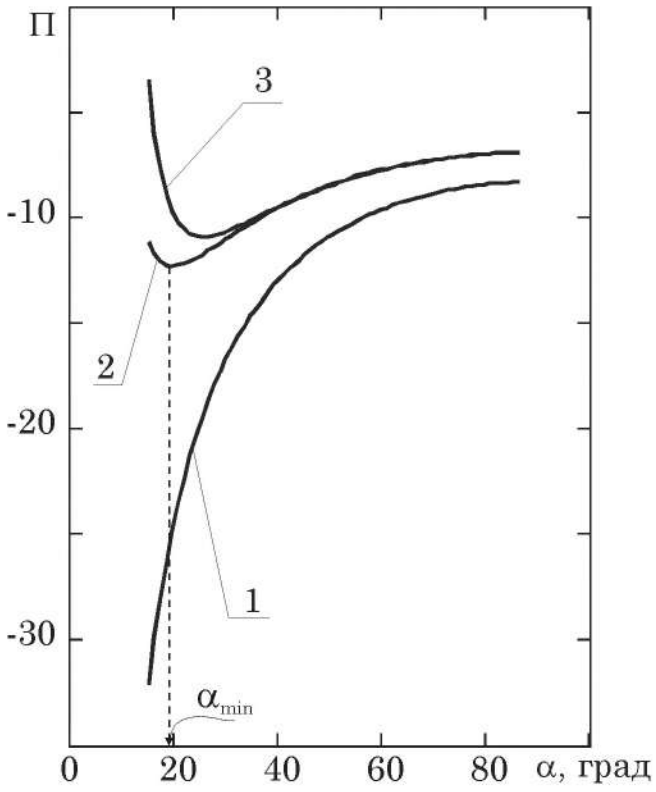


Рис. 14.12. Зависимость безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с безразмерными параметрами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$ от полуугла раскрытия границ α. 1 – безразмерное давление, определенное без учета инерционной силы ($Re^* = 0$) для аппроксимирующего плоского канала; 2 – безразмерное давление, определенное для плоского аппроксимирующего канала при $Re^* = 1200$; 3 – безразмерное давление, рассчитанное при течении в соосном коническом канале при $Re^* = 1200$.

канале выше, чем при больших α, поэтому при малых значениях α большая часть кинетической энергии переходит в энергию напряженного состояния, вследствие чего здесь к безразмерному давлению, вызванному трением, суммируется значительная положительная величина, обусловленная инерционными свойствами течения (кривая 1 на рис. 14.12), и с ростом α Π^*_f падает и достигает своего минимума. При больших значениях α прирост давления, вызванный преобразованием кинетической энергии течения, будет меньше вследствие меньшей скорости течения, но по этой же причине модуль безразмерного давления, вызванного трением, здесь меньше (рис. 14.12). Поэтому изменение безразмерного давления на участке соосного конического канала при течении с достаточно большими числами Re^* незначительно (рис. 14.12), а сама зависимость $\Pi^*_f(\alpha)$ будет немонотонной.

Минимальное значение Π^*_f можно определить из условия

$$\frac{d\Pi_f^*}{d\alpha} = 0, \tag{14.65}$$

откуда получаем, что минимальное значение Π_f^* достигается при

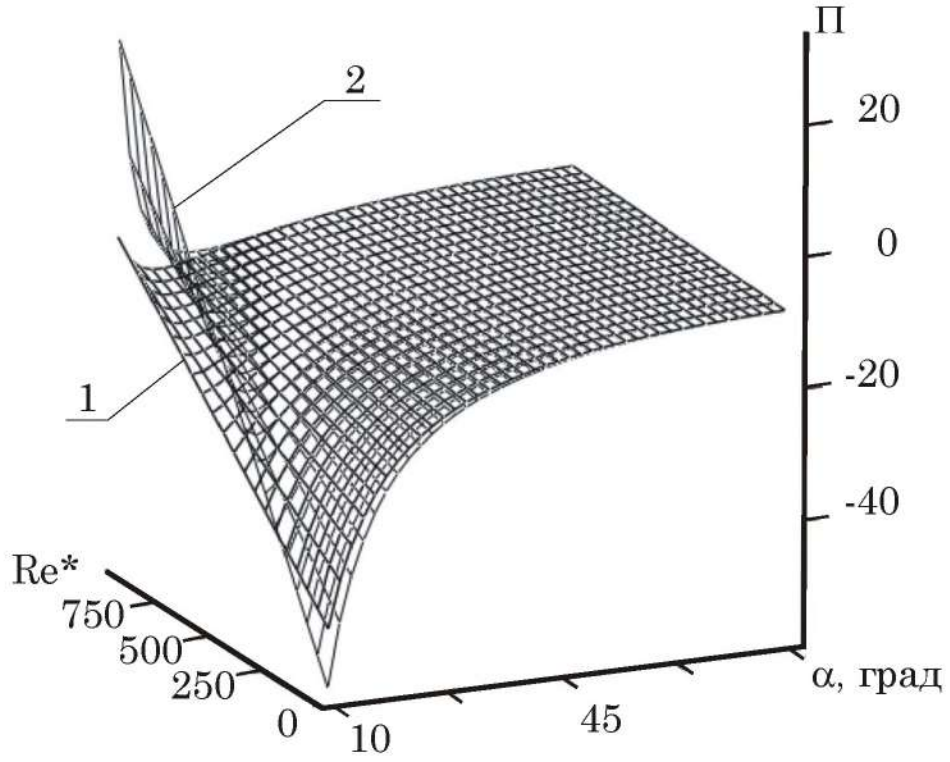


Рис. 14.13. Распределение безразмерного давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с безразмерными параметрами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$ в зависимости от числа Re^* и полуугла раскрытия α: 1 – определение давления с помощью модели аппроксимирующего плоского канала; 2 – определение давления в модели с частичным учетом кривизны граничных поверхностей.

$$\alpha_{\min} = \arcsin\left\{-\frac{\mathrm{Re}^*\left[1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2\right]}{24\xi_0^2 \ln\frac{\xi_0}{\xi_1}}\right\}. \tag{14.66}$$

Понятно, что при этом значении α будет достигаться наибольший перепад давления ΔP в канале. В рассматриваемом случае $\alpha_{min} = 19.76°$.

Мы можем провести аналогичное сравнение зависимости (14.63) и (9.58), поскольку они получены в одном масштабе. Для выбранных параметров модель плоского канала хорошо согласуется с данными модели с частичным учетом кривизны границ (9.58) при $\alpha > 30°$ (рис. 14.12).

Понятно, что из условия (14.65) можно вычислить значение α, при котором достигается наибольший перепад давления в соосном коническом канале.

Существенное различие в определении давления с помощью приближений (14.63) и (9.58) наблюдается только при малых значениях α практически для всех возможных в данных моделях значениях числа Re^* (рис. 14.13, 14.14).

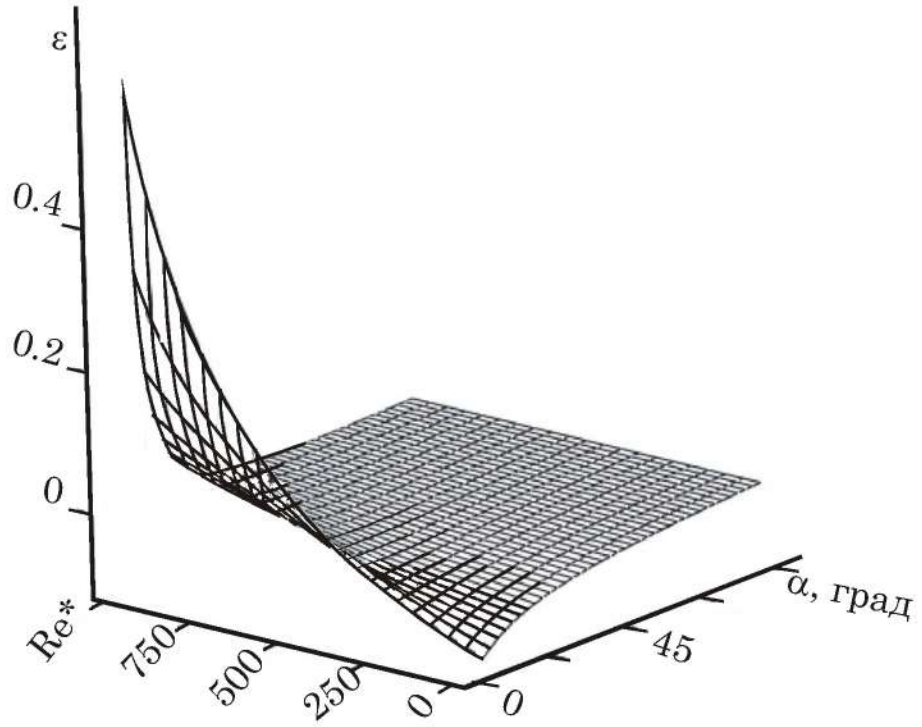


Рис. 14.14. Зависимость относительного отклонения перепада давления при диффузорном течении в соосном коническом канале с параметрами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$, рассчитанного с помощью плоской аппроксимации от давления, рассчитанного по модели с частичным учетом кривизны граничных поверхностей.

Заметим, что при малых значениях Re^* модуль безразмерного давления (9.58) и, следовательно, размерный перепад давления при течении в соосном коническом канале будет больше, чем при течении в аппроксимирующем плоском канале (рис. 14.13, 14.14). Это происходит потому, что при малых значениях Re^* перепад давления будет определяться трением жидкости о стенки канала.

В соосном коническом канале площадь поперечного сечения меньше, чем у плоского канала при одинаковых значениях ξ (рис. 14.5), а значит там больше средняя скорость течения (рис. 14.15) и, следовательно, более вытянутый профиль скорости (рис. 14.16), особенно вблизи входа в канал, где различие в площадях поперечного сечения значительнее всего (рис. 14.5). Заметим, что на рисунках 14.15 и 14.16 распределения скоростей представлены в одинаковом масштабе и, учитывая масштабирования (4.3) и (14.13), перевод значений скорости, полученных в безразмерных переменных, выбранных для решения задачи в соосном коническом канале, в безразмерные переменные, использующиеся для рассмотрения течения в плоском секториальном канале, определится соотношением

$$v_f = \frac{2\xi_0}{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha} v_c, \tag{14.67}$$

где v_f — значение скорости в безразмерных переменных плоского канала, v_c – значение скорости в безразмерных переменных конического канала.

Более вытянутый профиль скорости, получаемый в геометрии конического канала, чем в плоском канале означает, что скорость сдвига на стенках канала, а значит и составляющая модуля безразмерного градиента давления, обусловленная трением, будет больше в коническом канале, чем в плоском. Следовательно, и перепад давления там будет выше (рис. 14.13).

С увеличением числа Re^* возрастает роль инерционных сил и в том канале, где будет больше средняя скорость течения жидкости, большая часть кинетической энергии будет переходить в потенциальную энергию напряженного состояния. Вследствие этого, модуль безразмерного давления в соосном канале будет меньше, чем в плоском, или даже при больших Re^* безразмерное давление будет положительным, в то время как для этих же параметров безразмерное давление в плоском канале будет отрицательным (рис. 14.13).

При больших углах раскрытия граничных поверхностей различие в площади поперечного сечения конического и плоского ка-

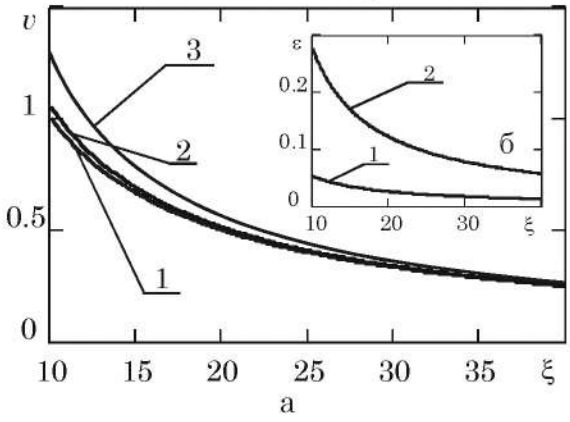


Рис. 14.15. Распределение средней безразмерной скорости при диффузорном течении в канале, ограниченном безразмерными координатами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$ – а: 1 – течение в плоском секториальном канале; 2 – течение в соосном коническом канале постоянной ширины с полууглом раскрытия $\alpha = 45°$, 3 – течение при $\alpha = 13°$; б – относительное отклонение ε средней безразмерной скорости при диффузорном течении в соосном коническом канале с $\alpha = 45°$ от $\overline{v}$ в плоском секториальном канале при $\xi_0 = 10 - 1$; 2 – ε при $\alpha = 13°$ и $\xi_0 = 10$.

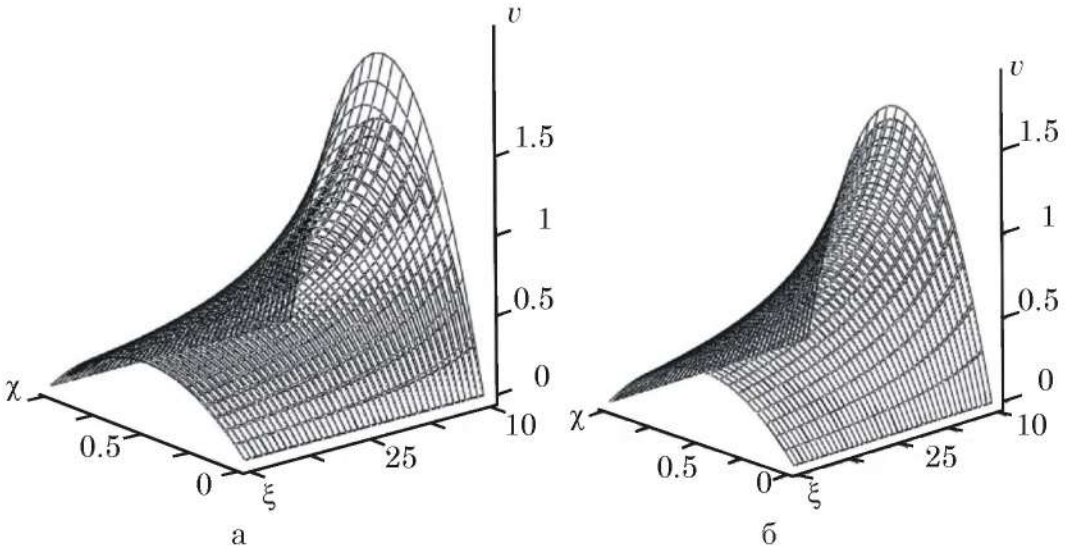


Рис. 14.16. Распределение безразмерной скорости при диффузорном течении в канале, ограниченном безразмерными координатами $\xi_0 = 10$ и $\xi_1 = 40$: а – верхняя поверхность для течения в соосном коническом канале постоянной ширины с полууглом раскрытия образующих поверхностей $\alpha = 13°$, нижняя – для плоского секториального канала; б – верхняя поверхность для течения в соосном коническом канале постоянной ширины с полууглом раскрытия образующих поверхностей $\alpha = 45°$, нижняя – для плоского секториального канала.

нала уменьшается (рис. 14.5), уменьшается и различие в средних скоростях течения (рис. 14.15) и в поперечном распределении продольной скорости (рис. 14.16). Близкие распределения продольной скорости в соосном коническом и плоском каналах приводят к практически равным изменениям давления в этих каналах при больших значениях α для всех рассмотренных значений числа Re^* (рис. 14.13).

Понятно, что при уменьшении координаты ξ_1 величина относительного отклонения (14.63) от (9.58)

$$\varepsilon = \frac{\Pi_f^* - \Pi^*}{\Pi^*} \tag{14.68}$$

будет увеличиваться из-за увеличения относительной доли участка, прилегающего к входу в канал, где существует наибольшее различие в величине площадей поверхностей поперечных сечений каналов. Определим максимальное значение величины ε в зависимости от определяющих параметров задачи. Очевидно, что $\varepsilon_{\max}$ определится предельным переходом $\xi_1 \to \xi_0$, т.е. также, как и в (14.44)

$$\varepsilon_{\max} = \lim_{\xi_1 \to \xi_0} \left| \frac{\Pi_f^* - \Pi^*}{\Pi^*} \right|. \tag{14.69}$$

Вычислим это выражение

$$\varepsilon_{\max} = \lim_{\xi_1 \to \xi_0} \frac{\dfrac{\mathrm{Re}^*\left[1 - \left(\dfrac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2\right]}{8\xi_0^2 \sin^2\alpha} - \dfrac{6}{\sin\alpha}\ln\dfrac{\xi_1}{\xi_0}}{\dfrac{\mathrm{Re}^*\left[1 - \left(\dfrac{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\right]}{2\left(2\xi_0 \sin\alpha - \cos\alpha\right)^2} - \dfrac{6}{\sin\alpha}\ln\dfrac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{2\xi_0 - \operatorname{ctg}\alpha}} - 1 \Rightarrow \tag{14.70}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\\ \text{при } \xi_1\to\xi_0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\left(\mathrm{Re}^*-24\xi_0^2\sin\alpha\right)\left(2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha\right)^3}{8\xi_0^3\left[\mathrm{Re}^*-6\sin\alpha\left(2\xi_0-\mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2\right]}-1.$$

В главе 21 будет показано, что в тех случаях течения, когда можно пренебречь разницей в кривизне образующих канал поверхностей, выполняется условие $\xi_0 >> \mathrm{ctg}\alpha$, которое справедливо в большинстве технических приложений рассматриваемых каналов. Используя данное соотношение, мы можем понизить порядок числителя и знаменателя (14.70) и записать это выражение в виде

$$\varepsilon_{\max}\approx\frac{12\xi_0\cos\alpha-\frac{2}{3}\mathrm{Re}^*\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\xi_0}}{\mathrm{Re}^*-24\xi_0^2\sin\alpha}. \qquad (14.71)$$

Выражение (14.71) позволяет получить соотношение между параметрами, определяющими решение задачи, при выполнении которого относительное отклонение ε не превысит 5%. В отличие от (14.44) выражение (14.71) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому для получения указанной выше критериальной связи между параметрами нам необходимо использовать соотношение

$$\left|\varepsilon_{\max}\right|\le 0.05. \qquad (14.72)$$

Удобнее всего (14.72) исследовать численно, и если исключить особенности, возникающие при $\Pi^* = 0$, мы получим зависимость, ограничивающую снизу значения ξ_0, при которых выполняется (14.72) (рис. 14.17). На рисунке 14.17 видно, что значение ξ_0, при котором удовлетворяется (14.72), очень слабо зависит от Re^*, и поэтому для расчетов можно из (14.72) исключить зависимость от Re^* и использовать для определения указанного значения ξ_0 выражения (14.46), (14.47).

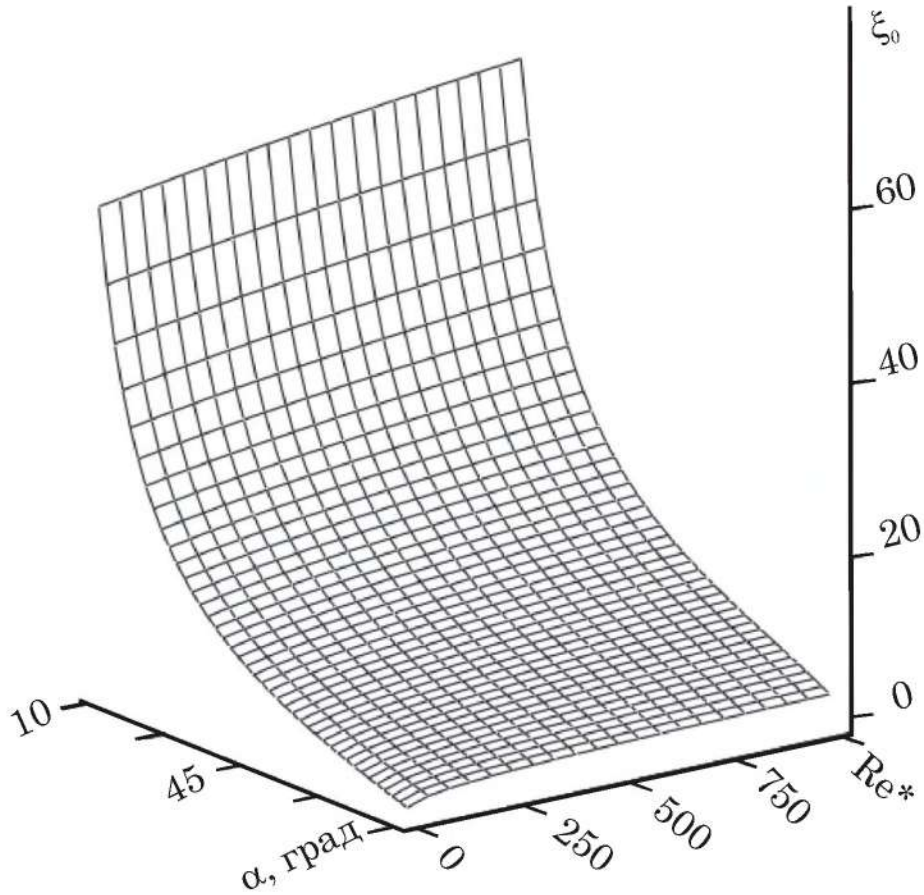


Рис. 14.17. Поверхность, ограничивающая снизу значения безразмерной координаты входа в соосный конический канал ξ_0, для которых модуль максимального значения относительного отклонения перепада давления, вычисленного с помощью плоской аппроксимации от перепада давления, вычисленного в модели с частичным учетом кривизны поверхностей канала, не превышает 5 %.

14.7. Диапазоны изменения чисел Рейнольдса, в которых можно пренебречь одной из составляющих безразмерного давления

Цифры не управляют миром, но показывают, как управляется мир.

И.В. Гете

Давайте сначала определим значение чисел Рейнольдса Re_f, вплоть до которых можно пренебрегать влиянием инерционной си-

лы, возникающей при изменении средней скорости течения вдоль канала.

Как и раньше, в качестве критерия для оценки влияния инерционной силы на ламинарные диффузорные течения примем значение относительного отклонения безразмерного давления, рассчитанного с учетом влияния инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения (14.57), от безразмерного давления, определенного без этого учета (14.30)

$$\varepsilon_F(\xi) = \left|\frac{\Pi_f - \Pi_{dis}}{\Pi_{dis}}\right| = \frac{\mathrm{Re}\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2\right]}{24\xi_0 \ln\frac{\xi_0}{\xi}}. \qquad (14.73)$$

Ранее мы видели, что зависимость $\varepsilon_F(\xi)$ в пределах канала является монотонной (рис. 14.10б), это означает, что экстремальные значения ε может принимать только на границах интервала $[\xi_0, \xi_1]$. Из выражения (14.73) следует, что при увеличении ξ, ε_F уменьшается. Действительно, при $\xi \to \infty$, $\varepsilon_F \to 0$, т.е. максимальное относительное отклонение Π_f от Π наблюдается в начале канала при $\xi \to \xi_0$

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\varepsilon_F(\xi) = \frac{\mathrm{Re}}{24\xi_0}\lim_{\xi\to\xi_0}\left|\frac{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2}{\ln\frac{\xi}{\xi_0}}\right| = \frac{\mathrm{Re}}{24\xi_0}\lim_{\chi\to 1}\left|\frac{1-\chi^2}{\ln\chi}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{Re}}{24\xi_0}\lim_{\chi\to 1}\left|\frac{-2\chi}{\frac{1}{\chi^2}}\right| = \frac{\mathrm{Re}}{12\xi_0}. \qquad (14.74)$$

Полагая значение ε_F в начале канала равным 0.05, получим выражение для определения числа Re, вплоть до которого можно

пренебречь инерционными силами при определении перепада давления $\frac{\mathrm{Re}}{12\xi} = 0.05$, откуда

$$\mathrm{Re} = 0.6\xi_0, \tag{14.75}$$

и данное значение опять совпадает с результатом, полученным в разделе 9.5 главы 9 для радиального течения между плоскими дисками (9.68).

Итак, мы определили диапазон чисел Рейнольдса, в котором можно пренебречь инерционными свойствами течения при расчете давления в секториальном диффузоре постоянной ширины. Это возможно в тех случаях течения, когда в выражении (14.57) второй член, показывающий компоненту безразмерного давления, определяемую трением на границах канала, значительно превосходит первый член, определяющий динамическую компоненту давления. Но, очевидно, могут существовать значения чисел Рейнольдса, при которых первый член (14.57) будет значительно превосходить второй. В данном разделе мы также определим диапазон чисел Re, в котором при расчете давления в коническом соосном диффузоре постоянной ширины можно с заданной точностью пренебречь изменением давления за счет трения на границах канала по сравнению с изменением динамической его составляющей, т.е. по сравнению с изменением давления в канале за счет изменения средней по площади поперечного сечения скорости жидкости.

Также, как и в разделе 9.6, определим относительное отклонение безразмерного давления, рассчитанного с учетом диссипативного члена, от его динамической составляющей как

$$\varepsilon_D(\xi) = \left| \frac{\Pi_f - \Pi_{din}}{\Pi_{din}} \right|, \tag{14.76}$$

где Π_{din} определяется выражением (14.58).

Сравнивая (14.73) и (14.76), получим соотношение, связывающее величину относительного отклонения безразмерного давления от его диссипативной части со значением относительного отклонения безразмерного давления от его динамической части

$$\varepsilon_D = \frac{1}{\varepsilon_F}, \tag{14.77}$$

откуда следует, что ε_D будет стремиться к своему максимальному значению при $\xi \to \infty$, и это значение равно бесконечности, но в то же время вследствие монотонности функции $\varepsilon_D(\xi)$ оно говорит нам, что должно всегда выполняться соотношение $\varepsilon_D(\xi_1) > \varepsilon_D(\xi_0)$. Следовательно, максимальное относительное отклонение ε_D будет наблюдаться на выходе из канала

$$\varepsilon_D(\xi_1) = \left| \frac{24\xi_0 \ln \frac{\xi_0}{\xi_1}}{\mathrm{Re}\left[1 - \left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2\right]} \right|. \tag{14.78}$$

Пользоваться выражением (14.78) для быстрых оценок весьма неудобно, поэтому упростим его, выполняя предельный переход $\xi_0 \to \xi_1$

$$\varepsilon_D(\xi_1) = \lim_{\xi_0 \to \xi_1} \varepsilon_D(\xi_1) = \frac{12\xi_1}{\mathrm{Re}}. \tag{14.79}$$

Поскольку мы предположили, что силами трения можно пренебречь, при относительном отклонении ε_D меньше, чем n %, т.е. при выполнении условия

$$\varepsilon_D \le \frac{n}{100}, \tag{14.80}$$

откуда получаем условие для Re

$$\mathrm{Re} \ge \frac{1200\xi_1}{n}. \tag{14.81}$$

Следовательно, из предположения, что $n = 1$ % получаем условие $\mathrm{Re} \ge 1200\xi_1$, а из $n = 5$ % получим $\mathrm{Re} \ge 240\xi_1$.

14.8. Расходно-напорная характеристика секториальных каналов с плоскими параллельными границами

Корректной считается та теория, которая предположительно допускает экспериментальную проверку.

Р. Моррис

С помощью полученных решений (14.30) и (14.57) мы можем построить размерную напорно-расходную характеристику секториального канала постоянной ширины при ламинарном течении. В случае пренебрежения инерционными свойствами $\Delta P(Q)$ имеет вид

$$\Delta P(Q) = \Pi \frac{\mu V_{f0}}{h} = \frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin\alpha} \ln\frac{r_0}{r_1}. \qquad (14.82)$$

Заметим, что перепад давления в секториальном канале не зависит от абсолютных значений радиальных координат входа в канал и выхода из него, а зависит только от их отношения.

В качестве примера рассмотрим напорно-расходную характеристику при течении жидкости с вязкостью, равной $\mu = 10^3$ Па·с в канале с размерами $h_0 = 0.01$ м и отношением радиальных координат входа в канал и выхода из него, равным $\frac{r_0}{r_1} = 0.25$ (рис. 14.18). Мы видим достаточно сильную зависимость перепада давления от угла раскрытия сектора граничных поверхностей секториального канала, что соответствует полууглу раскрытия граничных поверхностей в соосном коническом канале. Эта зависимость связана с увеличением площади поперечного сечения канала и, как следствие, уменьшением средней скорости течения с увеличением угла α. С разностью площадей поперечного сечения плоского и конического каналов связаны и различия в величинах перепада давлений в них для одинаковых значений α и Q. Действительно, ранее мы видели, что средние скорости (рис. 14.15) и распределение скорости в канале (рис. 14.16), а значит и напряжения сдвига на границах канала выше при течении в соосном коническом канале, что и при-

водит к несколько более сильной зависимости $\Delta P(Q)$ в случае течения в соосном коническом канале (рис. 14.18).

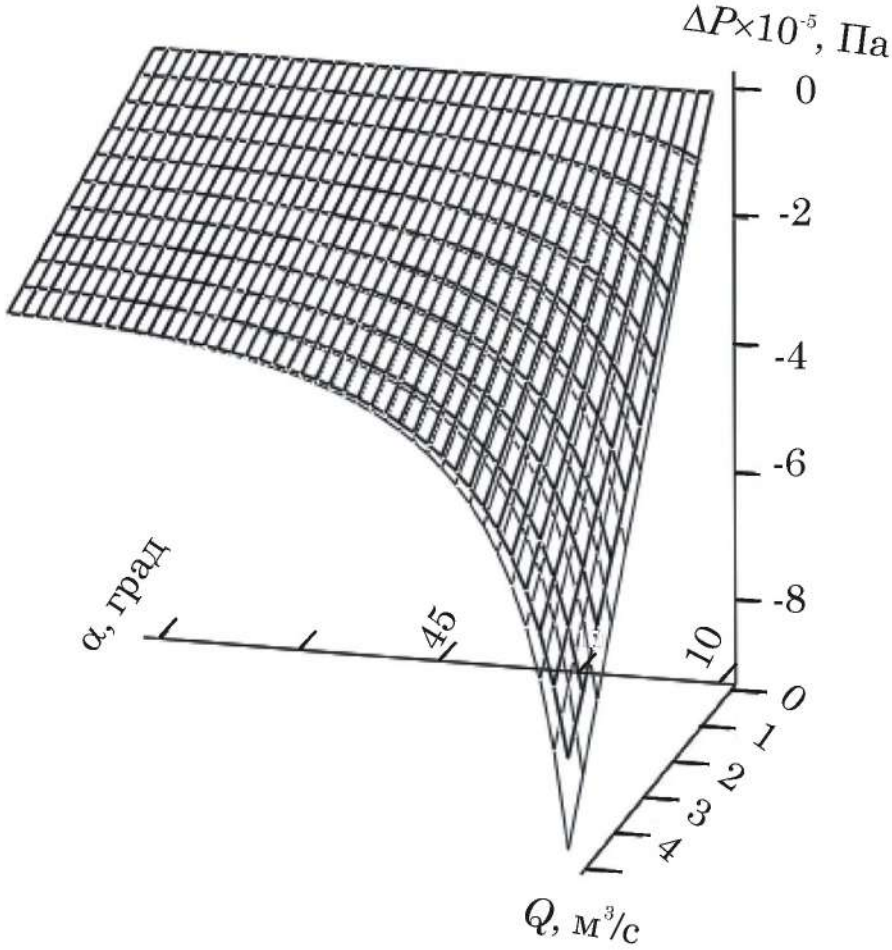


Рис. 14.18. Расходно-напорная характеристика соосного конического канала постоянной ширины $h = 0.01$ м, ограниченного координатами $R_0 = 0.1$ м, $R_1 = 0.4$ м при течении жидкости с вязкостью, равной $\mu = 10^3$ Па·с для различных значений полуугла раскрытия конических поверхностей. Нижняя поверхность получена в приближении, частично учитывающем кривизну границ канала. Верхняя поверхность получена для плоского приближения.

Относительное отклонение зависимости $\Delta P(Q)$ в плоском секториальном канале от зависимости в соосном коническом канале не превосходит в данном случае 15 % значения (рис. 14.19), а при

сравнении этих величин также будут справедливы выражения (14.46) и (14.47).

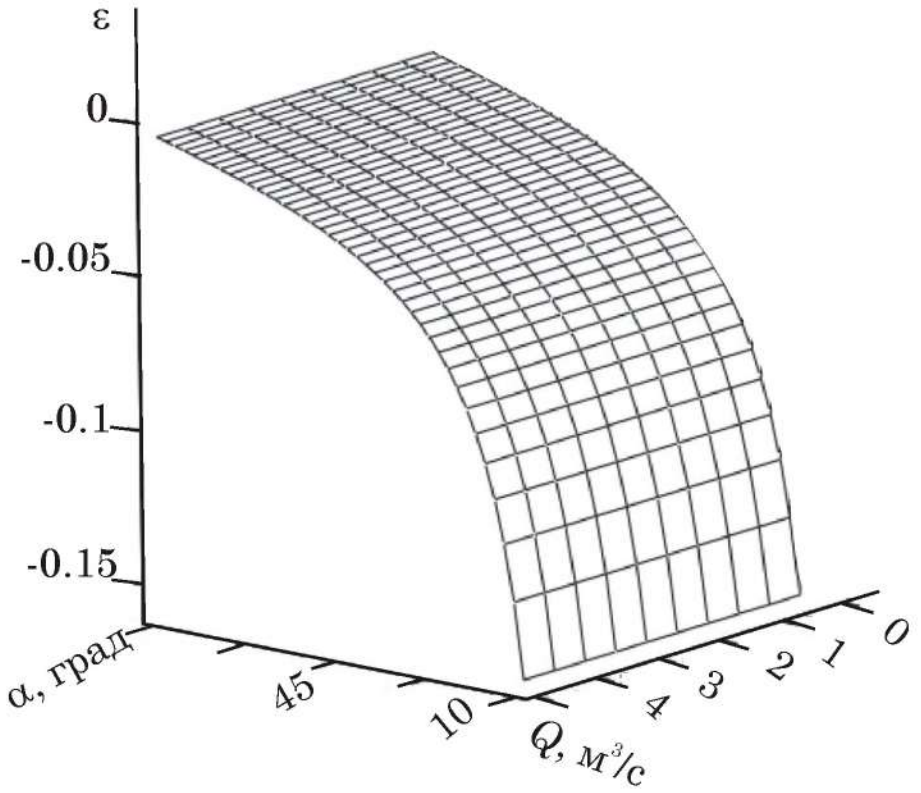


Рис. 14.19. Относительное отклонение перепада давления, полученного для плоского аппроксимирующего канала от давления, полученного в приближении с частичным учетом кривизны границ.

При необходимости учета инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала, зависимость $\Delta P(Q)$ для плоского секториального канала будет иметь вид

$$\Delta P(Q) = \Pi_f \frac{\mu V_{f0}}{h} = \frac{\rho}{2h^2}\left(\frac{Q}{2\pi r_0 \sin\alpha}\right)^2\left[1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right]+ \tag{14.83}$$

$$+\frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin\alpha}\ln\frac{r_0}{r_1}.$$

В данном случае в качестве примера рассмотрим течение жидкости со свойствами $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3 в канале с отношением координат входа и выхода равным $r_0/r_1 = 0.25$.

Зависимость (14.83), как и предыдущая зависимость (14.82), является достаточно сильной зависимостью от угла α по тем же самым причинам, которые мы рассмотрели для зависимости (14.82).

Отклонения же в величине перепада давления при течении в плоском канале от $\Delta P(Q)$ в соосном коническом канале при малых значениях угла α могут достигать больших величин (рис. 14.20), что вполне согласуется с зависимостью, приведенной на рисунке 14.14, а соотношение между этими величинами определяется выражениями (14.71) и (14.72), с помощью которых можно определить в каких случаях при расчете $\Delta P(Q)$ можно пренебречь влиянием кривизны граничных поверхностей.

Заметим, что для того, чтобы перейти от полууглов раскрытия исходных конических каналов α к углам раскрытия секториального канала достаточно $\sin\alpha$ умножить на 2π, т.е. $\varphi = 2\pi\sin\alpha$, и тогда для секториального канала перепад давления (14.82) запишется как

$$\Delta P(Q) = \frac{12\mu Q}{\varphi h^3}\ln\frac{r_0}{r_1}, \tag{14.84}$$

а выражение (14.83) примет вид

$$\Delta P(Q) = \frac{\rho}{2h^2}\left(\frac{Q}{\varphi r_0}\right)^2\left[1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right] + \frac{12\mu Q}{\varphi h_0^3}\ln\frac{r_0}{r_1}. \tag{14.85}$$

Из выражения (14.83) следует то, что при любых значениях α для малых расходов Q на выходе из канала будет преобладать диссипативная составляющая давления. Действительно, ΔP в соответствии с (14.83) можно представить в виде

$$\Delta P(Q) = AQ + BQ^2. \tag{14.86}$$

Отсюда нетрудно получить характер изменения перепада давления при малых значениях объемного расхода Q

$$\left.\frac{\partial \Delta P(Q)}{\partial Q}\right|_{Q\to 0} = A, \tag{14.87}$$

а поскольку всегда при $r_1 > r_0$ выполняется условие

$$A = \frac{6\mu}{\pi h^3 \sin\alpha} \ln\frac{r_0}{r_1} < 0, \tag{14.88}$$

перепад давления при малых Q будет всегда отрицательным. Результат почти очевидный, поскольку величиной Q определяется число Рейнольдса (14.50), (14.12), а при малых числах Re преобладают силы трения.

Соотношение (14.86) позволяет определить величину объемного расхода для ламинарного течения в секториальном диффузоре, при которой наблюдается экстремальное значение перепада давления из условия

$$\frac{\partial \Delta P(Q)}{\partial Q} = 0, \tag{14.89}$$

откуда получаем выражение

$$Q_e = -\frac{A}{2B} = -\frac{24\pi\mu r_0^2 \sin\alpha}{h\rho} \frac{\ln\frac{r_0}{r_1}}{1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}. \tag{14.90}$$

Для заданных геометрических параметров канала – r_0, r_1, α и свойствах жидкости ρ и μ при достижении значения расхода Q_e перепад давления ΔP достигает своего максимума, и при дальнейшем увеличении объемного расхода Q перепад давления начинает снижаться (рис. 14.20). Заметим, что зависимость, показанная на рисунке 14.20, получена для стационарных вариантов течения, т.е. каждая точка на которой отражает перепад давления при стационарном течении жидкости.

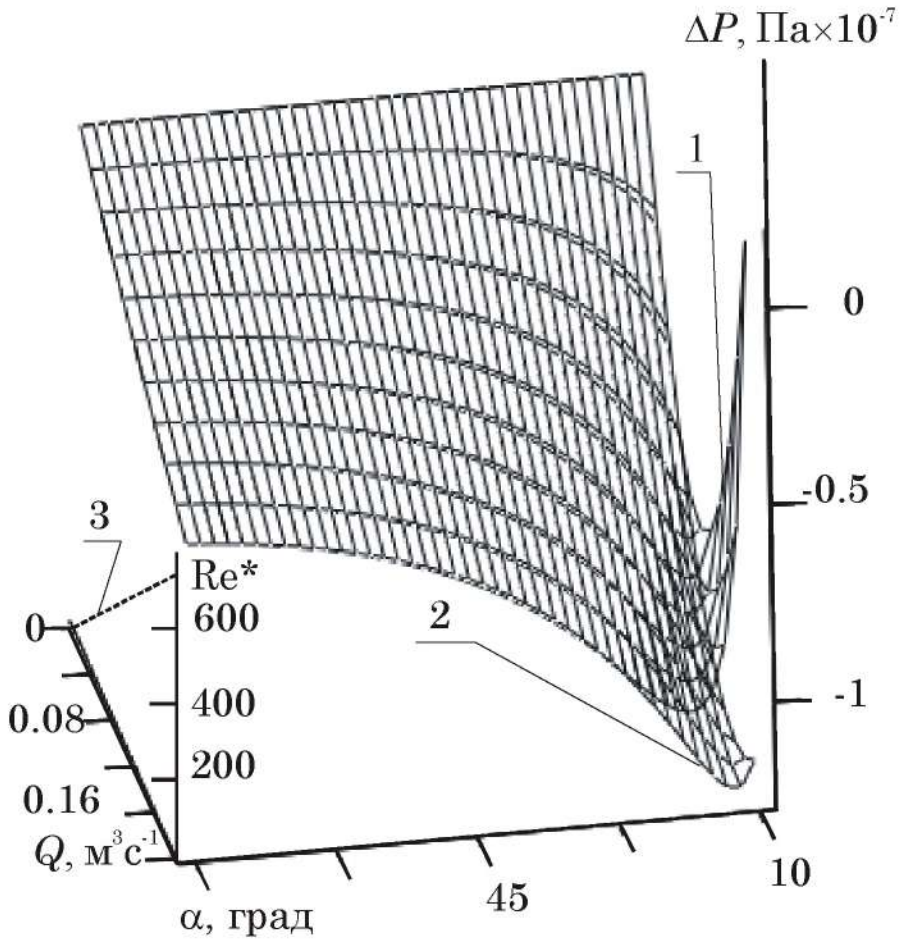


Рис. 14.20. Расходно-напорная характеристика соосного конического канала постоянной ширины h = 0.01 м, ограниченного координатами R_0 = 0.1 м, R_1 = 0.4 м при течении жидкости со свойствами μ = 10 Па·с и ρ = 1200 кг/м^3 для различных значений полуугла раскрытия конических поверхностей. 1 – характеристика, полученная в биконических координатах с частичным учетом кривизны границ; 2 – характеристика, полученная в плоском приближении; 3 – изменение числа Re* при увеличении расхода жидкости.

Для каналов с достаточно большими значениями радиальной координаты входа, при которых выполняется условие

$$\frac{r_1 - r_0}{r_0} = \frac{\Delta r}{r_0} < 1, \qquad (14.91)$$

выражение (14.83) можно упростить

$$Q_e = \frac{24\pi\mu r_0^2 \sin\alpha r_1^2}{h\rho} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta r}{r_0}\right)}{(r_1+r_0)\Delta r} \approx \frac{24\pi\mu r_0^2 r_1^2 \sin\alpha}{h\rho(r_1+r_0)} \frac{\Delta r}{\Delta r r_0} =$$

(14.92)

$$= \frac{24\pi\mu r_0 r_1^2 \sin\alpha}{h\rho(r_1+r_0)} \approx \frac{12\pi\mu r_1^2 \sin\alpha}{h\rho} \approx \frac{12\pi\mu r_0^2}{\rho h} \sin\alpha,$$

что совпадает с приближенным выражением, полученным для диффузорного течения в соосном коническом канале (9.80).

Если подставить в (14.83) выражение (14.90), то мы получим соотношение, определяющее максимальный перепад давления в зависимости от геометрических параметров канала и свойств жидкости

$$\Delta P_{\max f} = -\frac{72\mu^2 r_0^2}{\rho h^4} \frac{\left(\ln\frac{r_0}{r_1}\right)^2}{1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}, \qquad (14.93)$$

что полностью совпадает с выражением (9.84), полученном нами ранее для радиального ламинарного диффузорного течения между параллельными пластинами.

Выражение (14.93) можно упростить для течений в каналах, в которых выполняется условие (14.91), и далее поступая аналогично (14.92), получим

$$\Delta P_{\max f} \approx -\frac{72\mu^2 r_0^2 r_1^2}{\rho h^4} \frac{\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2}{(r_0+r_1)\Delta r} = -\frac{72\mu^2 r_1^2 \Delta r}{2\rho h^4 r_0} \approx -36\frac{\mu^2 r_0 \Delta r}{\rho h^4} \approx$$

(14.94)

$$\approx -72\frac{\mu^2 r_0^2}{\rho h^4},$$

что совпадает с (9.85), полученном как приближенное выражение для вычисления максимального давления в соосном коническом диффузоре.

Возможные максимальные перепады давления, рассчитанные для диффузорного ламинарного течения в соосном коническом канале и аппроксимирующем его секториальном канале, достаточно хорошо согласуются между собой (рис. 14.21). На большей части диапазона изменения параметров канала относительные отклонения максимальных давление не превосходят 10 % (рис. 14.22).

Поэтому и приближенное выражение для расчета максимального перепада давления при диффузорном ламинарном течении в секториальном канале постоянной ширины дает вполне приемлемые результаты для оценки перепада давления в соосном коническом канале (рис. 14.23, рис. 14.24).

Числа Рейнольдса, для которых получено распределение максимального перепада давления в секториальном канале постоянной ширины, будут определяться величиной расхода Q_e и выражениями (14.90) и (14.50)

$$\mathrm{Re}_{\max} = -12\xi_0 \frac{\ln\frac{\xi_0}{\xi_1}}{1-\left(\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)^2}, \qquad (14.95)$$

что совпадает с выражением, полученным в главе 9 для радиального течения между параллельными плоскостями (9.87).

А для каналов, в которых выполняется условие (14.80) из (14.95), мы получим

$$\mathrm{Re}_{\max} = -12\frac{r_0}{h}. \qquad (14.96)$$

Распределения, показанные на рисунке 14.21, относятся исключительно к ламинарным течениям, поскольку число Рейнольдса Re не превосходит 500 (рис. 14.25).

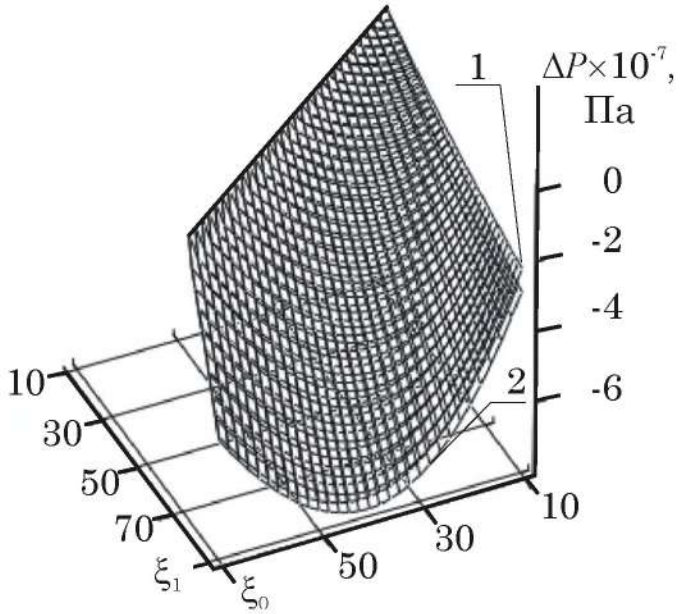


Рис. 14.21. Зависимость максимального перепада давления, рассчитанного с учетом характерной инерционной силы при диффузорном ламинарном течении жидкости с параметрами $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3 в соосном коническом канале постоянной ширины $h = 0.01$ м и $\alpha = 15°$ (9.83), от безразмерных радиальных координат, ограничивающих канал – 1; 2 – распределение в секториальном канале (14.93).

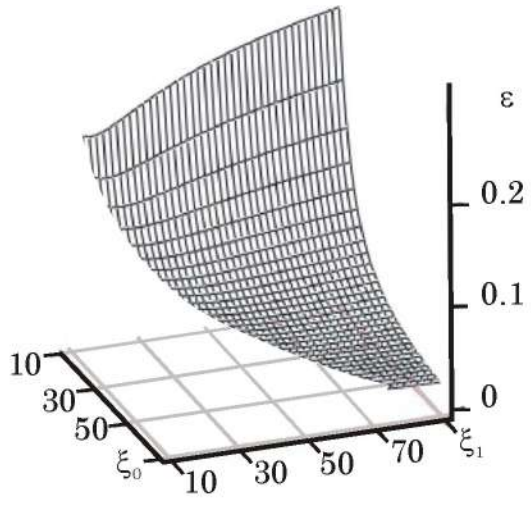


Рис. 14.22. Относительное отклонение максимального значения перепада давления в аппроксимирующем секториальном канале от исходного соосного конического канала при диффузорном ламинарном течении.

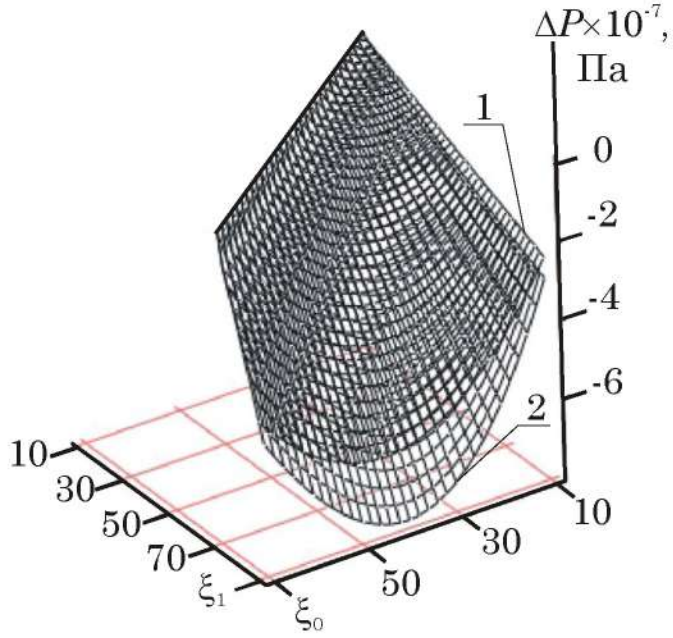


Рис. 14. 23. Зависимость максимального перепада давления, рассчитанного с учетом характерной инерционной силы при диффузорном ламинарном течении в секториальном канале постоянной ширины $h = 0.01$ м и для жидкости со свойствами $\mu = 10$ Па·с, $\rho = 1200$ кг/м^3 от безразмерных радиальных координат, ограничивающих канал. 1 – распределение (14.94); 2 – распределение (14.93).

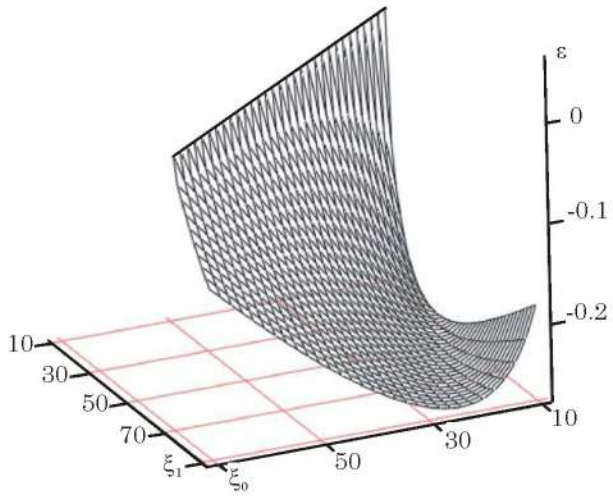


Рис. 14.24. Относительное отклонение максимального значения перепада давления в секториальном канале, рассчитанного по (14.93), от упрощенной зависимости (14.94) при диффузорном ламинарном течении.

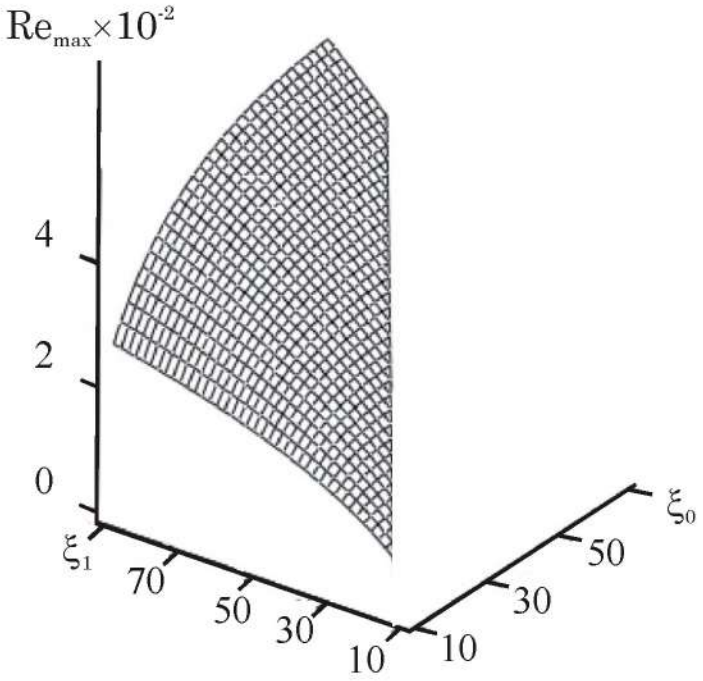


Рис. 14.25. Зависимость числа Рейнольдса, при котором наблюдается максимальный перепад давления в секториальном диффузоре постоянной ширины h = 0.01 м ° от безразмерных радиальных координат, ограничивающих канал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Нет, не оплакивать былое –
В нем силу надобно искать
У о д с в о р т

1. *Prandtl L.,* Über Flüssigkeitsbewgung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlg. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904, S. 484 – 491/ Вновь напечатано в "Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik", Göttingen. 1927. (русский перевод в книге *Л. Прандтль*, Теория несущего крыла. – М.: ГНТИ, 1931.– 32 с.)
2. *Бетчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Наука, 1973. – 760 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. –736 с.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1976, – 536 с.
5. *Фабер Т.Е.* Гидроаэродинамика. – М.: Постмаркет, 2001.– 560 с.
6. *Хан Ч.Д.* Реология в процессах переработки полимеров. – М.: Химия, 1979. – 368 с.
7. *Тадмор З. Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1984. – 632 с.
8. *Сафулин Д.М., Чистяков Д.Б.* Течение расплавов полимеров в каналах сложной формы. – М.: НИИТЭХИМ, 1984. – 37 с.
9. *Берд Р. Б., Кертисс И.Ф.* Удивительные полимерные жидкости / Физика за рубежом. Сер. А. Исследования. Сборник статей. – М.: Мир, 1986. – С. 29 – 51.
10. *Barnes H.A., Hutton J.F., Walters K.* An Introduction to Rheology. – Amsterdam: Elsevier, 1989. – 200 p.
11. Rheology for Polymer Melt Processing / *Edited by J.-M. Piau, L.-F. Agassant.* – Amsterdam: Elsevier, 1996. – 434 p.
12. *Huilgol R.R., Phan-Thien N.* Fluid Mechanics of Viscoelasticity. – Amsterdam: Elsevier, 1997. – 508 p.
13. *Boger D.V., Walters K.* Rheological Phenomena in Focus. – Amsterdam. Elsevier, 1993. – 166 p.
14. *Tanner R.I., Walters K.* Rheology: An Historical Perspective. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – 268 p.
15. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Уравнения вязких течений в гладких каналах переменного сечения // Доклады РАН, 1995. Т. 345, № 5. – С. 615–618.
16. *Панов А.К., Анасов А.Р.* Гидродинамика потоков аномально-вязких нелинейных систем в формующих каналах. – Уфа.: Гос. нефт. техн. ун-т, 1994. – 258 с.

17. *Franz P.* Analytical and experimental investigation of laminar channel flow with respect to flow metering // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1999. Vol. 121, No. 4. – P. 757–761.
18. *Kettloboroughh C.F.* Radial flow between parallel disc with downward center flow // Trans. ASME. J. Tribol. 2002. Vol. 124, No. 4. –P. 858–863.
19. *Zarutskaya T.W.* Flow of nonlinear viscous incompressible fluid in arbitrary axisymmetric channels // Докл. Нац. АН України, 1995. – № 6. – С. 48–50.
20. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями. I. Конусы с общей вершиной // International Meeting on Information Technology. KHARKOV, 12-14 May 1997. Vol. 5. – Kharkov. 1997. – P. 438–440.
21. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями. II. Конусы не имеющие общей вершины // International Meeting on Information Technology. KHARKOV, 12-14 May 1997. Vol. 5. – Kharkov. – 1997. – P. 441–443.
22. *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических каналах. // Вестник Харьковского государственного политехнического университета, вып.7. 4.2. Механика. Машиностроение. – Харьков: ХГПУ. –1997. – С. 22–31.
23. *Ульев Л.М.* Медленные течения между соосными коническими поверхностями // Инженерно-физический журнал, 1998. – Т. 71, – № 6. – С. 1092–1098.
24. *Ульев Л.М.* Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. Выпуск 34. – Харьков. ХГПУ, 1999. – С. 3–8.
25. *Ульев Л.М.* Развитие ламинарного диффузорного течения в конической щели постоянной ширины // Інтегровані технології та енергозбереження, 2000. – №1. – С. 57–69.
26. *Ульев Л.М.* Течение и теплообмен в кольцевых конических каналах. Аппроксимация плоским каналом // Інтегровані технології та енергозбереження, 2000. – № 2. – С. 55–64.
27. *Ульев Л.М.* Решение задачи ламинарного течения между коническими поверхностями с общей вершиной при частичном учете инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ", 2001. – № 3. – С. 224–235.
28. *Ульев Л.М.* Влияние кривизны границ на ламинарное установившееся течение в кольцевом коническом канале постоянной ширины // Інтегровані технології та енергозбереження, 2001. – № 1. – С. 34–44.
29. *Ульев Л.М.* Приближенное решение задачи ламинарного течения в каналах с малой конусностью // Вестник ХГПУ. Выпуск 49. Харьков. ХГПУ. 1999. С. 109–112.
30. *Ульев Л.М.* Медленные конфузорные течения в соосных конических каналах переменной ширины // Вестник НТУ "ХПИ", 2002. – № 3. – С. 122–130.

31. *Ульев Л.М.* Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". Харьков. НТУ "ХПИ". 2002. № 6. – С. 66–71.
32. *Ulyev L.M.* Solution of Slow Steady State Flow Problem in a Constant Width Channel with Taking into account curvature distinction of its Boundaries // 15th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA'2002, Prahga, 2002, Summaries Vol. 3.Fluid Flow. Multiphase System. Praha. – 2002. – P. 178–179. (Paper No. P5. 102. P. 11).
33. *Ульев Л.М.* Влияние инерционных свойств на распределение давления при ламинарном конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины // Вестник НТУ "ХПИ". –2002. – Вып. 9.–Т. 1. – С. 88–94.
34. *Ульев Л.М.* Ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале переменной ширины с частичным учетом сил инерции // Вестник НТУ «ХПИ». –2003. – Вып. 17.– С. 143–153.
35. *Ульев Л.М.* Развитие ламинарного диффузионного течения в соосных конических каналах постоянной ширины // ITE. –2003, № 2. – С. 47–57.
36. *Ульев Л.М.* Ламинарное диффузорное течение в секто-риальном канале постоянной ширины с частичным учетом инерциальных свойств // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – Вып. 11. – Т.2. – С. 122–131.
37. *Ульев Л.М.* Длина начального гидродинамического участка при ламинарном диффузорном течении в соосных конических каналах постоянной ширины // ITE. – 2003. – №4. – С. 56–64.
38. *Ульев Л.М.* Диапазон чисел Рейнольдса, в котором ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале с линейно меняющейся шириной можно считать безинерционным // Вестник НТУ «ХПИ», 2003, № 13. С. 103 – 111.
39. *Ульев Л.М.* Особенности ламинарного течения в секториальном диффузоре с переменной шириной вдоль канала // ITE. – 2004. – № 1. – С. 25–35.
40. *Ульев Л.М.* Приближенное решение задачи ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ // ITE. – 2004. –№ 2. – С. 60–65.
41. *Ульев Л.М.* Приближенное решение задачи ламинарного течения в соосном коническом конфузоре с общей вершиной его границ // ITE. – 2004. – № 3. – С. 30–38.
42. *Ульев Л.М.* Решение задачи конвективного теплообмена в цилиндре с граничными условиями третьего рода // XV научн.–техн. Конф. Молодых ученых. Аннотированная программа. ИПМАШ АН СССР. Харьков, 1987. С. 12–13.
43. *Ulyev L.M.* Hydrodynamic entrance length with the laminar diffuser flow in the constant width conic channel // 16th International Congress of Chemical and Process Engineering. CHISA 2004. 22 – 26 August 2004.

Praha. Czech republic. Summaries. – Vol. 3. Hydrodynamic Process. – P. 1126–1127. (Paper No. 0587)

44. *Ульев Л.М.* Особенности распределения давления и его расчета при ползущем течении жидкости в коническом диффузоре // ITE. – 2004. – № 4. – С. 31 – 37.
45. *Ульев Л.М.* Система гидродинамических уравнений, описывающих ламинарное течение в соосных конических каналах постоянной ширины // ITE. – 2005. – № 1. – С. 9–20.
46. *Ульев Л.М.* Классификация соосных конических каналов // ITE. – 2005. – № 2. – С. 55–62.
47. *Ульев Л.М.* Ламинарное конфузорное течение в соосном коническом канале переменной ширины с частичным учетом сил инерции // ITE. – 2005. – № 3. – С. 29–36.
48. *Ульев Л.М.* Оценка перепада давления на начальном гидродинамическом участке ламинарного течения в соосном коническом диффузоре // ITE. – 2005. – № 4. – С. 11–28.
49. *Ульев Л.М.* Развитие ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале с неоднородным начальным профилем скорости // ITE. – 2006. – № 1. – С. 8–29.
50. *Осипов А.Ф.,* Объемные гидравлические машины. – М.: Машиностроение, 1966. – 160 с.
51. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / *Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др.* – М.: Машиностроение, 1982. – 423 с.
52. Попов Д.Н. Механика гидро- и пневмоприводов. – М.: Изд –во МГТУ им. Баумана, 2003. – 320 с.
53. *Башта Т.М.* Объемные насосы и гидравлические двигатели гидросистем. – М.: Машиностроение, 1974. – 608 с.
54. *Литвинов В.Г., Иванова Н.И.* Задача о движении нелинейно-вязкой среды в осесимметричных каналах // Прикладная механика. – 1994. – Т. 30. – № 11. – С. 85–90.
55. *Пономаренко В.Г., Житинкин А.А., Запорожец О.Л., Ульев Л.М. и др.* Погружное устройство для гранулирования термопластов // Авторское свидетельство № 1720868 СССР. 23. 03. 92. – Бюл. № 11.
56. *Каплун Я.Б., Ким В.С.* Формующее оборудование экструдеров. – М.: Машиностроение, 1969 – 160 с.
57. *Joshi M.V.* Dies For plastic extrusion. – Delhi.: Macmillan India Limited, 1984. – 176 p.
58. *Басов Н.И. Скуратов В.К.* Раздувное формование. – Л.: Химия, 1983. – 75 с.
59. Технология нанесения покрытий на поверхности / *Яхно О.М., Кравченко С.Г., Кривошеев В.С., Полывяный А. П., Бочковский В.С.* – К.: Техніка, 1993. – 120 с.
60. *Басов Н.И. Казанков Ю.В.* Литьевое формование полимеров. – М.: Химия, 1984. – 248 с.

61. *Басов Н.И. Казанков Ю.В., Любартович В.А.* Расчет и конструирование оборудования для производства и переработки полимерных материалов. – М.: Химия, 1986. – 488 с.
62. *Ульев Л.М., Товажнянский Л.Л.* Теплообмен при ламинарном течении между коаксиальными эквидистантными коническими поверхностями. Диффузорное течение // Вестник ХГПУ: Харьков. ХГПУ, – Выпуск 10.–1998. – С. 3–12.
63. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении в кольцевых конических каналах переменной ширины // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. Сборник научных трудов ХГПУ.– Харьков ХГПУ, –Выпуск. 6. – Часть. 3. – 1998. – С. 509–513.
64. *Ульев Л.М.* Ламинарный теплообмен для четных граничных условий первого рода при диффузорном течении в коническом зазоре // Вестник ХГПУ. Харьков. ХГПУ, –1999. – Выпуск 47. – С. 7–15.
65. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении в коническом зазоре с граничными условиями первого рода // Вестник ХГПУ. Харьков. ХГПУ, – Выпуск 56. –1999. – С. 37–52.
66. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении в коаксиальном коническом канале с переменной температурой внутренней стенки канала // Сб. научн. трудов. "Авиационно-космическая техника и технология". Вып. 9. Тепловые двигатели и энергоустановки. Харьков. ХАИ, – 1999. – С. 165–178.
67. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном течении в коаксиальных конических конфузорах для граничных условий первого рода // ІТЕ. – 1999. – № 2. – С. 40–52.
68. *Ульев Л.М.* Ламинарный теплообмен при диффузорном течении в соосных конических зазорах для граничных условий первого рода с линейным изменением температуры стенок вдоль течения // ІТЕ. – 1999. – №4. – С. 45–59.
69. *Ульев Л.М.* Ламинарный теплообмен для нечетных граничных условий первого рода при диффузорном течении в коническом зазоре // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. Сборник научных трудов ХГПУ. – Выпуск. 7. – Часть. 4. Харьков. ХГПУ, – 1999. – С. 110–118.
70. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении жидкости в коаксиальных конических каналах // Теоретические основы химической технологии, – 2000. – Т. 34, – №1. – С. 16–24.
71. *Ульев Л.М.* Длина участка термической стабилизции при ламинарном теплообмене в соосных конических каналах постоянной ширины // Вестник ХГПУ. – Выпуск 98. Харьков. ХГПУ, – 2000. – С. 137–141.
72. *Ульев Л.М.* Решение задачи ламинарного теплообмена для диффузорного течения в соосных конических каналах при произвольном непрерывном изменении температуры стенок вдоль течения // Вестник ХГПУ. Выпуск 89. Харьков. ХГПУ, – 2000. – С. 81–88.

73. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении в конической щели для граничных условий первого рода и произвольном распределении температуры на входе // Вестник ХГПУ. – Выпуск 105. Харьков. ХГПУ, –2000. – С. 113–124.
74. *Ulyev L.M.* Laminar heat transfer in the constant width coaxial conic channels // CHISA'2000, Prahga, 2000, Summaries Vol. 3. Mechanical and Heat Transfer. Processes and Equipment. Praha. –2000. – P. 197. (Paper No. P1. 129. P.20).
75. *Ульев Л.М.* Ламинарный теплообмен при расходящемся течении в коническом зазоре с кусочно-дифференцируемым распределением температуры на границах // ІТЕ. – 2000, – №3. – С. 20–36.
76. *Ульев Л.М.* Теплообмен при медленном диффузорном течении в коаксиальных конических зазорах для условий первого рода с заданным изменением температуры стенок вдоль течения // 4й Минский Международный форум по тепло – и массообмену. 22–26 мая 2000 г. –Т. 7. Тепломассообмен в реологических системах. Минск. 2000. – С. 204–213.
77. *Ульев Л.М.* Ламинарный теплообмен при диффузорном течении жидкости в коаксиальном коническом канале с переменной температурой внутренней стенки // ТОХТ. – 2001. – Т. 35, – № 1. – С. 31–41.
78. *Ульев Л.М.* Ламинарный теплообмен при диффузорном течении в соосном коническом канале в случае граничных условий первого рода // ИФЖ. – 2001. – Т. 74, – № 1. – С. 21–26.
79. *Ponomarenko V.G., Potebnya G.F. Ulyev L.M.* Peculiarities of flow and heat exchange of the high-viscosity liquids in cylindrical canal // Fluid mechanics of Soviet research. –1985. – Vol. 14, No. 4, –P. 40–50.
80. *Ульев Л.М.* Течение и теплообмен высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // ТОХТ. – 1992. – Т. 26, –№2. – С. 243–253.
81. *Ульев Л.М.* Неизотермическое течение высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // Тепломассообмен-ММФ-92. Том. 6. Тепломассообмен в реологических системах. –Минск. – 1992. – С. 61–65.
82. *Ульев Л.М.* Неизотермическое течение расплавов термопластичных полимеров в круглых формующих каналах // ТОХТ. –1995. – Т. 29. –№ 3. – С. 233–241.
83. *Ульев Л.М.* Напорно-расходная характеристика при неизотермическом течении высоковязких жидкостей в цилиндрических каналах // Тепломассообмен- ММФ-96. Том 6. Тепломассообмен в реологических системах. – Минск. 1996. – С. 33–37.
84. *Ульев Л.М.* Неизотермическое течение высоковязких бингамовских жидкостей в круглых каналах // Тепломассообмен- ММФ-96. Том 6. Тепломассообмен в реологических системах. – Минск. 1996. – С. 23–37.
85. *Ульев Л.М.* Особенности неизотермического формования расплавов термопластичных полимеров в коническо- цилиндрических каналах // Тепломассообмен- ММФ-96. Том 6. Тепломассообмен в реологических системах. – Минск. 1996. – С. 18–22.

86. *Ульев Л.М.* Напорно-расходная характеристика круглых формующих каналов при неизотермическом течении расплавов термопластичных полимеров // ИФЖ. –1996. – Т. 69. – № 4. – С. 606–614.
87. *Ulyev L.M.* Non-isothermal flow of high-viscosity melts of thermoplastic polymers in conic-cylindrical dies // 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA'96, Prahga, 1996. Paper No: P:7. 114 [0270] . –P. 1–6.
88. *Ulyev L.M.* Pressure drop-flowrate characteristic for non-isothermal flow high-viscosity liquids in circular channel // 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA'96, Prahga, 1996. Paper No: P: 7 .115 [0273] . -P. 1–7.
89. *Ulyev L.M.* Non-isothermal Flow Melts of Thermoplastic Polymers in Conic-Cylindrical Dies // 5th World Congress of Chemical Engineering. July 14-18, 1996, San Diego, California. New Developments in Polymer Processing. Paper 79i.
90. *Ulyev L.M.* Pressure Drop-Flowrate Characteristic for Non-Isothermal Flow Melts of Thermoplastic Polymers in Circular Channels // 5th World Congress of Chemical Engineering. July 14-18, 1996, San Diego, California. New Developments in Polymer Processing. Paper 79j.
91. *Ульев Л.М.* Неизотермическое течение расплавов термопластичных полимеров в коническо-цилиндрических фильерах // ТОХТ. 1996. Т. 30. № 6. С. 583-590.
92. *Ulyev L.M.* Feature of confuser non- isothermal pressure drop- flowrate characteristic // International Meeting on Information Technology. KHARKOV 12-14 May 1997. –Vol. 5. –Kharkov. –1997. –P. 433–437.
93. *Ulyev L.M.* Pressure characteristic with non-isothermal flow of high viscosity liquids in circular confuser // 13th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA'98, –Prahga, 1998, Summaries Vol. 7. Microsymposium on Engineering Rheology, Fluid Flow, Mixing, Fludization, Particulate Solids, Machanical Separations. –P. 28.
94. *Ульев Л.М.* Особенности напорно-расходной характеристики при неизотермическом течении высоковязких жидкостей в круглых конфузорах. Часть 1. Метод исследования // Вестник ХГПУ. Выпуск 15.: – Харьков. ХГПУ, 1998. –С. 3–13.
95. *Ульев Л.М.* Особенности напорно-расходной характеристики при неизотермическом течении высоковязких жидкостей в круглых конфузорах. Часть 2. Течение в каналах с адиабатической стенкой // Вестник ХГПУ. Выпуск 15.: Харьков: ХГПУ. 1998. С. 14 – 18.
96. *Ульев Л.М.* Особенности напорно-расходной характеристики при неизотермическом течении высоковязких жидкостей в круглых конфузорах. Часть 3. Течение с теплообменом на границе. Малые углы раскрытия // Вестник ХГПУ. Выпуск 28. –Харьков: ХГПУ, 1999. –С. 26–32.
97. *Ульев Л.М.* Особенности напорно-расходной характеристики при неизотермическом течении высоковязких жидкостей в круглых конфузо-

рах. Часть 4. Течение с теплообменом на границе. Большие углы раскрытия // Вестник ХГПУ. Выпуск 28. Харьков: ХГПУ, 1999. –С. 33–37.

98. *Greitzer E.H., Tan C.S., Graft M.B.* Internal Flow: Concepts and Applications (Cambridge Engine Technology S.). Cambridge. Cambridge University Press, 2004. – 800 p.
99. *Пономаренко В.Г., Потебня Г.Ф., Ульев Л.М., Житинкин А.А., Ольховников О.А.* Определение реологических свойств высоковязких жидкостей с помощью автоматического капиллярного вискеометра. // Инженерно физический журнал, –1990. –Т. 59. –№ 1. – С. 158–159 (Ден. В ВИНИТИ АН СССР. № 1226-В90).
100. *Pearson I.R.A.* Polymer Flows Dominated by High Heat Generation and Tromster // Polymer Engineering Science, February. 1978. – Vol. 18. – № 3. –P. 222–228.
101. *Торнер Р.В., Акутин М.С.* Оборудование заводов по переработке пластмасс. – М.: Химия, 1986. – 400 с.
102. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. – 520 с.
103. *Гольдин А.М., Кармазин В.А.* Гидродинамические основы тонкослойного сепарирования. – М.: Агропромиздат, 1985. – 264 с.
104. *Ульев Л.М., Коровко В.А.* Тепломассообмен и испарение при пленочном течении в конфузоре // Тепломассообмен – ММФ-96. Том 4. Тепломассообмен в двухфазных системах. 4.2. – Минск: 1996. –С. 151–154.
105. *Ульев Л.М., Данилов Ю.Б.* Теплообмен и испарение при пленочном течении в конфузоре // Теоретические основы химической технологии. 1999. -Т. 33, -№ 1. -С. 30–38.
106. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 608 с.
107. *Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г.* Математические формулы. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 128 с.
108. *Ли Цзун-дао.* Математические методы в физике. – М.: Мир, 1965. – 296 с.
109. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. – М.-Л.: ОГИЗ. Гос. издат. тех.-теор. лит., 1949. – 612 с.
110. *Sors L., Bardocz L., Radnoti I.* Plastik mobds and dios. Budapest. Akademiai Kiado, 1981. – 496 p.
111. *Слезкин Н.А.* Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами // Матем. сборник. – 1935, –Т. 42, –№ 1. – С. 43–64.
112. *Хаппель Дж., Бригер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 632 с.
113. *Торнер Р.В.* Основные процессы переработки полимеров. – М.: Химия, 1972. – 452 с.
114. *Генералов М.Б., Зубков В.А., Попов Ю.П.* К расчету конического кольцевого участка экструзионных головок // Химическое и нефтяное машиностроение, 1969, –№ 3. –С. 17–19.

115. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 424 с.
116. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 344 с.
117. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1973. – 616 с.
118. *Керчман В.И.* Медленные течения вязкой жидкости в коническом диффузоре // Изв. АН СССР МЖТ. 1972, –№ 2. – С. 41–47.
119. *Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е.* Явления переноса. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
120. *Повх И.Л.* Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение. 1976. – 505 с.
121. *Каминер А.А., Яхно О.М.* Гидромеханика в инженерной практике. – Киев: «Техника», 1987.– 176 с.
122. *Ульев Л.М.* Особенности распределения давления и его расчета при ползущем течении жидкости в коническом диффузоре // ITE. – 2004. – № 4. – С. 31–37.
123. *Мирзоев Р.Г., Кугушев И.Д., Брагинский В.Д., Казанков Ю.В.* Основы конструирования и расчета деталей из пластмасс и технологической оснастки для их изготовления. – Л.: Машиностроение. 1972. – 416 с.
124. *Новиков П.А., Любин Л.Я.* Течение вязкой жидкости в узком зазоре между неплоскими поверхностями // ИФЖ. –1987. –Т. 52. –№ 4. –С. 569–575.
125. *Новиков П.А., Любин Л.Я., Новикова В.И.* Течения типа Хил-Шоу между коаксиальными оболочками вращения // ИФЖ. –1987. –Т. 52. – № 6. –С. 940–948.
126. *Новиков П.А., Любин Л.Я., Новикова В.И.* Течения и теплообмен в щелевых системах. – Минск: «Навука і тэхніка». 1991. – 360 с.
127. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир. 1964. – 656 с.
128. *Алешко П.И.* Механика жидкости и газа. – Харьков: Изд-во при ХГУ. Издат. объединения «Вища школа». 1977. – 320 с.
129. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Гос. издат. физ.-мат. лит. 1959. – 808 с.
130. *Исаченко В.М., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – М.: Энергоиздат, 1981. – 717 с.
131. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 1. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит. 1971. – 600 с.
132. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. – М.-Л.: Госиздаттехтеорлит, 1951. – 420 с.

Наукове видання

УЛЬЄВ Леонід Михайлович

ЛАМІНАРНІ ТЕЧІЇ В СООСНИХ КОНІЧНИХ КАНАЛАХ

Монографія

В 2-х томах

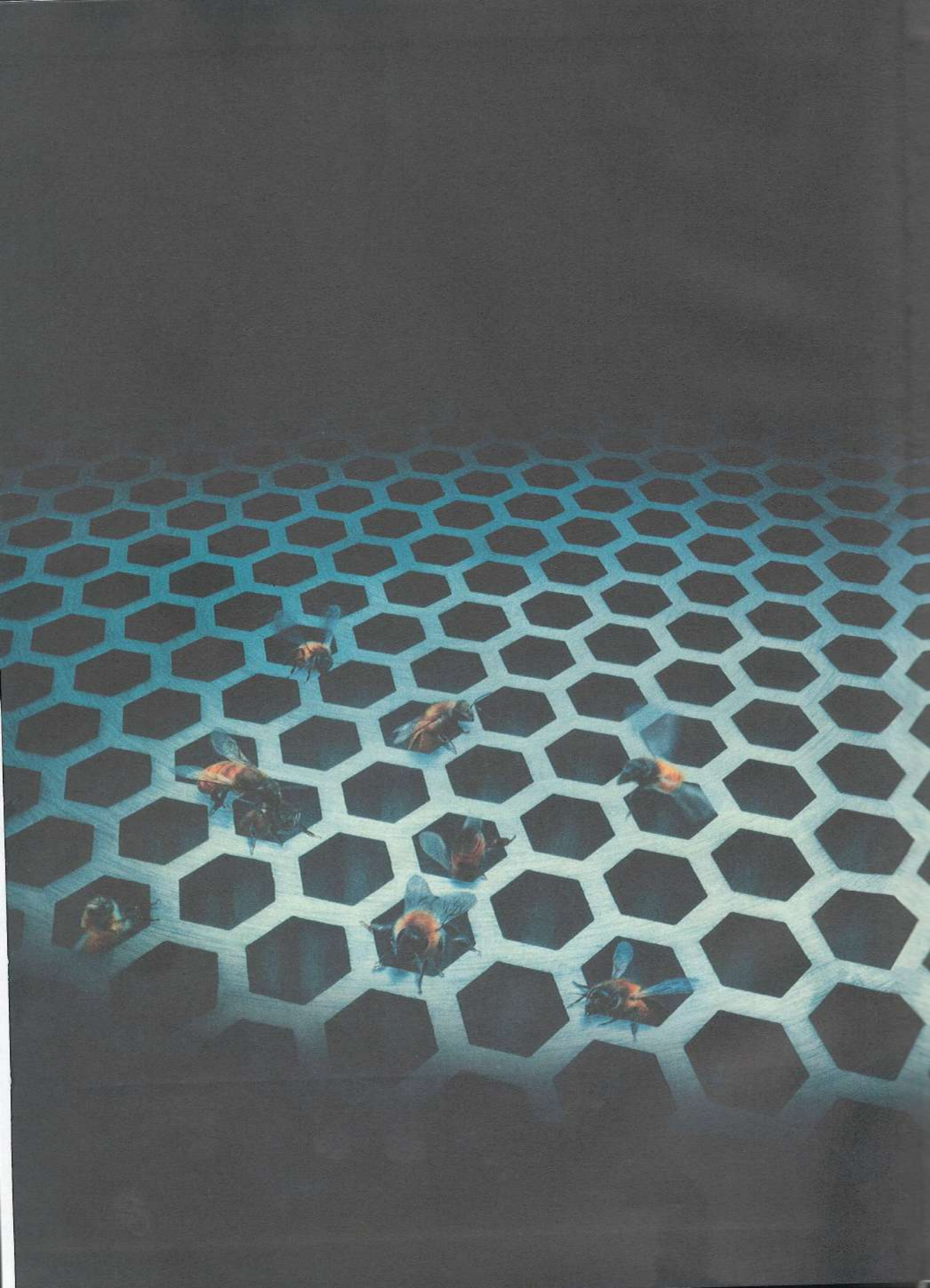
Том 1

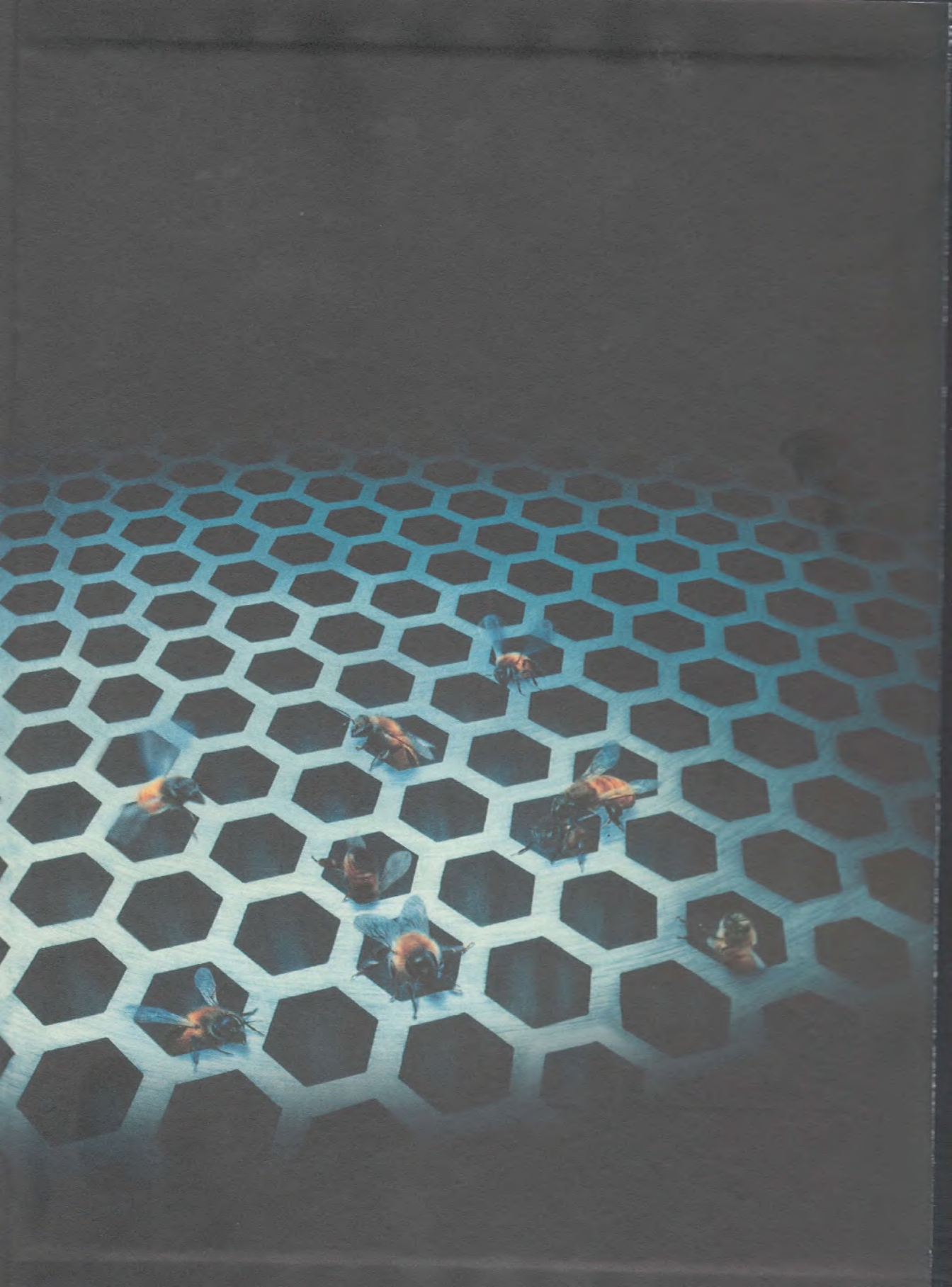
В авторській редакції

Підп. до друку 15.06.06. Формат 70×100 1/16. Папір офісний. RISO-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 52,8. Обл.-вид. арк. 54,9. Наклад 300 прим. Зам. № 220 Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ".
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21







ДРУКАРНЯ НТУ "ХПІ"